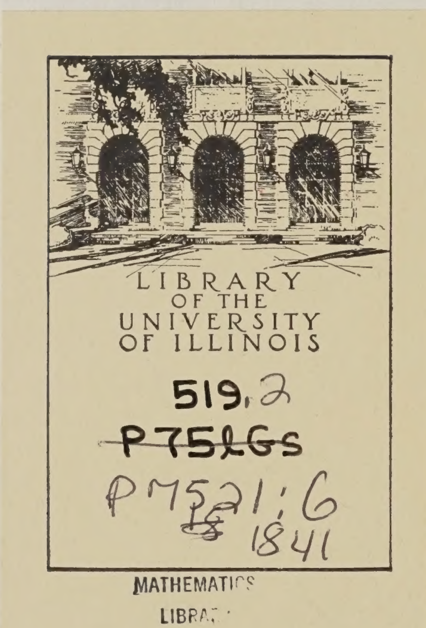

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS
519.2
P75lGs
P M521;6
1841
MATHEMATICS
LIBRARY

Lehrbuch

der

Wahrscheinlichkeitsrechnung

und

deren wichtigsten Anwendungen.

Von

S. D. Poisson,

Mitgliede des französischen Nationalinstitutes und Längenbureaus, der königl. Societäten zu London und Edinburg, der Academie zu Berlin, Stockholm, St. Petersburg 2c. 2c.

Deutsch bearbeitet und mit den nöthigen Zusätzen versehen

von

Dr. C. H. Schnuse.

Braunschweig,
Verlag von G. C. E. Meyer sen.
1841.

Vorwort des Uebersetzers.

Poisson's Entdeckungen in den sublimsten Zweigen der mathematischen Wissenschaften sind unter allen gebildeten Nationen als zu dem ersten Range gehörig bekannt, und kein Mathematiker, dem es um klassische mathematische Bildung zu thun ist, kann und wird sich eines gründlichen Studiums der Werke Poisson's, der leider vor Kurzem den Wissenschaften durch einen zu frühen Tod entrissen ist, entheben. Es wäre daher ganz überflüssig, zum Lobe des vorliegenden Werkes hier Näheres anzuführen; denn der Name seines Verfassers leistet für seinen Werth hinreichende Bürgschaft. Nur in Beziehung auf die vorliegende deutsche Bearbeitung wollen wir bemerken, daſs es uns nöthig geschienen hat, einige wesentliche Punkte weiter auszuführen, als es im Originale, welches den Titel: »Recherches sur la Probabilité des Jugements en matière criminelle et en matière civile, Paris 1837« führt, geschehen ist, um so das Werk zu einem Lehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung abzurunden. Man wird es auch natürlich finden,

dass wir über eine der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der mittleren Beobachtungsresultate, die eigene Arbeit Poisson's hinzugefügt haben; denn obgleich die Gauß'sche Behandlung desselben Gegenstandes, sowohl in theoretischer, als in praktischer Hinsicht, alles übertrifft, so hat Poisson's Darstellungsweise doch ihrerseits Interesse genug, um hier mitgetheilt zu werden.

Vorrede des Verfassers.

Die Erscheinungen jeglicher Art sind einem allgemeinen Gesetze unterworfen, welches man das »Gesetz der großen Zahlen« nennen kann. Es besteht darin, daſſ, wenn man sehr große Anzahlen von Erscheinungen derselben Art beobachtet, welche von constanten und von unregelmäßig veränderlichen Ursachen abhängen, die aber nicht progressiv veränderlich sind, sondern bald in dem einen und bald in dem andern Sinne; man zwischen diesen Zahlen Verhältnisse findet, welche fast unveränderlich sind. Diese Verhältnisse haben bei jeder besondern Art von Erscheinungen einen speciellen Werth, welchem sie sich immer mehr nähern, je größer die Anzahl der beobachteten Erscheinungen wird, und welchen sie in aller Strenge erreichen würden, wenn die Reihe der Beobachtungen in's Unendliche fortgesetzt werden könnte. Je nachdem die unregelmäßig veränderlichen Ursachen in weitere oder engere Grenzen eingeschlossen sind, sind auch mehr oder weniger große Anzahlen zu beobachtender Erscheinungen erforderlich, wenn ihre Verhältnisse fast constant werden sollen. Die Beobachtung selbst lehrt bei jeder Art von Erscheinungen, ob die Reihe der Beobachtungen hinreichend weit fortgesetzt ist, und der Calcul gibt nach den Anzahlen der beobachteten Erscheinungen und der Größe der Unterschiede, welche noch zwischen ihren Verhältnissen stattfinden, zuverlässige Regeln an die Hand, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daſſ der specielle Werth, gegen welche diese Verhältnisse convergiren, zwischen beliebig enge Grenzen eingeschlossen ist. Wenn man neue Beobachtungen anstellt, und findet, daſſ sich dieselben Verhältnisse von ihrem, durch die frühern Beobachtungen bestimmten Endwerthe merklich entfernen, so kann man daraus schließen, daſſ die Ursachen,

von denen die beobachteten Erscheinungen abhängen, innerhalb dieser beiden Reihen von Beobachtungen eine progressive, oder selbst eine plötzliche Veränderung erfahren haben. Ohne Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung würde man jedoch leicht Gefahr laufen können, sich hinsichtlich der Nothwendigkeit dieses Schlusses zu irren; allein die Rechnung lässt in dieser Beziehung keinen Zweifel übrig und gibt uns auch die erforderlichen Regeln an die Hand, die Wahrscheinlichkeit der Veränderung der Ursachen, welche sich aus der Vergleichung der zu verschiedenen Zeiten angestellten Beobachtungen ergibt, zu bestimmen.

Dieses Gesetz der großen Zahlen findet auch in den Erscheinungen statt, welche wir dem bloßen Zufalle zuschreiben, weil wir ihre Ursachen nicht kennen, oder weil sie zu complicirt sind. In den Spielen z. B., wo die Umstände, welche das Herauskommen einer Karte, einer Nummer, oder das Fallen eines Würfels auf eine gewisse Seite bestimmen, ins Unendliche veränderlich sind, und keiner Rechnung unterworfen werden können, wiederholen sich die einzelnen Fälle dennoch nach bestimmten Verhältnissen, wenn die Reihe der Versuche weit genug fortgesetzt wird. Ferner, wenn man nach den Regeln eines Spieles die respectiven Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Fälle hat berechnen können, so findet man bei vielen wiederholten Versuchen, dass sie in den durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung angegebenen Verhältnissen stattfinden. Aber bei den meisten Untersuchungen über ungewisse Ereignisse ist die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ereignisse nicht a priori möglich, und sie müssen im Gegentheil erst aus den Resultaten der Beobachtung abgeleitet werden. So würde sich z. B. die Wahrscheinlichkeit des Verlustes eines Schiffes, auf einer langen Seereise nicht zum Voraus berechnen lassen, und man bestimmt sie daher durch die Vergleichung der Anzahl der beobachteten Schiffbrüche mit der Anzahl der Seereisen. Wenn die Anzahl der betrachteten Seereisen sehr groß ist, so ist das Verhältniss der Anzahl der Schiffbrüche zu der der Seereisen fast unveränderlich, wenigstens für jedes Meer und jede Nation insbesondere, und der Werth dieses Verhältnisses kann folglich für die Wahrscheinlichkeit künftiger Schiffbrüche angenommen werden. Auf diese natürliche Folgerung aus dem Gesetze der großen Zahlen gründen sich die Seeassecuranzen. Wenn der Versicherer der Schiffe nur eine geringe Anzahl von Versicherungsverträgen einginge, so wäre es gerade so, als wenn er sich auf eine Wette einließe, auf deren Erfolg er nicht mit Sicherheit rechnen könnte.

Wenn er aber eine sehr große Anzahl solcher Versicherungscontracte abschließt, so ist der Erfolg seiner Speculation fast völlig gewiss.

Dasselbe Gesetz der großen Zahlen herrscht auch in den Erscheinungen, welche durch bekannte Kräfte in Verbindung mit zufälligen Ursachen von unregelmäßigen Wirkungen hervorgebracht werden. Das successive Steigen und Fallen der Gewässer des Meeres in den Häfen und an den Küsten bietet ein merkwürdiges Beispiel hiervon dar. Wenn man aus einer sehr großen Anzahl an demselben Orte über die Ebbe und Fluth angestellter Beobachtungen die arithmetischen Mittel nimmt, so findet man, dass sie den Gesetzen der Ebbe und Fluth, welche von der Anziehung des Mondes und der Sonne herrührt, fast conform sind, ungeachtet der Veränderungen, welche die Winde hervorbringen, und welche bei einzelnen oder einer kleinen Anzahl von Beobachtungen die Gesetze der Erscheinung ganz aufheben würden. Man findet dieselben Resultate, als wenn die zufälligen Winde gar keinen Einfluss auf die Erscheinungen hätten, und der Einfluss, welchen die Winde auf die Ebbe und Fluth haben, die während eines Theiles des Jahres nach derselben Richtung wehen, ist noch nicht bestimmt. Die im Anfange und am Ende des letzten Jahrhundertes aus den Beobachtungen abgeleiteten mittlern Resultate haben nur kleine Unterschiede gezeigt, welche man Localveränderungen zuschreiben kann.

Als ein Beispiel des Gesetzes der großen Zahlen können wir auch die mittlere Dauer des menschlichen Lebens anführen. Unter einer beträchtlichen Anzahl von Kindern, welche in derselben Gegend und fast zu derselben Zeit geboren sind, sterben viele in der frühesten Jugend, andere erreichen ein höheres Alter, und wieder andere die menschliche Lebensgrenze. Aber ungeachtet dieser großen Verschiedenheiten der Alter, in welchen die einzelnen Menschen sterben, ist doch die mittlere Lebensdauer, d. h. der Quotient, welchen man erhält, wenn man die Summe aller Alter durch ihre Anzahl dividirt, vorausgesetzt, dass diese Anzahl hinreichend groß ist, fast constant. Diese mittlere Lebensdauer kann für beide Geschlechter in verschiedenen Ländern und zu verschiedenen Zeiten verschieden sein, weil sie von dem Klima und ohne Zweifel auch von dem Wohlstande der Nationen abhängt. Sie nimmt zu, wenn eine bisher herrschend gewesene Krankheit verschwindet, wie z. B. die Blattern durch das Einimpfen, und in allen diesen Fällen lehrt uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ob die in der mittlern Lebensdauer des Menschen beobachteten Veränderungen groß genug sind, und aus einer hinreichend großen Anzahl von Beob-

achtungen folgen, dass man sie irgend einer Veränderung in den allgemeinen Ursachen zuschreiben kann.

Das Verhältniss zwischen der Anzahl der männlichen und weiblichen Geburten hat in einem großen Lande ebenfalls einen constanten Werth, welcher nicht von dem Klima abzuhängen, aber für die ehlichen und unehlichen Geburten verschieden zu sein scheint, wofür man sich freilich bis jetzt noch keinen auch nur einigermaßen wahrscheinlichen Grund hat angeben können.

Die Constitution der Naturkörper, welche aus einzelnen, durch von panderabeler Materie leere Zwischenräume getrennten Moleculen bestehen, bieten ebenfalls eine besondere Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen dar. Wenn man von einem innerhalb eines Körpers genommenen Punkte nach einer bestimmten Richtung eine gerade Linie zieht, so ist die Entfernung dieses Punktes von dem ersten Molecule, auf welches die gerade Linie trifft, zwar in allen Richtungen sehr klein, kann sich aber mit der Richtung in einem sehr großen Verhältnisse verändern, und nach der einen Richtung **10, 20, 100** mal größer sein, als nach der andern. Die Vertheilung der Molecule kann um jeden Punkt herum sehr unregelmäßig und von einem Punkte zum andern sehr verschieden sein. Sie ändert sich sogar fortwährend in Folge der Schwingungen der Molecule; denn ein in Ruhe befindlicher Körper ist nichts anderes, als ein System von Moleculen, welche beständige Schwingungen machen, deren Amplituden außerordentlich klein, aber mit den gegenseitigen Entfernungen der Molecule sehr wohl vergleichbar sind. Wenn man nun jeden sehr kleinen Theil des Volumens eines Körpers durch die Anzahl der darin enthaltenen Molecule, welche Anzahl wegen der äußersten Kleinheit der Molecule sehr groß sein wird, dividirt, und aus dem Quotienten die Cubikwurzel zieht; so erhält man den mittlern gegenseitigen Abstand der Molecule, welcher von ihrer unregelmäßigen Vertheilung unabhängig und in der ganzen Ausdehuung eines homogenen Körpers, der überall dieselbe Temperatur hat, und abgesehen von der ungleichen Zusammendrückung seiner Theilchen durch ihr eigenes Gewicht, constant ist. Auf Betrachtungen dieser Art gründet sich die Berechnung der Molecularkräfte und der innern Wärmestrahlung der Körper, wie wir sie an andern Orten mitgetheilt haben.

Diese verschiedenen Beispiele des Gesetzes der großen Zahlen sind alle aus der physischen Welt genommen, und wir könnten deren, wenn es nöthig wäre, noch mehr anführen; aber auch aus der moralischen Welt lassen sich leicht solche Beispiele an-

führen. Hierher gehören z. B. die indirecten Abgaben, welche, wenn auch nicht jährlich, so doch für wenige auf einander folgende Jahre immer dieselbe Summe geben. Ein anderes Beispiel bieten die Gerichtskosten dar, welche der Staatscasse jährlich fast dieselbe Summe zuführen, obgleich sie von der Anzahl und Wichtigkeit der Processe, d. h. von den entgegengesetzten und veränderlichen Interessen der Bürger und von ihrer größern oder geringern Processsucht, abhängen. Hierher gehören auch die fast constanten Summen, welche die Lotterien und die öffentlichen Spiele abwerfen. Bei diesen Spielen kommen zwei verschiedene Arten constanter Zahlen vor, nämlich die Summe der Einsätze während eines Jahres, oder während jeder Periode von einer kleinen Anzahl von Jahren, und der Gewinn des Banquiers, welcher jener Einsatzsumme fast proportional ist. Diese Proportionalität ist eine natürliche Wirkung des Zufalles, welcher die dem Banquier günstigen und nach den Regeln des Spieles zum Voraus berechenbaren Fälle in einem constanten Verhältnisse herbeiführt; aber die constante Summe der Einsätze ist eine der moralischen Welt angehörige Erscheinung, weil die auf's Spiel gesetzten Summen zugleich von der Anzahl und dem Willen der Spieler abhängen. Diese beiden Elemente, nämlich der constante Gewinn des Banquiers und die constante Summe der Einsätze dürfen nur wenig veränderlich sein, weil sonst der Pächter dieser Spiele nicht zum Voraus berechnen könnte, wieviel er nach den Gewinnen früherer Jahre der Regierung jährlich zu zahlen im Stande ist.

Auch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Entscheidungen in Criminal- und Civilprocessen bietet peremtorische Beispiele der Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen auf Erscheinungen der moralischen Welt dar, und wir werden z. B. sehen, dass sich das Verhältniss der Anzahl der jährlich Verurtheilten zu der der Angeklagten unter derselben Gesetzgebung und für ganz Frankreich von einem Jahre zum andern wenig geändert hat, so dass man ungefähr nur 7000 Fälle als die Anzahl der jährlich von den Geschworenengerichten ausgesprochenen Urtheile zu betrachten braucht, wenn dieses Verhältniss fast constant bleiben soll, während bei andern Untersuchungen, z. B. bei der über die weiter oben angeführte mittlere Lebensdauer, eine solche Anzahl von Fällen bei weitem noch nicht hinreichend wäre, um ein constantes Verhältniss zu erhalten. Bei dieser Untersuchung sieht man auch augenfällig, welchen Einfluss allgemeine Ursachen auf das in Rede stehende Verhältniss haben, welches sich jedesmal mit der Gesetzgebung geändert hat.

Es ist also nicht zu bezweifeln, dass das Gesetz der großen Zahlen auch auf moralische Erscheinungen anwendbar ist, welche von dem Willen des Menschen, seinen Interessen, seinen Einsichten und seinen Leidenschaften abhängen. Denn es kommt hierbei nicht auf die Natur der Ursachen, sondern vielmehr auf die Veränderung ihrer einzelnen Wirkungen und auf die Anzahlen der Fälle an, welche man in Betracht ziehen muss, damit sich die Unregelmäßigkeiten der beobachteten Erscheinungen in den mittlern Resultaten ausgleichen. Aber man muss in dieser Beziehung nicht glauben, dass die Wirkungen des freien Willens, der Verblendung der Leidenschaften und des Mangels an Einsicht sich nach einem größern Maßstabe ändern, als das menschliche Leben von dem bei der Geburt sterbenden Kinde bis zu dem 100 jährigen Greise, dass sie schwieriger vorherzusehen seien, als die Umstände, welche den Untergang eines Schiffes auf einer langen Seereise veranlassen, und capriciöser, als der Zufall, welcher das Treffen einer Karte oder einer Fläche des Würfels bewirkt. Nicht die Begriffe, welche wir mit diesen Ursachen und ihren Wirkungen verbinden, sind es, sondern vielmehr die Rechnung und Beobachtung sind es, welche die wahrscheinlichen Grenzen ihrer Veränderungen bei sehr großen Anzahlen von Versuchen allein bestimmen können.

Nach diesen Beispielen so verschiedener Art betrachten wir das allgemeine Gesetz der großen Zahlen als ein unbestreitbares Factum der Erfahrung, welche nie trügt. Da dieses Gesetz ferner die Grundlage aller Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, so begreift man leicht, dass auch sie von der Natur der Gegenstände, worauf man sie anwenden will, unabhängig ist, sie mögen übrigens aus der physischen, oder aus der moralischen Welt sein, wofern wir nur bei jeder Untersuchung die erforderlichen Beobachtungsdata in den Händen haben. Wegen der Wichtigkeit des Gesetzes der großen Zahlen war es aber nothwendig, es direct zu beweisen, und wir glauben diesen Zweck endlich erreicht zu haben, wie man im Verlaufe dieses Werkes sehen wird. Das Theorem von Jacob Bernoulli fällt in dem besondern Falle, wo die Wahrscheinlichkeiten der Erscheinungen während der Versuchsreihen constant bleiben, wie es der Beweis des Erfinders nothwendig voraussetzt, über den er bekanntlich 20 Jahre hindurch nachgedacht hat, mit dem Gesetze der großen Zahlen zusammen. Dieses Bernoullische Theorem war daher bei Untersuchungen über die Wiederholung moralischer oder physischer Erscheinungen, deren Wahrscheinlichkeiten im Allgemeinen fortwährend veränderlich und

meistens ganz unregelmäßig veränderlich sind, unzulänglich, und wir waren daher genöthigt, die Untersuchung auf eine allgemeinere und vollständigere Weise anzustellen, als es der Zustand der mathematischen Analysis zu Bernoulli's Zeiten gestattete. Wenn man diese Unveränderlichkeit der Verhältnisse betrachtet, welche zwischen der Anzahl von Malen, in welchen ein Ereigniß eintritt, und den sehr großen Anzahlen von Versuchen, ungeachtet der Veränderungen der Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse während der Dauer der Versuche stattfindet; so könnte man geneigt sein, diese so merkwürdige Regelmäßigkeit der beständigen Wirkung einer geheimen Ursache zuzuschreiben; allein die Theorie der Wahrscheinlichkeiten zeigt, daß die Unveränderlichkeit dieser Verhältnisse der Normalzustand der Dinge in der physischen und moralischen Welt ist, welcher von selbst und ohne Hülfe einer fremden Ursache stattfindet, deren Wirkung im Gegentheil selbst nur durch eine andere ähnliche Ursache aufgehoben werden könnte.

Wir haben nun noch über den Gegenstand des fünften Kapitels einige Worte zu sagen. Der Zweck dieser Untersuchung besteht darin, für Geschworenengerichte, welche aus einer bestimmten Anzahl von Geschworenen bestehen, die bei einer ebenfalls bestimmten Stimmenmehrheit urtheilen, in einer sehr großen Anzahl von Fällen das Verhältniß der sehr wahrscheinlich stattfindenden Freisprechungen und Verurtheilungen, sowie die Wahrscheinlichkeit der Unrichtigkeit eines zufällig unter den von diesen Geschworenengerichten gefällten Urtheilen herausgehobenen Urtheiles zu berechnen. Die Bestimmung der Unrichtigkeit eines verdammenden oder freisprechenden Urtheiles in einem bestimmten einzelnen Falle würde unmöglich sein, wofern man die Rechnung nicht auf willkürliche Voraussetzungen basiren will, welche zu sehr verschiedenen und fast beliebigen Resultaten führen können, je nach der Beschaffenheit der gemachten Voraussetzungen. Für die Sicherheit der Gesellschaft und für die, welche man dem Angeklagten schuldig ist, ist nicht die Kenntniß dieser Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf ein einzelnes besonderes Urtheil von Wichtigkeit, sondern die Kenntniß dieser Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf die Gesammtheit der in einem oder mehreren Jahren von den Assisenhöfen gefällten Urtheile, und welche sich aus der Beobachtung und der Rechnung ergibt. Die Wahrscheinlichkeit der Unrichtigkeit eines beliebigen Verdammungsurtheiles, mit der Wahrscheinlichkeit, daß es stattfinden wird, multiplicirt, ist das wahre Maß der Gefahr, welcher die Gesellschaft die unschuldig Angeklagten aussetzt,

und das Product aus der Wahrscheinlichkeit der Unrichtigkeit eines freisprechenden Urtheiles, und der Wahrscheinlichkeit, dass es ausgesprochen werden wird, ist ebenso das Maß der Gefahr, welcher die bürgerliche Gesellschaft ausgesetzt ist, und welche man ebenfalls kennen muss, weil es die Größe dieser Gefahr ist, welche allein die etwaige Verurtheilung eines Unschuldigen rechtfertigen kann. In dieser wichtigen Untersuchung der Angelegenheiten der Menschheit und der öffentlichen Ordnung würden die analytischen Formeln, welche diese verschiedenen Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, durch nichts ersetzt werden können. Denn wenn es z. B. darauf ankäme, die Anzahl der Geschworenen eines Geschworenengerichtes zu verändern, oder zwei Länder, in welchen die Geschworenengerichte verschieden eingerichtet sind, mit einander zu vergleichen, wie könnte man ohne Hülfe dieser analytischen Formeln beurtheilen, ob ein z. B. aus 12 Geschworenen, die bei einer Stimmenmehrheit von wenigstens 8 gegen 4 urtheilen, bestehendes Geschworenengericht den Angeklagten oder der bürgerlichen Gesellschaft eine größere oder geringere Garantie gewährt, als ein anderes Geschworenengericht, welches z. B. aus 9 Geschworenen besteht, die aus derselben Liste als die vorigen genommen sind und bei irgend einer andern Stimmenmehrheit aburtheilen? Wie ließe sich entscheiden, ob die Einrichtung der Geschworenengerichte in Frankreich vor 1831, wo das Urtheil bei einer Stimmenmehrheit von wenigstens 7 Stimmen gegen 5 gefällt werden musste, und bei der kleinsten Stimmenmehrheit die Intervention der Richter stattfand, vortheilhafter oder nachtheiliger ist, als die gegenwärtige Einrichtung der französischen Geschworenengerichte, wo die Urtheile bei derselben kleinsten Stimmenmehrheit und der Berücksichtigung der Milderungsgründe gefällt werden?

Inhaltsverzeichniss.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 1. Die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses ist der Grund, welchen wir haben, zu glauben, dass es stattfinden wird, oder stattgefunden hat.

Die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses ist unter übrigens gleichen Umständen für den Fall, daß es stattfinden wird, oder stattgefunden hat, für uns dieselbe, obgleich beide Fälle an sich sehr verschieden sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass z. B. aus einer Urne mit einer bekannten Anzahl weißer und schwarzer Kugeln eine weiße gezogen werden wird, ist für uns dieselbe, als die, dass eine bereits gezogene Kugel, deren Farbe wir noch nicht kennen, eine weiße ist; denn wir haben offenbar in dem ersten und zweiten Falle denselben Grund, zu glauben, dass diese Kugel eine weiße ist.

Da die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses von unserer Kenntniss in Beziehung auf dasselbe abhängt, so kann sie bei demselben Ereignisse für verschiedene Personen verschieden sein. Wenn z. B. eine Person blos weiß, dass die eben erwähnte Urne weiße und schwarze Kugeln enthält, und wenn eine zweite Person außerdem weiß, dass mehr weiße, als schwarze Kugeln darin enthalten sind; so hat diese zweite Person mehr Grund, als die erste, zu glauben, dass eine weiße Kugel aus der Urne gezogen wird, oder mit andern Worten: der Zug der weißen Kugel hat für die zweite Person eine größere Wahrscheinlichkeit, als für die erste.

Hierin liegt der Grund, weshalb zwei Personen zuweilen über dasselbe Ereigniss entgegengesetzte Urtheile fällen, wenn sie in Beziehung auf dieses Ereigniss verschiedene Kenntnisse besitzen. Wenn A und B diese beiden Personen bezeichnen und A weiß Alles, was B bekannt ist und außerdem noch Einiges mehr, so muss das Urtheil der Person A

für das richtigere gehalten und ihre Meinung angenommen werden, wenn man zwischen den entgegengesetzten Urtheilen von A und B wählen muss, obgleich diese Meinung sich auf eine geringere Wahrscheinlichkeit stützen kann, als die von B, d. h. obgleich die Person A weniger Grund hat, ihre Meinung für die richtige zu halten, als B in Beziehung auf die ihrige.

Man muss daher im Allgemeinen eine abstracte Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit an sich, chance) und eine individuelle, subjective, sich auf eine bestimmte Person beziehende Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit schlechthin, probabilité) eines ungewissen Ereignisses unterscheiden. Gewöhnlich werden wir ohne Unterschied beide Arten von Wahrscheinlichkeiten durch das Wort »Wahrscheinlichkeit« ohne weitern Zusatz bezeichnen; aber wenn es nöthig sein wird, sie von einander zu unterscheiden, so werden wir uns des Ausdruckes »abstracte Wahrscheinlichkeit« bedienen, um die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses an sich und unabhängig von der Kenntniss, welche wir davon haben, zu bezeichnen, während der bloße Ausdruck »Wahrscheinlichkeit« immer die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses in Beziehung auf eine gewisse Person bezeichnen soll.

Z. B. in dem Spiele »Wappen oder Schrift« ist die abstracte Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Wappens und die für das Treffen der Schrift von der physischen Beschaffenheit des in die Luft geworfenen Münzstückes abhängig. Man kann es als physisch unmöglich betrachten, dass die eine dieser abstracten Wahrscheinlichkeiten der andern gleich sei; aber dennoch ist für uns die Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Wappens absolut dieselbe, als die für das Treffen der Schrift, wenn uns die physische Beschaffenheit des geworfenen Münzstückes unbekant ist, und wenn wir noch keine Versuche damit angestellt haben. Denn wir haben durchaus keinen Grund, zu glauben, dass das eine dieser beiden Ereignisse leichter stattfinden wird, als das andere. Dieses ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn mit dem Münzstücke bereits mehrere Versuche gemacht sind; denn die jeder Fläche des Münzstückes entsprechende abstracte Wahrscheinlichkeit ändert sich zwar nicht während der Versuche, aber wenn Jemand das Resultat der Versuche kennt, so ändert sich für ihn die Wahrscheinlichkeit des künftigen Treffens des Wappens oder der Schrift mit der Anzahl von Malen, welche diese Flächen bereits oben gelegen haben.

§. 2. Das Maß der Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses ist das Verhältniss der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle zu der Anzahl aller

möglichen, sowohl der günstigen, als ungünstigen Fälle, vorausgesetzt, dass sie alle gleich möglich sind oder dass sie alle dieselbe abstracte Wahrscheinlichkeit haben.

Dieser Satz bedeutet so viel: dass, wenn dieses Verhältniss für zwei Ereignisse gleich ist, wir denselben Grund haben, zu glauben, dass das eine, oder das andere stattfinden wird, und dass, wenn dieses Verhältniss für beide Ereignisse verschieden ist, wir mehr Grund haben, zu glauben, dass das Ereigniss stattfinden wird, für welches dieses Verhältniss am grössten ist.

Gesetzt z. B. eine Urne A enthalte 4 weiße und 6 schwarze Kugeln und eine andere B enthalte 10 weiße und 15 schwarze Kugeln, so ist das Verhältniss der Anzahl der dem Zuge einer weißen Kugel günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle für die erste Urne $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ und für die zweite $= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, d. h. für beide Urnen gleich groß, und es kommt zunächst darauf an, zu beweisen, dass die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der einen oder andern Urne gleich groß ist, so dass, wenn wir bei dem Zuge einer weißen Kugel irgend ein Interesse hätten, für uns durchaus kein Grund vorhanden wäre, lieber in die Urne A, als in die Urne B zu greifen.

In der That kann man sich die in der Urne B enthaltenen 25 Kugeln in 5 Gruppen getheilt denken, wovon jede aus 2 weißen und 3 schwarzen Kugeln besteht, und welche innerhalb dieser Urne in einer beliebigen Ordnung liegen. Zur Unterscheidung der Kugeln der einzelnen Gruppen kann man die der ersten Gruppe mit der Zahl 1, die der zweiten mit der Zahl 2 u. s. w. bezeichnen.

Um nun aus der Urne B eine weiße oder schwarze Kugel zu ziehen, muss man ganz zufällig in die eine dieser 5 Gruppen greifen; da sie aber alle gleich viele weiße und schwarze Kugeln enthalten, so folgt, dass man, statt die Gruppe, in welche man greift, zufällig zu wählen, nach Belieben wählen und z. B. annehmen kann, dass es die Gruppe ist, deren Kugeln mit der Zahl 1 bezeichnet sind, ohne dass die abstracte Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der Urne B dadurch geändert wird. Dieses heißt aber nichts anders, als zuerst alle, mit der Zahl 1 bezeichnete Kugeln aus der Urne B herausnehmen und sie in eine andere Urne C legen, aus welcher man alsdann zufällig eine Kugel zieht. Die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der Urne B ist also von der Anzahl der darin enthaltenen Gruppen unabhängig, und dieselbe, als wenn statt der 5 Gruppen nur eine einzige darin enthalten wäre. Theilt man die 10 in der Urne A enthaltenen Kugeln in 2 Gruppen, jede von 2 weißen und

3 schwarzen Kugeln, so ergibt sich ebenso, dass die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der Urne A dieselbe ist, als wenn diese Urne nur eine einzige dieser Gruppen enthielte. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weißen Kugel aus der Urne A, oder aus der Urne B dieselbe, als die des Zuges einer weißen Kugel aus einer dritten Urne C, welche nur 2 weiße und 3 schwarze Kugeln enthält, d. h. beide sind einander gleich, was zunächst bewiesen werden sollte.

Wir wollen nun annehmen, dass eine Urne A, 4 weiße und 3 schwarze und eine Urne B, 3 weiße und 2 schwarze Kugeln enthalte, so dass das Verhältniss der Anzahl der dem Zuge einer weißen Kugel günstigen Fälle zur Gesammtzahl aller gleich möglichen Fälle für die Urne $A = \frac{4}{7}$ und für die Urne $B = \frac{4}{5}$ ist. Da der zweite Bruch den ersten um $\frac{1}{35}$ an Größe übertrifft, so hat man auch mehr Grund zu glauben, dass aus der Urne B eine weiße Kugel gezogen wird, als aus der Urne A; denn bringt man diese beiden Brüche auf denselben Nenner, so verwandeln sie sich in $\frac{20}{35}$ und $\frac{21}{35}$. Nun ist aber nach dem eben Bewiesenen die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der Urne A dieselbe, als für eine Urne C, welche 35 Kugeln, nämlich 20 weiße und 15 schwarze enthielte; und ebenso ist die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der Urne B und aus einer Urne D, welche ebenfalls 35 Kugeln, nämlich 21 weiße und 14 schwarze, enthält, dieselbe. Da aber jede dieser Urnen C und D dieselbe Anzahl von Kugeln enthält, und D mehr weiße, als C; so hat man offenbar mehr Grund, zu glauben, dass man eher aus der Urne D eine weiße Kugel ziehen wird, als aus der Urne C, und folglich ist auch der Zug einer weißen Kugel aus der Urne B wahrscheinlicher, als der aus der Urne A, wodurch also der im Anfange dieses §. ausgesprochene Satz vollständig bewiesen ist.

Aus diesem Maße der Wahrscheinlichkeit scheint zu folgen, dass dieser Bruch immer eine commensurabele Größe sein muss; allein wenn die Anzahl aller möglichen und die der einem ungewissen Ereignisse günstigen Fälle unendlich groß ist, so kann seine Wahrscheinlichkeit oder das Verhältniss der zweiten Zahl zur ersten eine incommensurabele Größe sein. Gesetzt z. B., s wäre die Ausdehnung einer ebenen Fläche und σ die eines bestimmten Theiles derselben, so ist offenbar die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt einer kreisförmigen Scheibe, welche auf die Fläche s geworfen wird, auf einen Punkt von σ fällt, dem Verhältnisse $\sigma : s$, dessen Größen incommensurabel sein können, gleich.

§. 3. In den beiden Theilen des vorhergehenden Beweises haben wir beispielshalber bestimmte Anzahlen von Kugeln angenommen; aber es ist leicht einzusehen, dass unsere Schlüsse allgemein gültig und von

diesen besondern Zahlen unabhängig sind. Auch haben wir angenommen, dass das ungewisse Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit man batrachtet, der Zug einer weißen Kugel aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln sei, so dass die Anzahl der weißen Kugeln die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle und die Anzahl der schwarzen Kugeln die Anzahl der dem Ereignisse ungünstigen Fälle ausdrückt. Diese Voraussetzung kann man der leichteren Auffassung der Schlüsse wegen bei einem ungewissen Ereignisse jeder beliebigen Art immer machen. Wenn also E ein ungewisses Ereigniss einer beliebigen Art ist, a die Anzahl der seinem Stattfinden günstigen Fälle, b die Anzahl der ungünstigen Fälle und p die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E bezeichnet; so ist das Maß oder der Zahlenwerth dieser Wahrscheinlichkeit nach dem eben Bewiesenen:

$$p=\frac{a}{a+b}.$$

Ist ferner F das entgegengesetzte Ereigniss von E, so dass eins von diesen beiden Ereignissen nothwendig stattfinden muss, wie der Zug einer weißen oder der einer schwarzen Kugel in den vorhergehenden Beispielen, und man bezeichnet die Wahrscheinlichkeit von F mit q; so hat man auch:

$$q=\frac{b}{a+b},$$

weil die dem Ereignisse E ungünstigen Fälle, deren Anzahl $=b$ ist, die günstigen Fälle für das Ereigniss F sind. Hieraus folgt:

$$p+q=1,$$

d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeiten zwei entgegengesetzter Ereignisse, wie wir sie eben definirt haben, ist immer der Einheit gleich.

Wenn wir nicht mehr Grund haben, das Stattfinden von E zu glauben, als das von F, so sind die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden ungewissen Ereignisse einander gleich, und man hat folglich $p=q=\frac{1}{2}$. Dieses ist der Fall, wenn man ein Münzstück zum ersten Male in die Luft wirft, dessen physische Constitution uns unbekannt ist, wo E alsdann das Obenhinfallen der einen der beiden Flächen und F das der andern ist. Statt eines Ereignisses, welches stattfinden muss, oder nicht, kann E auch ein beliebiges Ereigniss sein, wobei es darauf ankommt, zu wissen, ob es wahr oder falsch ist. Alsdann ist a die Zahl der Fälle, in welchen wir es für wahr halten und b die Anzahl der Fälle, in welchen wir es für nicht wahr halten; p drückt alsdann die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit von E und q die der Unwahrheit aus.

Wenn es gewiſſ iſt, daſſ a und b wirklich die Anzahlen der den beiden entgegengeſetzten Ereigniſſen E und F günſtigen und ungünſtigen Fälle ausdrücken, ſo ſind die Brüche p und q die abſtracten Wahrſcheinlichkeiten von E und F; aber wenn die Beſtimmung der Zahlen a und b blos nach unſern Kenntniſſen in Beziehung auf dieſe beiden ungewiſſen Ereigniſſe ſtattgehabt hat, ſo ſind p und q nur ihre Wahrſcheinlichkeiten und können, wie weiter oben gezeigt worden, von ihren unbekannten abſtracten Wahrſcheinlichkeiten verſchieden ſein. Dieſe günſtigen oder ungünſtigen Fälle müſſen übrigens ſowohl an und für ſich, als nach dem, was wir davon wiſſen, gleich möglich ſein.

§. 4. Die Gewiſſheit wird in der Wahrſcheinlichkeitstheorie als ein beſonderer Fall der Wahrſcheinlichkeit betrachtet, nämlich als der, wo für ein ungewiſſes Ereigniſſ kein ungünſtiger Fall oder keine entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit vorhanden iſt. Sie wird in der Rechnung durch die Einheit ausgedrückt, die völlige Unentſchiedenheit unſeres Geiſtes bei der Wahl zwiſchen zwei entgegengeſetzten Ereigniſſen durch $\frac{1}{2}$ und die Unmöglichkeit durch o. Dieſer Begriff der Gewiſſheit iſt für uns hier hinreichend, und wir brauchen ſie nicht an und für ſich und auf eine abſolute Weiſe zu definiren, was übrigens auch unmöglich ſein würde; denn die abſolute Gewiſſheit gehört zu den Dingen, die man nicht definiren, ſondern wovon man blos Beiſpiele anführen kann. Unter den Ereigniſſen, welche man gewiſſ nennt, gibt es nur eine ſehr kleine Anzahl, welche es in aller Strenge ſind, wie z. B. unſere eigene Exiſtenz, einige nicht blos gewiſſe, ſondern an und für ſich einleuchtende Grundſätze und gewiſſe andere Sätze, wie z. B. die Lehrſätze der Geometrie, deren Wahrheit man entweder direct beweiſ't, oder wovon man beweiſ't, daſſ das Gegentheil unmöglich iſt. Dagegen haben die Ereigniſſe, welche den allgemeinen Geſetzen der Natur nicht zuwiderlaufen und durch viele Zeugniſſe beſtätigt werden, ſo wie die, welche durch die tägliche Erfahrung beſtätigt werden, nur eine ſehr ſtarke Wahrſcheinlichkeit, welche groß genug iſt, daſſ man ſie ſowohl in dem gewöhnlichen Leben als ſelbſt in den phyſiſchen und hiſtoriſchen Wiſſenſchaften nicht von der abſoluten Gewiſſheit zu unterſcheiden braucht.

Es iſt der Zweck der Wahrſcheinlichkeitsrechnung, bei jeder Unterſuchung über ungewiſſe oder zweifelhafte Ereigniſſe das Verhältniſſ der Anzahl der dem Stattfinden eines ungewiſſen Ereigniſſes, oder der Wahrheit deſſelben, günſtigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle zu beſtimmen, ſo daſſ wir nach der Größe des ſich der Einheit mehr oder weniger nähernden Bruches, welcher dieſes Verhältniſſ ausdrückt, den Grund beurtheilen oder abſchätzen können, welcher für uns zu der

Annahme vorhanden ist, daſſ das fragliche Ereigniſſ stattgefunden hat, oder stattfinden wird, oder wahr ist, und daſſ wir auch auf eine ganz zuverläſſige Weise diesen Grund der Annahme für das Stattfinden eines ungewiſſen Ereigniſſes mit dem für ein ganz anderes ungewiſſes Ereigniſſ vorhandenen vergleichen können. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gründet sich auf eine kleine Anzahl von Grundregeln, welche sich in aller Strenge beweisen laſſen, wie wir oben in §. 2. an einem Beispiele gesehen haben. Diese Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung müſſen als ein nothwendiges Supplement der Logik betrachtet werden, weil es eine sehr große Anzahl von Untersuchungen gibt, worin wir durch logische Schlüſſe nicht zur völligen Gewiſſheit gelangen können. Kein Theil der mathematischen Wiſſenschaften ist so vieler und unmittelbar nützlicher Anwendungen fähig, als die Wahrscheinlichkeitsrechnung, und wir werden im zweiten Kapitel dieses Werkes sehen, daſſ sie sich auch auf die abstracten Streitfragen der allgemeinen Philosophie erstreckt, wovon sie eine klare und unbestreitbare Auflösung gibt.

§. 5. Wenn p und p' die Wahrscheinlichkeiten zweier von einander unabhängiger Ereigniſſe E und E' sind, so wird die Wahrscheinlichkeit ihres Zugleichstattfindens oder des aus beiden zusammengesetzten Ereigniſſes durch das Product pp' ausgedrückt.

Denn wir wollen annehmen, das Ereigniſſ E bestehe in dem Zuge einer weißen Kugel aus einer Urne A, welche c Kugeln, nämlich a weiße und $c-a$ schwarze enthält, und das Ereigniſſ E' bestehe in dem Zuge einer weißen Kugel aus einer andern Urne A', welche c' Kugeln enthält, worunter sich a' weiße und $c'-a'$ schwarze befinden; so werden nach dem Vorhergehenden die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereigniſſe E und E' resp. ausgedrückt durch:

$$p=\frac{a}{c},\ p'=\frac{a'}{c'},$$

und das zusammengesetzte Ereigniſſ besteht alsdann darin, aus der Urne A und aus der Urne A' zu gleicher Zeit eine weiße Kugel zu ziehen. Wenn man aber aus jeder dieser beiden Urnen ganz zufällig eine Kugel zieht, so kann jede Kugel von A mit jeder Kugel der Urne A' zugleich gezogen werden, so daſſ die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle $=cc'$ ist. Unter allen diesen Fällen sind die dem zusammengesetzten Ereigniſſe günstig, welche aus allen Verbindungen jeder weißen Kugel der Urne A mit jeder weißen Kugel der Urne A' bestehen, und die Anzahl dieser günstigen Fälle wird folglich durch das Product aa' ausgedrückt. Folglich wird die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Er-

eignisses nach §. 2. durch das Verhältniss $\frac{aa'}{cc'}$, oder was dasselbe ist, durch das Product der beiden Brüche p und p' ausgedrückt.

Ebenso ergibt sich, dass, wenn $p, p', p'', \ldots$ die resp. Wahrscheinlichkeiten einer beliebigen Anzahl von einander unabhängiger Ereignisse $E, E', E'', \ldots$ sind, die Wahrscheinlichkeit ihres Zugleichstattfindens, oder eines aus allen diesen Ereignissen zusammengesetzten Ereignisses durch das Product $pp'p'' \ldots$ ausgedrückt wird. Dieser allgemeine Fall lässt sich auch aus dem besondern Falle ableiten, wo das zusammengesetzte Ereigniss nur aus zwei, von einander unabhängigen Ereignissen besteht. Denn wenn das Product pp' die Wahrscheinlichkeit für das Zugleichstattfinden der Ereignisse E und E' ist, so wird die Wahrscheinlichkeit des Zugleichstattfindens dieses zusammengesetzten Ereignisses und des Ereignisses E'' ebenso durch das Product aus pp' und p'', d. h. durch $pp'p''$ ausgedrückt. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit für das Zugleichstattfinden dieses zweiten zusammengesetzten Ereignisses und des Ereignisses E''' dem Producte aus $pp'p''$ und p''', d. h. $pp'p''p'''$ gleich, u. s. f.

Da die Brüche $p, p', p'', \ldots$ alle kleiner sind, als die Einheit, wenigstens, wenn keins der Ereignisse $E, E', E'', \ldots$ gewiss ist; so folgt, dass die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses kleiner ist, als die Wahrscheinlichkeit jedes der Ereignisse, woraus es zusammengesetzt ist. Sie nimmt desto mehr ab, je mehr die Anzahl der einzelnen Ereignisse zunimmt, und sie würde im Allgemeinen völlig Null oder unendlich klein sein, wenn diese Anzahl unendlich groß würde. Hiervon findet nur eine Ausnahme statt, wenn die unendliche Reihe der Wahrscheinlichkeiten $p, p', p'', \ldots$ aus Gliedern besteht, welche sich der Einheit oder der Gewissheit ohne Ende nähern, und in diesem Falle hat ihr Product einen endlichen Werth, welcher kleiner ist, als die Einheit. Wenn z. B. α eine positive Größe bezeichnet, welche kleiner ist, als die Einheit, oder höchstens ihr gleich, und man nimmt:

$$p = \alpha, \; p' = 1 - \alpha^2, \; p'' = 1 - \frac{\alpha^2}{4}, \; p''' = 1 - \frac{\alpha^2}{9}, \ldots$$

für die Werthe von $p, p', p'', \ldots$; so ist ihr Product oder die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses nach einer bekannten Formel $= \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi$, wo π, wie gewöhnlich, das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet.

§. 6. Zur Erläuterung der vorhergehenden Regel für die Bestim-

stimmung der Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses wollen wir folgendes Beispiel wählen:

Es sind zwei zufällig gewählte, aus derselben Anzahl von Ziffern bestehende Zahlen unter einander geschrieben, man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass man bei der Subtraction der untern Zahl von der obern niemals eine Ziffer der obern Zahl um eine nächst höhere Einheit zu vermehren, oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, zu borgen braucht.

Jede der in der obern und untern Zahl einander correspondirenden Ziffern kann 10 verschiedene Werthe, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 haben, und folglich können bei jeder Partialsubtraction 100 verschiedene und gleichmögliche Fälle stattfinden. Soll nun diese Partialsubtraction ohne Vermehrung der obern Ziffer oder ohne Borgen möglich sein, so muss diese die untere Ziffer übertreffen, oder ihr gleich sein, was in 55 der 100 verschiedenen Fälle stattfindet, nämlich in einem Falle, wenn die obere Ziffer 0 ist, in zwei Fällen, wenn sie 1 ist, ... und in 10 Fällen, wenn sie 9 ist, welche Werthe eine arithmetische Progression von 10 Gliedern bilden, deren Summe $=\frac{1}{2}.10(1+10)=55$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei irgend einer Partialsubtraction nicht zu borgen braucht, wird also durch $\frac{55}{100}$ ausgedrückt, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich alle Partialsubtractionen ohne Borgen verrichten lassen $=(0,55)^i$, wo i ihre Anzahl oder die Anzahl der Ziffern der obern oder untern Zahl bezeichnet.

Wenn die von einander zu subtrahirenden Zahlen z. B. die Mantissen zweier, aus den 7stelligen Logarithmentafeln genommenen Logarithmen sind, so ist:

$$i=7,\ (0,55)^i=(0,55)^7=0,0152243,$$

d. h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt zwischen $\frac{1}{66}$ und $\frac{1}{65}$.

Auch die Wahrscheinlichkeit, dass man, indem man zwei $i$ziffrige Zahlen zusammenaddirt, niemals etwas im Sinne zu behalten braucht bei jeder der einzelnen Partialadditionen, ist $=(0,55)^i$.

§. 7. Wenn die Ereignisse $E, E', E'', \ldots$ das successive Stattfinden desselben Ereignisses E sind, und ihre Anzahl ist $=m$, so verwandelt sich das Product $p\,p'\,p'' \ldots$ in die Potenz p^m, welche folglich die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass das Ereigniss E bei m Versuchen, während welcher die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses constant und $=p$ bleibt, $m$mal stattfindet. Desgleichen, wenn E und F zwei entgegengesetzte Ereignisse sind, deren Wahrscheinlichkeiten durch p und q ausgedrückt werden, so dass $p+q=1$ ist (§. 3.), und diese Wahrscheinlichkeiten bleiben während $m+n$ Versuchen constant; so drückt das

Product $p^m q^n$ die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ das Ereigniſſ E, m mal und das Ereigniſſ F, n mal in einer bestimmten Ordnung stattfindet, was sich aus der Regel in §. 5. ergibt, wenn man die Anzahl der Ereignisse $E, E', E'', \ldots$ gleich $m+n$ und für m derselben das Ereigniſſ E, aber für die n übrigen das Ereigniſſ F nimmt. Die Ordnung, in welcher diese Ereignisse E und F auf einander folgen sollen, hat auf die Wahrscheinlichkeit $p^m q^n$ des zusammengesetzten Ereignisses keinen Einfluſſ; sie ist dieselbe, wenn das Ereigniſſ E in den m ersten und das Ereigniſſ F in den n letzten Versuchen, oder umgekehrt stattfinden, oder endlich, wenn diese Ereignisse auf eine bestimmte Weise mit einander gemengt stattfinden sollen. Aber wenn die Ordnung, in welcher die Ereignisse E und F stattfinden sollen, nicht bestimmt ist, und in den $m+n$ Versuchen, das Ereigniſſ E nur m mal und das Ereigniſſ F, n mal in einer beliebigen Ordnung stattfinden sollen; so ist klar, daſſ die Wahrscheinlichkeit dieses andern zusammengesetzten Ereignisses größer ist, als die, welche einer bestimmten Ordnung in der Aufeinanderfolge der Ereignisse E und F entspricht, und sie ist in der That ein Vielfaches von $p^m q^n$, wovon später der allgemeine Ausdruck angegeben werden wird.

Wenn die Wahrscheinlichkeiten von E und F einander gleich sind, so ist $p=q=\frac{1}{2}$, und wenn man $m+n=\mu$ setzt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſſ das Ereigniſſ E, m mal und das Ereigniſſ F, n mal in einer bestimmten Ordnung bei den μ Versuchen statfindet, $=(\frac{1}{2})^\mu$, so daſſ sie nicht blos von der Ordnung, in welcher die Ereigniße E und F stattfinden, unabhäng ist, sondern auch von den Anzahlen der Fälle, in welchen sie stattfinden, und nur noch von der Gesammtzahl μ der Versuche abhängt. Dieses ist der Fall bei einer Urne, welche gleich viel weiße und schwarze Kugeln enthält, und woraus μ successive Ziehungen gemacht werden, indem man die gezogene Kugel jedesmal wieder hineinlegt. Die Wahrscheinlichkeit, μ weiße Kugeln zu ziehen, ist alsdann der, m weiße und n schwarze in einer bestimmten Ordnung zu ziehen, gleich. Wenn μ eine sehr große Zahl ist, so sind diese beiden Wahrscheinlichkeiten sehr klein; aber die eine nicht kleiner, als die andere. Vor dem Beginnen der Ziehungen wäre kein Grund für die Annahme vorhanden, daſſ eher eine Reihe Kugeln von derselben Farbe, als eine gleich große Anzahl weißer und schwarzer Kugeln in einer willkürlich bestimmten Ordnung gezogen werden. Wenn wir daher sehen, daſſ z. B. 30 Kugeln von derselben Farbe aus der Urne gezogen werden, und wir wiſſen gewiſſ, daſſ sie stets dieselbe Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält, oder wenn wir irgend ein anderes Ereigniſſ beobachten, welches eine gewiſſe Symmetrie darbietet, so

dass z. B. 30mal abwechselnd eine weiße und eine schwarze Kugel, oder jedesmal 15 weiße und dann wieder 15 schwarze Kugeln gezogen werden; so sind wir zu der Annahme berechtigt, dass diese regelmäßigen Erscheinungen nicht die Wirkung des Zufalles sind, sondern dass die Person, welche die 30 Kugeln gezogen hat, die Farbe jeder derselben gekannt und absichtlich gewählt hat. In solchen Fällen hat das Dazwischentreten einer andern Ursache, als der Zufall, wie wir später sehen werden, wirklich eine sich der Gewissheit sehr nähernde Wahrscheinlichkeit.

§. 8. Die Potenz q^n ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss F ununterbrochen n mal stattfindet, und wenn man sie von der Einheit abzieht, so erhält man folglich die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass in den n aufeinander folgenden Versuchen das Ereigniss E wenigstens einmal stattfindet. Wenn man also die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses mit r bezeichnet und $1-p$ statt q setzt, so folgt:

$$r = 1 - (1-p)^n.$$

Wenn man diesen Werth von $r = \frac{1}{2}$ setzt, so kann man die Anzahl der Versuche bestimmen, welche erforderlich sind, damit man denselben Grund für die Annahme des Stattfindens des Ereignisses E, als für sein Nichtstattfinden hat, oder dass man 1 gegen 1 wetten kann, dass das Ereigniss E bei dieser Anzahl von Versuchen wenigstens einmal stattfindet. Alsdann hat man:

$$(1-p)^n = \frac{1}{2}, \text{ folglich } n = -\frac{\log 2}{\log(1-p)}.$$

Wenn z. B. das Ereigniss E das Treffen einer Sechs oder einer andern bestimmten Zahl bei dem Wurfe mit einem gewöhnlichen Würfel ist, so hat man:

$$p = \frac{1}{6},\ n = 3{,}8018\ldots,$$

so dass es vortheilhaft ist, zu wetten, dass die Zahl 6 bei vier Versuchen wenigstens einmal getroffen wird. Wenn man mit zwei Würfeln zugleich wirft und das Ereigniss E ist das Treffen einer doppelten Sechs, so hat man:

$$p = \frac{1}{36},\ n = 24{,}614\ldots,$$

welches zeigt, dass der Spieler im Vortheil ist, welcher wettet, bei 25 Würfen wenigstens einmal eine doppelte Sechs zu werfen, und der im

Nachtheil, welcher bei **24** Versuchen einmal eine doppelte Sechs zu treffen, wettet.

Der allgemeine Ausdruck von r zeigt, daſſ, wie klein die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses E auch sein mag, wofern sie nur nicht ganz Null ist, die Anzahl n der Versuche immer so groß angenommen werden kann, daſſ sich die Wahrscheinlichkeit, daſſ das Ereigniſſ E wenigstens einmal stattfindet, der Gewiſſheit beliebig nähert. Denn wie wenig der Bruch $1-p$ auch von der Einheit verschieden sein mag, so kann man den Exponenten n doch immer so groß annehmen, daſſ die Potenz $(1-p)^n$ kleiner wird, als ein gegebener Bruch. Hierin besteht eben der wesentliche Unterschied zwischen einem absolut unmöglichen Ereignisse und einem Ereignisse E, dessen Wahrscheinlichkeit p sehr klein ist; das unmögliche Ereigniſſ findet niemals statt, während das auch noch so wenig wahrscheinliche Ereigniſſ in einer hinreichend langen Reihe von Versuchen sehr wahrscheinlich wenigstens einmal stattfindet.

Nach dem binomischen Lehrsatze hat man:

$$(1-p)^n = 1 + np + \frac{n.n-1}{1.2}p^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}p^3 + etc.,$$

und wenn n eine sehr große Zahl ist und n für $n-1$, $n-2$,.... gesetzt wird, so erhält man sehr nahe:

$$(1-p)^n = 1 + np + \frac{n^2p^2}{1.2} + \frac{n^3p^3}{1.2.3} + etc.$$

wo die Reihe im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung die Entwickelung von e^{-np} ist, indem e die Basis der Neperschen Logarithmen bezeichnet. Hiernach erhält man also:

$$r = 1 - e^{-np}$$

für den Näherungswerth von r. Wenn $p = \frac{1}{n}$ ist, so ist dieser Werth dem Verhältnisse $\frac{e-1}{e}$ gleich. Wenn also die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E durch den Quotienten aus der Einheit und einer sehr großen Zahl n ausgedrückt wird, so sind schon n Versuche hinreichend, damit die Wahrscheinlichkeit, daſſ das Ereigniſſ E wenigstens einmal stattfindet, $=\frac{e-1}{e}$ oder ungefähr $=\frac{2}{3}$ wird.

§. **9.** Wenn zwei Ereignisse E und E_1 nicht von einander unabhängig sind, d. h. wenn das Stattfinden des einen auf die abstracte

Wahrscheinlichkeit des andern Einfluss hat, so ist die Wahrscheinlichkeit des aus E und E_1 zusammengesetzten Ereignisses dem Producte pp_1 gleich, worin p die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E bezeichnet, welches zuerst stattfinden muss und p_1 die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn das Ereigniss E stattgefunden hat, das Ereigniss E_1 hierauf stattfinden wird.

Wenn z. B. a und b die Anzahlen der in einer Urne A enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln und c ihre Summe $a+b$ bezeichnen, E das Ziehen einer weißen Kugel bei einem ersten Versuche und E_1 das einer weißen Kugel bei einem zweiten Versuche, ohne dass die bei dem ersten gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wird, ist; so hat man zuvörderst:

$$p = \frac{a}{c}.$$

Aber bei dem zweiten Versuche hat sich die Gesammtzahl der Kugeln in der Urne auf $c-1$ und die der weißen Kugeln auf $a-1$ reducirt; man hat folglich:

$$p_1 = \frac{a-1}{c-1}$$

als die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer neuen weißen Kugel, und folglich:

$$pp_1 = \frac{a(a-1)}{c(c-1)}$$

für die des Zuges zwei weißer Kugeln.

Ebenso findet man:

$$pp_1 = \frac{ab}{c(c-1)}$$

für die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen und einer schwarzen Kugel in einer bestimmten Ordnung, wenn die bei dem ersten Versuche aus der Urne gezogene Kugel nicht wieder hineingelegt wird.

Allgemein, wenn aus der Urne A successive $m+n$ Kugeln gezogen, aber nicht wieder hineingelegt werden, und man bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, in einer bestimmten Ordnung m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, mit ϖ; so hat man:

$$\varpi = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)\,b(b-1)(b-2)\ldots(b-n+1)}{c(c-1)(c-2)\ldots(c-m-n+1)},$$

von welcher Beschaffenheit diese bestimmte Ordnung auch sein mag. Denn wenn in den $m'+n'$ ersten Ziehungen m' weiße und n' schwarze Kugeln gezogen sind, so besteht die Anzahl $c-m'-n'$ der noch in der Urne bleibenden Kugeln aus $a-m'$ weißen und aus $b-n'$ schwarzen, und die Wahrscheinlichkeiten eine weiße, oder eine schwarze Kugel bei einem neuen Versuche zu ziehen, sind folglich:

$$\frac{a-m'}{c-m'-n'}, \quad \frac{b-n'}{c-m'-n'}.$$

Nimmt man in diesen beiden Brüchen für m' successive alle Zahlen von 0 bis $m-1$ und für n' alle Zahlen von 0 bis $n-1$, so muss das Product der auf diese Weise erhaltenen $m+n$ Größen offenbar den Werth von ϖ bilden, was mit der vorhin angeführten Formel übereinstimmt.

Wenn man die bei jedem Versuche aus der Urne A gezogene weiße oder schwarze Kugel wieder hineinlegte, so würden die Wahrscheinlichkeiten des Zuges einer weißen und einer schwarzen Kugel während der ganzen Reihe der Versuche constant und resp. $=\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ bleiben, und die Wahrscheinlichkeit, in einer bestimmten Ordnung m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, wäre das Product aus $\left(\frac{a}{c}\right)^m$ und $\left(\frac{b}{c}\right)^n$ oder $=\frac{a^m b^n}{c^{m+n}}$. Auf diesen Werth reducirt sich der Werth von ϖ in der That, wenn die Zahlen a und b sehr groß sind und gegen m und n als unendlich betrachtet werden können, so dass die Wahrscheinlichkeiten des Zuges einer weißen und einer schwarzen Kugel während der ganzen Dauer der Versuche constant bleiben.

Wenn man in dem Werthe von ϖ, $n=0$ setzt, so ergibt sich daraus:

$$\varpi=\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)}{c(c-1)(c-2)\ldots(c-m+1)}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass ununterbrochen m weiße Kugeln gezogen werden. Wenn man z. B. statt der Urne A ein aus 16 rothen und aus eben so vielen schwarzen Karten bestehendes Spiel Karten hätte, und man sollte die Wahrscheinlichkeit bestimmen, in 16 Zügen die 16 rothen Karten zu ziehen, so müsste man

$$a=16, \quad c=32, \quad m=16$$

setzen, und alsdann ergäbe sich:

$$\varpi = \frac{1 . 2 . 3 \ldots 15 . 16}{17 . 18 . 19 \ldots 31 . 32},$$

oder wenn man reducirt:

$$\varpi = \frac{1}{601080390},$$

d. h. eine Größe, welche etwas kleiner ist, als ein Sechshundertmilliontel. Man müsste also etwas mehr als 600 Millionen Versuche anstellen, um eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{2}{3}$ zu erhalten, oder ungefähr 2 gegen 1 wetten zu können, dass das Ziehen der 16 rothen Karten wenigstens einmal unterbrochen wird.

§. 10. Wenn ein Ereigniss E in mehrern von einander unabhängigen Fällen stattfinden kann und die Wahrscheinlichkeit seines Stattfindens im ersten Falle $= p_1$, im zweiten $= p_2, \ldots$ ist, so ist die vollständige Wahrscheinlichkeit seines Stattfindens die Summe aus allen diesen einzelnen Wahrscheinlichkeiten, so dass, wenn man sie mit p bezeichnet:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$

ist.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, man hätte i Urnen A mit weißen und schwarzen Kugeln und die Gesammtzahl der weißen und schwarzen Kugeln und die der weißen Kugeln allein betrüge in der ersten Urne resp. c_1 und a_1, in der zweiten c_2 und a_2, u. s. f., und wir wollen ferner annehmen, dass das Ereigniss E der Zug einer weißen Kugel sei, wenn man zufällig in eine dieser Urnen greift. Dieses Ereigniss kann alsdann auf i verschiedene Arten stattfinden, weil es i Urnen gibt, wo aus jeder eine weiße Kugel gezogen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass man in irgend eine dieser Urnen greift, ist für alle dieselbe und $= \frac{1}{i}$, und die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel ist resp. gleich $\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \frac{a_3}{c_3}, \ldots$ je nachdem man wirklich in die erste, zweite, dritte, ... Urne greift. Nach der Regel in §. 5. sind die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ der verschiedenen Arten, auf welche E stattfinden kann, folglich:

$$p_1 = \frac{1}{i} \frac{a_1}{c_1},\ p_2 = \frac{1}{i} \frac{a_2}{c_2},\ p_3 = \frac{1}{i} \frac{a_3}{c_3},\ etc.,$$

und es kommt nun darauf an, zu beweisen, dass die vollständige Wahrscheinlichkeit p des Zuges einer weißen Kugel aus der einen oder der andern der i Urnen durch:

$$p = \frac{1}{i}\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \frac{a_3}{c_3} + etc.\right)$$

ausgedrückt wird.

Der Beweis dieser Regel gründet sich auf einen Lehrsatz, welcher auch bei andern Gelegenheiten von Nutzen sein wird.

Wir wollen uns eine beliebige Anzahl i Urnen C denken, welche alle dieselbe Anzahl μ von Kugeln, aber die weißen und schwarzen Kugeln in verschiedenen Verhältnissen enthalten; so wird die Wahrscheinlichkeit, aus allen diesen Urnen zusammengenommen eine weiße Kugel zu ziehen, nicht geändert, wenn man die $i\mu$ Kugeln, welche sie enthalten, in eine einzige Urne B legt. Denn sie bilden darin beliebig angeordnete Gruppen von Kugeln, wovon jede Gruppe die Kugeln einer der Urnen C enthält, und welche alle aus derselben Anzahl μ von Kugeln bestehen, so dass die Wahrscheinlichkeit, in eine dieser Gruppen zu greifen, für alle diese Gruppen dieselbe und $= \frac{1}{i}$ ist, wie wenn jede Gruppe in einer der Urnen C enthalten wäre. Die Wahrscheinlichkeit, aus der Gruppe, in welche man greift, eine weiße Kugel zu ziehen, hat sich ebenfalls nicht geändert, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne B eine weiße Kugel zu ziehen, dieselbe, als sie aus dem Systeme der Urnen C zu ziehen. Dieser Schluss würde nicht mehr stattfinden, wenn in den Urnen C nicht gleich viel Kugeln enthalten wären. Allein die Wahrscheinlichkeit, dass man in eine dieser Urnen greift, ist noch dieselbe und $= \frac{1}{i}$. Wenn aber alle Kugeln in die Urne B gelegt werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass man in eine dieser Gruppen greifen wird, nicht mehr für alle dieselbe, weil sie ungleiche Anzahlen von Kugeln enthalten, und sie ist offenbar für die Gruppen, welche aus der größten Anzahl von Kugeln bestehen, am größten.

Nun wollen wir die Brüche $\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \frac{a_3}{c_3}, \ldots$ auf denselben Nenner μ bringen, und es seien alsdann $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ihre Zähler, so dass:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{\alpha_1}{\mu},\ \frac{a_2}{c_2} = \frac{\alpha_2}{\mu},\ \frac{a_3}{c_3} = \frac{\alpha_3}{\mu},\ \ldots$$

ist. Die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus jeder der Urnen A und folglich aus der Gesammtheit dieser Urnen wird nicht geändert, wenn man für jede der Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ der weißen und schwarzen Kugeln in jeder der Urnen A dieselbe Zahl μ und für die in diesen Urnen resp. enthaltenen Anzahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ weißer Kugeln die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ setzt. Die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel wird auch nicht geändert, wenn man hierauf alle diese Kugeln in dieselbe Urne C legt. Da aber diese Urne alsdann im Ganzen $i\mu$ Kugeln enthält, worunter sich $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$ weiße Kugeln befinden, so wird diese Wahrscheinlichkeit durch das Verhältniss der zweiten Zahl zu der ersten, oder was dasselbe ist, durch die Größe:

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\alpha_1}{\mu} + \frac{\alpha_2}{\mu} + \frac{\alpha_3}{\mu} + etc.\right)$$

ausgedrückt, welche vermöge der vorhergehenden Gleichungen mit dem Werthe von p übereinstimmt, was bewiesen werden sollte.

§. 11. Um diese Regel auf Beispiele anzuwenden, wollen wir zuerst annehmen, eine gewisse Person wisse, dass entweder aus einer Urne A mit 5 weißen und einer schwarzen Kugel, oder aus einer Urne B mit 3 weißen und 4 schwarzen Kugeln eine Kugel gezogen ist, und dass sie keinen Grund habe, dass diese Kugel eher aus der einen, als aus der andern dieser beiden Urnen gezogen sei; so ist für diese Person die Wahrscheinlichkeit ϖ, dass die gezogene Kugel eine weiße ist:

$$\varpi = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{7} = \tfrac{53}{84};$$

denn für sie hat dieses Ereigniss auf zwei verschiedene Arten stattfinden können, und die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 in Beziehung auf dieselben sind:

$$p_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{6},\ p_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{7}.$$

Für eine andere Person, welche weiß, dass die Kugel aus der Urne B gezogen ist, wird die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine schwarze ist, durch:

$$p = \tfrac{4}{7} = \tfrac{48}{84}$$

ausgedrückt. Da die Brüche $\frac{53}{84}$ und $\frac{48}{84}$ größer sind, als $\frac{1}{2}$, so muss die erste Person glauben, dass die gezogene Kugel weiß, und die zweite, dass sie schwarz ist. Von diesen beiden entgegengesetzten Meinungen müssen wir aber die letzte annehmen, weil die zweite Person in Beziehung auf das in Rede stehende Ereigniss mehr weiß, als die erste, und dessenungeachtet ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{48}{84}$, auf welche diese zweite

Person ihre Meinung stützt, kleiner, als die Wahrscheinlichkeit $\frac{53}{84}$, worauf sich die Meinung der ersten Person gründet. Dieses ist ein sehr einfaches Beispiel, und es ließen sich leicht mehrere anführen, von dem in §. 1. hinsichtlich der entgegengesetzten Urtheile verschiedener Personen über denselben Gegenstand Gesagten.

Ferner wollen wir annehmen, wir wüssten, dass eine Urne A eine gegebene Anzahl n weißer und schwarzer Kugeln enthält; aber nicht, wie viel von jeder Art, so können wir in dieser Beziehung $n+1$ verschiedene und gleich mögliche Voraussetzungen machen, welche eben so viele verschiedene Arten des Zuges einer weißen Kugel sind. Diese verschiedenen Voraussetzungen sind folgende: die Urne enthält entweder n weiße Kugeln, oder $n-1$ weiße Kugeln und eine schwarze, oder $n-2$ weiße und 2 schwarze, ... oder endlich n schwarze Kugeln. Da alle diese Voraussetzungen gleich möglich sind, so ist die Wahrscheinlichkeit jeder derselben $=\frac{1}{n+1}$; folglich sind die einzelnen Wahrscheinlichkeiten des Zuges einer weißen Kugel in diesen verschiedenen Voraussetzungen resp.:

$$p_1=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{n},\ p_2=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n},\ p_3=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n},\ etc.$$

und die vollständige Wahrscheinlichkeit ϖ dieses Ereignisses wird durch die Größe:

$$\varpi=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{n-n}{n}\right)$$

ausgedrückt, welche sich auf $\frac{1}{2}$ reducirt, wie es auch der Fall sein muss, weil wir keinen Grund haben, eher den Zug einer weißen, als den einer schwarzen Kugel anzunehmen.

Aber wenn wir wissen, dass in der Urne A die Anzahl der weißen Kugeln zuverlässig größer ist, als die der schwarzen, so ist der Werth von ϖ größer, als $\frac{1}{2}$, und um ihn zu bestimmen, muss man die beiden Fälle, wo n eine ungerade oder gerade Zahl ist, unterscheiden. Wenn i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet und $n=2i+1$ ist, so kann man hinsichtlich der Anzahlen der in der Urne A enthaltenen weißen oder schwarzen Kugeln nur $i+1$ verschiedene und gleichmögliche Voraussetzungen machen, indem man annimmt, dass sie entweder $2i+1$ weiße Kugeln, oder $2i$ weiße und 1 schwarze, ... oder endlich $i+1$ weiße und i schwarze enthält, und in diesem ersten Falle ist der vollständige Werth von ϖ:

$$\varpi = \frac{1}{i+1}\left(\frac{2i+1}{2i+1} + \frac{2i}{2i+1} + \frac{2i-1}{2i+1} + \ldots + \frac{i+1}{2i+1}\right),$$

welche Größe sich auf:

$$\varpi = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3i+2}{2i+1}$$

reducirt. Sie ist für $i=0$, wie es sein muss, der Einheit gleich, nimmt fortwährend ab, je mehr i zunimmt und nährt sich ohne Ende dem Werthe $\frac{3}{4}$. Wenn $n=2i+2$ ist, so kann man wieder $i+1$ gleich mögliche Voraussetzungen machen, indem man annimmt, dass die Urne A entweder $2i+2$ weiße Kugeln, oder $2i+1$ weiße und eine schwarze, ... oder endlich $i+2$ weiße und i schwarze Kugeln enthält. Hieraus ergibt sich für den vollständigen Werth von ϖ:

$$\varpi = \frac{1}{i+1}\left(\frac{2i+2}{2i+2} + \frac{2i+1}{2i+2} + \frac{2i}{2i+2} + \ldots + \frac{i+2}{2i+2}\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$\varpi = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3i+4}{2i+2}.$$

Für die Grenzwerthe $i=o$ und $i=\infty$ wird, wie im vorhergehenden Falle, $\varpi=1$ und $\varpi=\frac{3}{4}$. Für jede andere ganze Zahl i ist dieser Werth um den Bruch $\frac{i}{4(i+1)(2i+1)}$, dessen Maximum $=\frac{1}{24}$ ist, und $i=1$ entspricht, größer, als der vorhergehende.

Eine Urne A enthalte im Ganzen c Kugeln, wovon a weiß sind, und wir wollen uns vorstellen, dass diese Kugeln in dieser Urne so in Gruppen abgetheilt sind, dass die erste c_1 Kugeln enthält, worunter sich a_1 weiße befinden, die zweite c_2 Kugeln, wovon a_2 weiß sind, u. s. f., so dass man hat:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = c$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = a.$$

Es sei p die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus dieser Urne, so muss sie $=\frac{a}{c}$ sein, was blos eine Bestätigung der Regel im vorhergehenden §. ist. Eine weiße Kugel kann aus der ersten Gruppe gezogen werden, wofür die Wahrscheinlichkeit durch das Product aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{c_1}{c}$, dass man in diese Gruppe greift,

und der Wahrscheinlichkeit $\frac{a_1}{c_1}$, daß man aus derselben eine weiße Kugel zieht, ausgedrückt wird. Dasselbe gilt in Beziehung auf alle übrigen Gruppen, und folglich wird der vollständige Werth von p ausgedrückt durch:

$$p = \frac{c_1}{c} \cdot \frac{a_1}{c_1} + \frac{c_2}{c} \cdot \frac{a_2}{c_2} + \frac{c_3}{c} \cdot \frac{a_3}{c_3} + etc.$$

und reducirt sich vermöge der zweiten der beiden vorhergehenden Gleichungen wirklich auf $\frac{a}{c}$. Aber wenn man alle diese Gruppen von Kugeln in verschiedene Urnen A_1, A_2, A_3, ... legt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daraus eine weiße Kugel zu ziehen, nicht mehr $= \frac{a}{c}$, wenn nicht alle die Zahlen c_1, c_2, c_3, ... einander gleich sind, sondern sie ist im Allgemeinen von der Vertheilungsart der weißen und schwarzen Kugeln der Urne A unter die Urnen A_1, A_2, A_3, ... abhängig, und wir können sie nur dann berechnen, wenn diese Vertheilung bekannt ist. Jedoch ist für Jemanden, der diese Art der Vertheilung nicht kennt, der Grund zu der Annahme des Zuges einer weißen Kugel aus dem Inbegriffe der Urnen A_1, A_2, A_3, ... offenbar derselbe, als für den Zug einer solchen Kugel aus der Urne A, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit dieses Zuges für diese Person, welche von der abstracten Wahrscheinlichkeit desselben verschieden ist, $= \frac{a}{c}$. Wir wollen z. B. annehmen, die Urne A enthalte zwei weiße und eine schwarze Kugel, und man habe in die Urne A_1 zwei Kugeln und in die Urne A_2 die dritte gelegt; so gibt es für diese Person drei gleich mögliche Vertheilungsarten der drei Kugeln der Urne A unter die Urnen A_1 und A_2, nämlich es können die beiden weißen Kugeln in die Urne A_1 und die schwarze in die Urne A_2, oder eine weiße und die schwarze Kugel in die Urne A_1 und die andere weiße Kugel in die Urne A_2, oder endlich diese zweite weiße Kugel nebst der schwarzen Kugel in die Urne A_1 und die erste weiße Kugel in die Urne A_2 gelegt sein. In diesen drei Fällen sind die Wahrscheinlichkeiten, aus der einen, oder der andern der Urnen A_1 und A_2 eine weiße Kugel zu ziehen, resp.

$$\tfrac{1}{2}(1+0),\ \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1),\ \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1),$$

und wenn man ihre Summe bildet, und diese durch 3 dividirt; so

erhält man die vollständige Wahrscheinlichkeit dieses Zuges $= \frac{2}{3}$; also dieselbe, wie für den Zug einer weißen Kugel aus der Urne A.

Endlich wollen wir ein System von Urnen D_1, D_2, D_3... betrachten, wovon die erste c_1 Kugeln enthält, worunter a_1 weiße sind die zweite c_2 Kugeln, wovon a_2 weiß sind, ... und annehmen, dass aus irgend einem Grunde die Wahrscheinlichkeiten, dass in diese Urnen gegriffen wird, um daraus eine weiße oder schwarze Kugel zu ziehen, nicht dieselben seien. Alsdann sei k_1 die Wahrscheinlichkeit, dass man in die Urne D_1 greift, um eine weiße oder schwarze Kugel aus derselben zu ziehen, k_2 dieselbe Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf die Urne D_2, ...; so ist nach §. 5. die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der ersten Urne $= k_1 \frac{a_1}{c_1}$, die des Zuges einer weißen Kugel aus der zweiten Urne $= k_2 \frac{a_2}{c_2}$, ... und diese Producte drücken folglich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, ... in Beziehung auf die verschiedenen Arten, auf welche der Zug einer weißen Kugel stattfinden kann, aus. Folglich wird die vollständige Wahrscheinlichkeit ϖ dieses Ereignisses ausgedrückt durch:

$$\varpi = \frac{k_1 a_1}{c_1} + \frac{k_2 a_2}{c_2} + \frac{k_3 a_3}{c_3} + etc.$$

Zum Beweise der Regel im vorhergehenden §. in ihrer ganzen Allgemeinheit war es hinreichend, ein System von Urnen A_1, A_2, A_3 zu betrachten, für welche die Wahrscheinlichkeiten k_1, k_2, k_3, ... einander gleich sind, und nachdem diese Regel so bewiesen war, führte ihre Anwendung auf andere Urnen D_1, D_2, D_3, ..., für welche die Wahrscheinlichkeiten k_1, k_2, k_3 beliebige Werthe haben, zu dem Ausdrucke von ϖ, welcher sich auf den allgemeinen Fall bezieht.

§. **13.** Es seien nun E und F zwei entgegengesetzte Ereignisse, d. h. welche sich gegenseitig ausschließen, und wovon das eine immer stattfinden muss. Ihre resp. Wahrscheinlichkeiten wollen wir mit p und q bezeichnen, so dass

$$p + q = 1$$

ist (§. 3.), und wir wollen annehmen, dass jedes dieser Ereignisse auf verschiedene Arten stattfinden kann, deren Wahrscheinlichkeiten wir in Beziehung auf das Ereigniss E mit p_1, p_2, p_3, ... und in Beziehung auf das Ereigniss F mit q_1, q_2, q_3, ... bezeichnen wollen. Wenden wir alsdann die vorhergehende Regel successive auf die Ereignisse E und F an, so erhalten wir:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$
$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots,$$

und folglich:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + q_1 + q_2 + q_3 + \ldots = 1.$$

Die Glieder des ersten Theiles dieser Gleichung sind bei der Untersuchung eines beliebigen ungewissen Ereignisses E die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen günstigen oder ungünstigen Combinationen, und diese Gleichung drückt folglich aus, dass die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten immer der Einheit oder der Gewissheit gleich ist, was in der That der Fall sein muß, wenn alle möglichen Combinationen in Betracht gezogen sind.

Vermöge derselben Gleichung kann der Ausdruck von p auf die Form:

$$p = \frac{lp_1 + lp_2 + lp_3 + \text{etc.}}{lp_1 + lp_2 + lp_3 + \ldots lq_1 + lq_2 + lq_3 + \ldots}$$

gebracht werden, wo l eine nach Belieben angenommene Größe ist. Die Glieder dieses Bruches sind den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ der dem Stattfinden des Ereignisses E günstigen und ungünstigen Fälle proportional. Wenn man nun annimmt, dass sich unter den Gliedern des Zählers a' befinden, welche unter sich und der Größe α' gleich sind, a'' andere, welche ebenfalls unter sich und der Größe α'' gleich sind, u. s. f., und wenn man ebenso annimmt, dass sich unter den Gliedern des Nenners c' Glieder befinden, welche den gemeinschaftlichen Werth γ' haben, c'' andere Glieder, deren gemeinschaftlicher Werth γ'' ist, u. s. f.; so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck von p in:

$$p = \frac{\alpha' a' + \alpha'' a'' + \alpha''' a''' + \text{etc.}}{\gamma' c' + \gamma'' c'' + \gamma''' c''' + \text{etc.}}.$$

Wenn also nicht alle dem Ereignisse E günstigen und ungünstigen Fälle dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, so erhält man die Wahrscheinlichkeit von E, wenn man die Zahlen der gleich möglichen Fälle durch Größen multiplicirt, welche ihren resp. Wahrscheinlichkeiten proportional sind, und dann die Summe dieser Producte für alle günstigen Fälle durch die Summe derselben Producte für alle möglichen Fälle dividirt. Diese Regel ist allgemeiner und lässt sich oft auch bequemer anwenden, als die in §. 2., weil sie nicht erfordert, dass alle günstigen oder ungünstigen Fälle, wovon das Stattfinden eines ungewissen

Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit man wissen will, abhängt, auf eine gleiche Wahrscheinlichkeit zurückgeführt sind.

§. 14. Die Regeln von §. 5. bis §. 10. sind hinreichend, um die Formeln in Beziehung auf die Wiederholung eines Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeiten bekannt sind, sie mögen übrigens während der Versuche constant bleiben, oder sich ändern, zu erhalten.

Wir wollen die beiden entgegengesetzten Ereignisse von einer beliebigen Natur, und wovon eins bei jedem Versuche immer stattfinden muss, wieder mit E und F bezeichnen. Zuerst wollen wir annehmen, dass ihre Wahrscheinlichkeiten constant und gegeben sind, und die Wahrscheinlichkeit von E und von F bei jedem Versuche resp. mit p und q bezeichnen. Ferner sei μ die Gesammtzahl der Versuche; das Ereigniss E finde m mal und das Ereigniss F finde n mal statt, so ist:

$$p+q=1,\ m+n=\mu.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse E und F resp. m und n mal in einer bestimmten Ordnung stattfinden, ist von dieser besondern Ordnung unabhängig und $=p^m q^n$ (§. 7.). Wenn man also die Wahrscheinlichkeit, dass diese Ereignisse in einer beliebigen Ordnung stattfinden, mit Π bezeichnet und mit K die Zahl, welche ausdrückt, auf wie viele verschiedene Arten die m Ereignisse E und die n Ereignisse F bei μ Versuchen auf einander folgen können; so hat man nach der Regel in §. 10:

$$\Pi=Kp^m q^n.$$

Zur Bestimmung von K wollen wir zuerst annehmen, dass die μ Ereignisse, welche stattfinden müssen, alle verschieden sind, und sie durch die Buchstaben $A, B, C, D, \ldots$ bezeichnen. Alsdann drückt K die Anzahl der Permutationen aus, welche sich aus μ Buchstaben bilden lassen, und es ist:

$$K=1.2.3\ldots(\mu-1)\mu.$$

Denn wenn K' die Anzahl der Permutationen bezeichnet, welche sich aus $\mu-1$ verschiedenen Buchstaben bilden lassen, und man fügt noch einen Buchstaben mehr hinzu, so kann derselbe in jeder der Permutationen der $\mu-1$ Buchstaben u verschiedene Stellen einnehmen, und folglich wird die Anzahl der Permutationen von μ Buchstaben durch $\mu K'$ ausgedrückt. Da aber diese Zahl $=1$ ist für $\mu=1$, so folgt, dass sie für $\mu=2, =3, =4, \ldots$ successive gleich 1.2, $1.2.3$, $1.2.3.4, \ldots$ ist. Wenn nun m der Buchstaben $A, B, C, D, \ldots$

dasselbe Ereigniss E bezeichnen, so sind die ihrer Permutationen, welche sich nur durch die Stellen von E von einander unterscheiden, ebenfalls einander gleich, und die Anzahl der jetzt noch verschiedenen Permutationen wird erhalten, wenn man das vorhergehende Product durch die Anzahl der Permutationen aus m Buchstaben, d. h. durch:

$$1.2.3\ldots.m$$

dividirt. Wenn die übrigen $\mu - m$ oder n Buchstaben auch dasselbe Ereigniss F bezeichnen, so muss dieses Product auch noch durch die Anzahl der Permutationen aus n Buchstaben oder durch:

$$1.2.3\ldots n$$

dividirt werden. Folglich wird die Anzahl der verschiedenen Permutationen, welche sich aus m Ereignissen E und n Ereignissen F bilden lassen, d. h. der gesuchte Werth von K, ausgedrückt durch:

$$K = \frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}.$$

Wegen $\mu = m + n$ ist diese Größe K in Beziehung auf m und n symmetrisch; allein man kann sie auch auf die beiden andern Formen:

$$K = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

$$K = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

bringen, welche zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit Π oder das Product $Kp^m q^n$ das $(m+1)$te Glied in der nach den steigenden Potenzen von p, oder das $(n+1)$te Glied in der nach den steigenden Potenzen von q geordneten Entwickelung von $(p+q)^\mu$ ist.

Hieraus folgt, dass in dem Falle, welchen wir jetzt betrachten, wo die Wahrscheinlichkeiten p und q der beiden entgegengesetzten Ereignisse E und F constant sind, die Wahrscheinlichkeiten aller zusammengesetzten Ereignisse, welche bei μ Versuchen stattfinden können, durch die verschiedenen Glieder der Entwickelung von $(p+q)^\mu$ ausgedrückt werden.

Die Anzahl dieser Ereignisse ist $= \mu + 1$. Sie sind ungleich wahrscheinlich, sowohl wegen der verschiedenen Menge von Combinationen, in welchen sie stattfinden können, und welche für jedes derselben durch die Zahl K ausgedrückt wird, als wegen der Ungleichheit der

Wahrscheinlichkeiten p und q. Wenn $p = q$ ist, so ist das wahrscheinlichste Ereigniss das, welches $m = n$ entspricht, wenn μ eine gerade Zahl ist, und eins der beiden, welche $m - n = \pm 1$ entsprechen, wenn μ eine ungerade Zahl ist.

§. 15. Es sei P die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E bei μ Versuchen wenigstens m mal stattfindet. Dieses zusammengesetzte Ereigniss kann auf $n+1$ verschiedene Arten stattfinden, nämlich wenn das Ereigniss E, μ mal, $(\mu - 1)$ mal, $(\mu - 2)$ mal, ... und endlich $(\mu - n)$ oder m mal stattfindet. Die Wahrscheinlichkeiten für diese $m+1$ verschiedenen Fälle ergeben sich aus dem vorhergehenden Ausdrucke für Π, wenn man darin successive μ und 0, $\mu - 1$ und 1, $\mu - 2$ und 2, ... bis m und n statt dieser beiden letzten Zahlen setzt. Der vollständige Werth von P wird also nach der Regel in §. 10. durch die Summe dieser $n+1$ partiellen Wahrscheinlichkeiten und folglich durch:

$$P = p^\mu + \mu p^{\mu-1} q + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^{\mu-1} q^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)}{1.2.3\dots n} p^m q^n$$

ausgedrückt, so dass P die Summe der $n+1$ ersten Glieder der nach den steigenden Potenzen von q geordneten Entwickelung von $(p+q)^\mu$ ist.

Für $m = 0$, oder $n = \mu$ hat man:

$$P = (p+q)^\mu = 1,$$

was in der That der Fall sein muss, weil alsdann das zusammengesetzte Ereigniss aus allen möglichen Verbindungen von E und F besteht und seine Wahrscheinlichkeit P die Gewissheit sein muss. Für $m = 1$ ist dieses Ereigniss das entgegengesetzte von dem, dass F bei allen Versuchen stattfindet, und in der That ist in diesem Falle der Werth von P die ganze Entwickelung von $(p+q)^\mu$ weniger dem letzten Gliede derselben q^μ, was mit dem Werthe von r in §. 8. übereinstimmt.

Wenn μ eine ungerade Zahl $2i+1$ ist, und man verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E häufiger stattfindet, als F, so ergibt sie sich aus dem allgemeinen Ausdrucke von P, wenn man darin $m = i+1$ und $n = i$ setzt. Wenn μ eine gerade Zahl $2i$ ist; so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E, wenigstens ebensovielmal stattfindet, als F, wenn man in demselben Ausdrucke $m = n = i$ setzt.

§. 16. Aus dieser Formel ergibt sich auch die Auflösung der ersten Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche zu ihrem Entstehen Veranlassung gegeben hat und unter dem Namen der Theilungsregel bekannt ist. Zwei Spieler A und B spielen nämlich irgend ein Spiel, wo einer von beiden bei jeder Partie gewinnen muss, p ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und q die, dass B diese Partie gewinnt, A hat noch a und B noch b Partien zu gewinnen, um das ganze Spiel zu gewinnen, und man soll nun die Wahrscheinlichkeit α, dass A oder die Wahrscheinlichkeit β, dass B das Spiel gewinnt, bestimmen. Da eins dieser beiden entgegengesetzten Ereignisse nothwendig stattfinden muss, so ist die Summe $\alpha+\beta=1$, und man hat blos α zu bestimmen.

Zunächst wollen wir bemerken, dass das Spiel nach einer Anzahl von Partien beendigt sein wird, welche nicht größer sein kann, als $a+b-1$. Denn bei dieser Anzahl von Partien muss entweder A nothwendig wenigstens a Partien, oder B wenigstens b Partien gewonnen haben. Ferner können die beiden Spieler, ohne an ihren resp. Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen, etwas zu ändern, übereinkommen, $a+b-1$ Partien zu spielen; denn bei dieser Anzahl von Partien kann nur ein einziger Spieler noch so viel Partien gewinnen, als er nöthig hat, und je nachdem A, a Partien gewonnen hat, bevor B, b Partien gewonnen hat, oder je nachdem B, b Partien gewonnen hat, ehe A, a Partien gewonnen hat, hat der Spieler A oder B das ganze Spiel gewonnen. Um die Wahrscheinlichkeiten α und β zu bestimmen, können wir also annehmen, dass immer nur noch $a+b-1$ Partien gespielt werden. Alsdann ist α die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Anzahl von Versuchen ein Ereigniss E, dessen Wahrscheinlichkeit bei jedem Versuche $=p$ ist, wenigstens a mal stattfindet, und folglich ergibt sich der Werth dieser Wahrscheinlichkeit aus dem vorhergehenden Ausdrucke von P, wenn man darin:

$$\mu=a+b-1,\ m=a,\ n=b-1$$

setzt.

Hat man z. B.

$$p=\tfrac{2}{3},\ q=\tfrac{1}{3},\ a=4,\ b=2,$$

so findet man:

$$\alpha=\tfrac{112}{243},\ \beta=\tfrac{131}{243},$$

und da β größer ist als α, so folgt, dass ein Spieler A, welcher eine doppelt so große Geschicklichkeit, oder eine doppelt so große Wahr=

scheinlichkeit zu gewinnen, als der Spieler B hat, ohne Nachtheil dennoch nicht wetten kann, eher vier Partien zu gewinnen, ehe B deren zwei gewonnen hat.

Wenn die beiden Spieler übereinkommen, sich vor der Vollendung des Spieles zu trennen, so muss, wie wir weiter unten sehen werden, der Einsatz den Wahrscheinlichkeiten a und β proportional unter sie vertheilt werden.

§. 17. Statt zweier Ereignisse E und F wollen wir deren eine größere Anzahl, z. B. 3, betrachten, welche wir mit E, F, G bezeichnen wollen, und wovon eins bei jedem Versuche nothwendig stattfinden muss. Es seien p, q, r ihre constanten Wahrscheinlichkeiten und μ die Anzahl der Versuche, so ergibt sich durch eine leichte Erweiterung der Methode in §. 14:

$$\frac{1.2.3\ldots\mu.p^m q^n r^o}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots o}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass das erste der Ereignisse E, F, G m mal, das zweite n mal und das dritte o mal stattfindet. Zu gleicher Zeit hat man:

$$p+q+r=1,\ m+n+o=\mu$$

und die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit ist das allgemeine Glied der Entwickelung von $(p+q+r)^\mu$.

Dieser Fall findet bei einer Urne statt, welche Kugeln von drei verschiedenen Farben enthält, und zwar in den durch die Brüche p, q, r bezeichneten Verhältnissen, und wo die Ereignisse E, F, G resp. die Ziehungen dieser drei Arten von Kugeln sind, indem die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne gelegt wird.

Wenn man in der Entwickelung von $(p+q+r)^\mu$ die Summe der Glieder nimmt, die eine Potenz von p enthalten, deren Grad gleich oder größer, als m ist, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E bei μ Versuchen wenigstens m mal stattfindet. Wie groß die Anzahl der Ereignisse $E, F, G, \ldots$, wovon eins bei jedem Versuche nothwendig stattfinden muss, auch sein mag, so lässt sich diese Wahrscheinlichkeit doch unmittelbar aus dem vorhergehenden Werthe von P ableiten. Denn wir wollen die constanten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $E, F, G, \ldots$ wieder mit $p, q, r, \ldots$ bezeichnen, so kann das Stattfinden des einen oder des andern dieser Ereignisse bei jedem Versuche als ein zusammengesetztes Ereigniss, welches wir F' nennen wol-

len, betrachtet werden, und bezeichnen wir seine Wahrscheinlichkeit mit q'; so haben wir:

$$q' = q + r + \ldots, \quad p + q' = 1.$$

Alsdann sind E und F' zwei entgegengesetzte Ereignisse, wovon bei jedem Versuche eins stattfindet, und folglich wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E bei μ Versuchen wenigstens m mal stattfindet, erhalten, wenn man q' für q in den Ausdruck von P setzt. Um ein Beispiel dieser Regel, welche sich auf die Entwickelung der Potenz eines Polynomes gründet, zu geben, wollen wir annehmen, dass eine Urne A, m Kugeln enthält, welche mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnet sind, und dass aus derselben μ mal eine Kugel gezogen wird, indem die gezogene Kugel jedesmal wieder hineingelegt wird; so ist bei jeder Ziehung die Wahrscheinlichkeit des Treffens einer Kugel mit einer bestimmten Zahl für alle Kugeln dieselbe, während der Versuche constant und $=\frac{1}{m}$. Nun wollen wir mit $n_1, n_2, n_3, \ldots n_m$ gegebene Zahlen bezeichnen, welche 0, gleich, oder ungleich sein können, wofern nur immer:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m = \mu$$

ist, und es sei U die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel mit der Zahl 1 n_1 mal, die mit der Zahl 2 bezeichnete Kugel n_2 mal, ... und die mit der Zahl m bezeichnete Kugel n_m in einer beliebigen Ordnung gezogen werden. Wenn man:

$$(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_m)^\mu = \theta$$

setzt, und θ nach den Potenzen und Producten der unbestimmten Größen $t_1, t_2, t_3, \ldots t_m$ entwickelt; so ist der Werth von U das Glied dieser Entwickelung, welches das Product $t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} \ldots t_m^{n_m}$ enthält, wenn man alle diese unbestimmten Größen darin $=\frac{1}{m}$ setzt. Wenn man den Zahlencoefficienten dieses Productes mit N bezeichnet, so hat man folglich:

$$U = \frac{1}{m^\mu} N,$$

wo N eine ganze Zahl ist, welche von μ und den Zahlen $n_1, n_1, n_3,$ ... n_m abhängt, nämlich:

$$N = \frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots n_1 . 1.2.3\ldots n_2 \ldots 1.2.3\ldots n_m},$$

wo man für das Product $1.2.3\ldots n_1$ die Einheit nimmt, wenn $n_1 = o$ ist, und ebenso bei jedem der ähnlichen Producte verfährt.

Nun sei s die Summe der in μ Ziehungen erhaltenen Zahlen, so hat man:

$$s = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots + mn_m.$$

Wenn also s eine gegebene Zahl ist und man nimmt für $n_1, n_2, n_3, \ldots n_m$ successive alle ganzen Zahlen oder Null, welche dieser Gleichung Genüge leisten und deren Summe $= \mu$ ist, bezeichnet die correspondirende Werthe von N mit $N', N'', N''', \ldots$ und die Summe der Werthe von U mit V; so ergibt sich:

$$V = \frac{1}{m^\mu}(N' + N'' + N''' + etc.)$$

für die Wahrscheinlichkeit, in μ Ziehungen eine gegebene Summe s gezogen zu haben.

Der Werth von V lässt sich leichter berechnen, wenn man in θ die unbestimmten Größen $t_1, t_2, t_3, \ldots t_m$ in die Potenzen $t^1, t^2, t^3, \ldots t^m$ derselben Größe t verwandelt Bezeichnet man alsdann den zugehörigen Werth von θ mit T, so ist:

$$T = (t + t^2 + t^3 + \ldots + t^m)^\mu,$$

und es ist leicht einzusehen, dass die Summe $N' + N'' + N''' + \ldots$ nichts anders ist, als der Zahlencoefficient von t^s in der Entwickelung von T. Bezeichnet man also diesen Coefficienten mit M_s, so folgt:

$$V = \frac{1}{m^\mu} M_s,$$

wo der Coefficient M_s von den gegebenen Zahlen μ, m, s abhängt und sich in jedem Beispiele leicht erhalten lässt.

Statt einer einzigen Urne A kann man eine beliebige Anzahl μ von Urnen $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\mu$ annehmen, wovon jede m Kugeln enthält, die mit den Zahlen 1, 2, 3, … m bezeichnet sind und zu gleicher Zeit aus jeder dieser Urnen eine Kugel ziehen. Auch kann man statt dieser Urnen eine gleiche Anzahl von Würfeln nehmen, so hat man bei gewöhnlichen Würfeln mit 6 Flächen, die mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind, $m = 6$, und V drückt die Wahr=

scheinlichkeit aus, dass man bei dem gleichzeitigen Wurfe von μ Würfeln eine Summe $= s$ trifft. Es sei z. B. $\mu = 3$ und folglich:

$$T = t^3 (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5)^3, V = \frac{1}{6^3} M_s.$$

Die Entwickelung von T besteht aus sechszehn Gliedern; die Coefficienten der gleichweit von den Endgliedern entfernten Glieder, wie M_3 und M_{18}, M_4 und M_{17}, ... M_{10} und M_{11} sind einander gleich; die Summe aller Coefficienten wird durch den $t = 1$ entsprechenden Werth von T oder 6^3 ausgedrückt, die Summe der acht ersten Coefficienten $M_3, M_4, \ldots M_{10}$ ist, wie die der acht letzten Coefficienten, $M_{11}, M_{12}, \ldots M_{18}$ gleich $\frac{1}{2} 6^3$, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln eie Summe 10 oder eine kleinere zu treffen, sowie die Summe 11 oder eine größere zu werfen, $= \frac{1}{2}$, so dass man eine gleiche Wette eingehen oder 1 gegen 1 wetten kann, dass die Summe der drei geworfenen Zahlen größer oder kleiner, als die Zahl 10 ist. Hierauf gründet sich das Spiel, welches man Knöcheln nennt. Auch ohne alle Rechnung überzeugt man sich leicht von der Gleichheit der für beide Spieler sprechenden Wahrscheinlichkeit, wenn man bemerkt, dass die Zahlen auf je zwei gegen einander überliegenden Flächen desselben Würfels die Summe 7 bilden, z. B. 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4. Wenn also die drei Würfel auf den Tisch fallen, so bilden die drei oben und unten liegenden Zahlen immer die Summe 21; und wenn folglich die Summe der obern Zahlen größer ist, als 10, so ist die der untern kleiner, und umgekehrt. Es ist also ganz dasselbe, als wenn der eine Spieler wettete, dass die Summe der obern Zahlen größer sei, als 10 und der andere, dass die Summe der untern Zahlen kleiner sei, als 10. Nun ist aber einleuchtend, dass die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse einander gleich sind; denn was für drei Zahlen auch oben und unten liegen mögen, so ist das entgegengesetzte Ereigniss, d. h. dass letztere oben und erstere unten liegen werden, gleich möglich. Um aber die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Werthe von s von $s = 3$ bis $s = 18$ zu erhalten, muss man die Größe T entwickeln, und wenn man dieses thut, so findet man:

$$M_3 = M_{18} = 1, M_4 = M_{17} = 3, M_5 = M_{16} = 6, M_6 = M_{15} = 10,$$
$$M_7 = M_{14} = 15, M_8 = M_{13} = 21, M_9 = M_{12} = 25, M_{10} = M_{11} = 27$$

als die Anzahlen der Verbindungen der drei Nummern, welche die Summen 3 oder 18, 4 oder 17, ... 10 oder 11 geben können, und wenn man sie mit $6^3 = 216$ dividirt; so erhält man die Wahrscheinlichkeiten dieser verschiedenen Summen.

§. 18. Wenn sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E während der Dauer der Versuche ändert, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich eine gegebene Anzahl von Malen wiederholt, von dem Gesetze dieser Veränderung abhängig. Wie in §. 9. wollen wir annehmen, dass das Ereigniss E der Zug einer weißen Kugel aus einer Urne A mit weißen und schwarzen Kugeln und in welche die gezogene Kugel jedesmal nicht wieder hineingelegt wird, sei. Es seien a und b die in der Urne A vor den Ziehungen enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln, μ die Anzahl der Ziehungen und ϖ die Wahrscheinlichkeit, dass in einer bestimmten Ordnung m weiße und n schwarze Kugeln gezogen werden; so wird der Werth von ϖ durch die Formel in dem angeführten §. gegeben, und da dieser Werth von der Ordnung, in welcher die Kugeln beider Farben auf einander folgen, unabhängig ist, so wird die Wahrscheinlichkeit Π, dass sie in einer beliebigen Ordnung auf einander folgen, durch:

$$\Pi = K\varpi$$

ausgedrückt, wo K dieselbe Zahl ist, als in §. 14. und wieder:

$$m+n=\mu,\ a+b=c$$

gesetzt ist.

Setzen wir ferner:

$$a-m=a',\ b-n=b',\ c-\mu=a'+b'=c',$$

so dass a', b', c' die Werthe von a, b, c, welche die Zahlen der weißen und schwarzen Kugeln und ihre Summe ursprünglich ausdrückten, nach den Ziehungen sind. Wenn man die Ausdrücke von K und ϖ berücksichtigt, so lässt sich der von Π auf folgende Form bringen:

$$\Pi = \frac{1.2.3\ldots\mu.1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots b.1.2.3\ldots c}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots a'.1.2.3\ldots b'.1.2.3\ldots c'}$$

und er lässt sich alsdann leicht auf den Fall erstrecken, wo A Kugeln von drei oder mehr verschiedenen Farben enthält.

Wenn man im Zähler und Nenner die gemeinschaftlichen Factoren hinweglässt, so verwandelt sich dieser Ausdruck in den einfachern:*)

*) Nach den μ Ziehungen von m weißen und n schwarzen Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem neuen Versuche eine weiße Kugel zu ziehen, von den Zahlen m und n abhängig und $=\frac{a'}{c'}$. Aber für eine Person, welche blos wüsste, dass aus der Urne μ Kugeln gezogen sind, aber nicht, wie viel weiße

$$\Pi = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots m}$$
$$\times \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)\,b(b-1)\ldots(b-n+1)}{c(c-1)(c-2)\ldots(c-\mu+1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſſ in den μ Ziehungen aus der Urne A wenigstens m weiße Kugeln gezogen werden, iſt die Summe der $n+1$ Werthe von Π, welche man erhält, wenn man in dieſer letzten Formel ſucceſſive μ und 0, $\mu-1$ und 1, $\mu-2$ und $2, \ldots$ $\mu-n$ und n

---

und wie viel ſchwarze, wäre die Wahrſcheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei einem neuen Verſuche von der Wahrſcheinlichkeit $\frac{a'}{c'}$ ſehr verſchieden und nach einer uns eben von C. Mondeſir, ehemaligem Schüler der Ecole Polytéchnique, mitgetheilten Bemerkung iſt die in Rede ſtehende Wahrſcheinlichkeit von den Zahlen m und n unabhängig und wie vor den Ziehungen $=\frac{a}{c}$.

Um die Richtigkeit dieſes Satzes an einem Beiſpiele zu zeigen, wollen wir

$$a=4,\ b=3,\ c=7,\ \mu=2,\ c'=5$$

ſetzen. Hinſichtlich der Zahlen m und n gibt es drei mögliche, aber ungleich wahrſcheinliche Fälle, nämlich $m=2$ und $n=0$, $m=1$ und $n=1$, $m=0$ und $n=2$. Die aus dem Ausdrucke für Π abgeleiteten Werthe der Wahrſcheinlichkeiten dieſer drei verſchiedenen Fälle ſind reſp. $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{7}$. Die Wahrſcheinlichkeiten des Zuges einer weißen Kugel bei einem neuen Verſuche haben in dieſen drei Fällen die reſp. Werthe $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ und nach den Regeln in §. 5. und 10. iſt die vollſtändige Wahrſcheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel die Summe der Producte $\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}$, $\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{5}$, welche in der That $=\frac{4}{7}=\frac{a}{c}$ iſt. Wegen des allgemeinen Beweiſes verweiſen wir auf die Note von C. Mondeſir, welche er in dem Journale der Mathematik von Liouville bekannt machen wird.

Der Satz iſt für ſich klar, wenn $a=b$ iſt; denn in dieſem Falle iſt für eine Perſon, welche die aus der Urne gezogenen Kugeln nicht kennt, nach der Ziehung nicht mehr Grund für die Annahme des Zuges einer weißen Kugel, als für die des Zuges einer ſchwarzen vorhanden, und folglich bleibt die Wahrſcheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel immer $=\frac{1}{2}$. Auch kann man bemerken, daſſ dieſer Satz in dem Falle, wo die Zahlen a und b unendlich groß ſind, mit einem andern Satze übereinſtimmt, welcher im Laufe dieſes Werkes bewieſen werden wird, und wornach es gewiſſ iſt, daſſ ſich die Zahlen m und n wie a und b verhalten, und alsdann iſt man überzeugt, daſſ ſich die Zahlen a' und b' der noch in der Urne zurückbleibenden Kugeln ebenfalls wie a und b verhalten, ſo daſſ die abſtracte und ſubjective Wahrſcheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei einem neuen Verſuche nicht mehr von einander verſchieden und beide dem Verhältniſſe $\frac{a'}{c'}=\frac{a}{c}$ gleich ſind.

statt m und n setzt. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit P, so haben wir folglich:

$$
\begin{aligned}
P.c(c-1)(c-2)\ldots(c-\mu+1) = {} & a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+1) \\
& + \mu b.a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+2) \\
& + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}.b(b-1)a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+3) \\
& + \frac{\mu(\mu 1-)(\mu-2)}{1.2.3} \times \\
& \quad .b(b-1)(b-2)a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+4) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\mu(\mu-1).(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} \times \\
& \quad .b(b-1)\ldots(b-n+1)a(a-1)\ldots(a-m+1).
\end{aligned}
$$

Wenn $m=o$ und $n=\mu$ ist, so muss $P=1$ sein, und folglich ist:

$$
\begin{aligned}
c(c-1)(c-2)\ldots(c-\mu+1) = {} & a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+1) \\
& + \mu.b.a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+2) \\
& + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}.b(b-1)a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+3) \\
& + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} \times \\
& \quad .b(b-1)(b-2)a(a-1)(a-2)\ldots(a-\mu+4) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mu.b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+2)a \\
& + b.(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1),
\end{aligned}
$$

was mit einer bekannten und der Binomialformel ähnlichen Formel übereinstimmt. In dieser letzten Formel und in allen Formeln derselben Art ist jede Größe wie $(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)$ ein Product aus m Factoren, für welches man die Einheit nehmen muss, wenn $m=0$ ist, woraus folgt, dass diese Formel nicht für den Fall passt, wo $\mu=0$ ist, welche Ausnahme auch bei der Binomialformel stattfindet, wenn der Potenzexponent $=0$ ist.

§. 19. Es ist einleuchtend, dass die Wahrscheinlichkeit, m weiße

und n schwarze Kugeln zu ziehen, noch dieselbe wäre, wenn man statt der μ successiven Ziehungen und ohne die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne A zu legen, mit einem Male $m+n=\mu$ Kugeln aus dieser Urne zöge, was sich in der That leicht auf folgende Weise darthun lässt.

Wir wollen die Anzahl der Gruppen, jede von μ Kugeln, welche sich aus den in der Urne A enthaltenen c Kugeln bilden lassen, allgemein mit G_μ bezeichnen, so ist:

$$G_\mu = \frac{c(c-1)(c-2)\ldots(c-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}.$$

Denn um alle diese Gruppen aus denen von $\mu-1$ Kugeln zu bilden, muss man jede dieser letztern mit den nicht darin vorkommenden $c-\mu+1$ Kugeln verbinden, welches $(c-\mu+1)\,G_{\mu-1}$ Gruppen, jede von μ Kugeln, gibt. Da aber immer μ Gruppen von $\mu-1$ Kugeln dieselbe Gruppe von μ Kugeln geben, so muss man das Product $(c-\mu+1)\,G_{\mu-1}$ durch μ dividiren, um die Anzahl der verschiedenen Gruppen, jede von μ Kugeln, zu erhalten, und es ist folglich:

$$G_\mu = \frac{c-\mu+1}{\mu}\,G_{\mu-1}.$$

Für $\mu=1$ hat man offenbar $G_1=c$, und wenn man successive $\mu=2$, $=3$, $=4$, ... setzt, so folgt:

$$G_2 = \frac{c-1}{2}.G_1 = \frac{c(c-1)}{1.2},$$

$$G_3 = \frac{c-2}{3}.G_2 = \frac{c(c-1)(c-2)}{1.2.3},$$

$$G_4 = \frac{c-3}{4}.G_3 = \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3.4},$$

. . . .

. . . .

und endlich: $$G_\mu = \frac{c-\mu+1}{\mu}\,G_{\mu-1},$$

$$G_\mu = \frac{c(c-1)(c-2)\ldots(c-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu},$$

was bewiesen werden sollte.

Bezeichnet man den Werth von G_m, wenn man darin c und μ

in a und m verwandelt, mit G'_m und mit G''_n, wenn man darin c und μ in b und n verwandelt; so hat man ebenfalls:

$$G'_m = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

$$G''_n = \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(b-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

Das Product aus G'_m und G''_n drückt die Anzahl der Gruppen, jede von $m+n$ oder μ Kugeln, aus, welche man aus den $a+b$ oder c in der Urne A enthaltenen Kugeln bilden kann, und wovon jede m weiße und n schwarze Kugeln enthält, und die Wahrscheinlichkeit, eine dieser Gruppen zu treffen, wenn man aus der Urne A zu gleicher Zeit μ Kugeln zieht, ist ferner dem Quotienten aus ihrer Anzahl und der Anzahl aller in der Urne A enthaltenen Gruppen von μ Kugeln gleich, d. h. $= \frac{G'_m G''_n}{G_\mu}$, und wenn man sie mit Π bezeichnet; so hat man folglich:

$$\Pi = \frac{G'_m G''_n}{G_\mu},$$

was mit dem im vorhergehenden §. erhaltenen Werthe von Π übereinstimmt. Der Ausdruck für P in demselben §. ist auch die Wahrscheinlichkeit, wenigstens m weiße Kugeln zu treffen, wenn man zu gleicher Zeit μ Kugeln aus der Urne A zieht.

§. 20. In dem Beispiele in §. 18. änderte sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E während der Versuche, weil sie bei jedem neuen Versuche von den Zahlen abhing, welche ausdrücken, wievielmal das Ereigniss E und das entgegengesetzte Ereigniss F bereits stattgefunden haben. Aber es gibt Aufgaben, worin diese beiden Ereignisse von einer beliebigen Beschaffenheit eigenthümliche, bei jedem Versuche von dem bereits früher stattgehabten unabhängige und von einem Versuche zum andern veränderliche Wahrscheinlichkeiten haben.

Es seien im Allgemeinen in einer Reihe von μ Versuchen, welche man machen will, oder gemacht hat, p_1 und q_1 die Wahrscheinlichkeiten von E und F bei dem ersten Versuche, p_2 und q_2 diese Wahrscheinlichkeiten bei dem zweiten Versuche, ... p_μ und q_μ diese Wahrscheinlichkeiten bei dem letzten Versuche, so dass:

$$p_1+q_1=1,\ p_2+q_2=1,\ \ldots\ p_\mu+q_\mu=1$$

ist.

Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daſſ das Ereigniſſ E $m$mal und das Ereigniſſ F, n oder $(\mu - m)$ mal in einer beliebigen Ordnung stattfinden werden, oder stattgefunden haben, wollen wir mit P_m das Product aus m der Factoren $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$ und durch Q_n das Product aus n der Factoren $q_1, q_2, q_3, \ldots q_\mu$, welche in keiner der vorhergehenden Gleichungen mit einem der in P_m vorkommenden Factoren vorkommen, bezeichnen, so daſſ, wenn P_m den Bruch p_i enthält, der correspondirende Bruch q_i nicht in Q_n vorkommt, und daſſ, wenn P_m den Bruch p_i nicht enthält, der Bruch q_i in Q_n vorkommt. Multiplicirt man alsdann diese beiden Producte P_m und Q_n mit einander, und bildet die Summe aller möglichen auf diese Weise entstandenen Größen $P_m Q_n$, deren Anzahl durch die Zahl K in §. **14.** ausgedrückt wird; so drückt diese Summe die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus.

Diese Regel läſſt sich auch noch auf eine andere Weise ausdrücken, welche uns in der Folge von Nutzen sein wird.

Es seien u und v zwei unbestimmte Größen, und wir wollen

$$R = (up_1 + vq_1)(up_2 + vq_2)(up_3 + vq_3) \ldots (up_\mu + vq_\mu)$$

setzen, so daſſ R ein Product aus μ oder $m+n$ Factoren ausdrückt, und wenn man dieses Product entwickelt, so erhält man ein nach den Potenzen von u und v geordnetes Polynom von $\mu + 1$ Gliedern. In diesem Polynome ist der Coefficient von $u^m v^n$ alsdann die betrachtete Wahrscheinlichkeit, daſſ das Ereigniſſ E, $m$mal und das Ereigniſſ F, $n$mal in einer beliebigen Ordnung stattfindet. Wir wollen z. B. $\mu = 3$ nehmen, so haben wir:

$$R = u^3 p_1 p_2 p_3 + u^2 v (p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1)$$
$$+ uv^2 (p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2) + v^3 q_1 q_2 q_3.$$

Der Coefficient von u^3 ist offenbar die Wahrscheinlichkeit, daſſ das Ereigniſſ E dreimal stattfindet; der Coefficient von $u^2 v$ die Wahrscheinlichkeit, daſſ das Ereigniſſ E zweimal und das Ereigniſſ F einmal stattfindet, was geschehen kann, indem das Ereigniſſ E in den beiden ersten Versuchen und das Ereigniſſ F bei dem letzten, oder das Ereigniſſ F bei dem zweiten Versuche und E in den beiden andern, oder F bei dem ersten Versuche und E in den beiden letzten stattfindet. Ebenso drückt der Coefficient von uv^2 die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ das Ereigniſſ F zweimal und das Ereigniſſ E einmal stattfindet, und endlich drückt der Coefficient von v^3 offenbar die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ das Ereigniſſ F dreimal stattfindet.

Wenn das Ereigniss E bei jedem Versuche auf mehrere gleich mögliche Weisen stattfinden kann, so nimmt man für die Wahrscheinlichkeit, dass E bei diesem Versuche stattfindet, nach der Regel in §. **10.** den Quotienten aus der Summe der resp. Wahrscheinlichkeiten dieser verschiedenen Arten des Stattfindens von E und ihrer Anzahl. Zieht man alsdann diese mittlere Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E von der Einheit ab, so erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F, und nach diesen beiden mittleren Wahrscheinlichkeiten bei jedem Versuche muss man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Ereignisse E und F in den $m+n$ Versuchen resp. m mal und n mal stattfinden, sowie die Wahrscheinlichkeit für jedes andere aus E und F zusammengesetzte Ereigniss. Wenn die mittlern Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und F constant bleiben, obgleich sich ihre partiellen Wahrscheinlichkeiten der Zahl und Größe nach von einem Versuche zum andern ändern, so befolgen die Wahrscheinlichkeiten der zusammengesetzten Ereignisse noch dieselben Gesetze, als in dem Falle, wo die partiellen Wahrscheinlichkeiten unveränderlich sind.

§. **21.** Eine der häufigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht in der Bestimmung der Vor- oder Nachtheile, welche mit ungewissen Ereignissen nach dem damit verbundenen Gewinne oder Verluste und den Wahrscheinlichkeiten ihres Stattfindens zusammenhängen, und sie beruht auf folgender Regel.

Wir wollen annehmen, dass eins der Eeignisse $E, F, G, H, \ldots$ stattfinden muss, und ihre resp. Wahrscheinlichkeiten mit $p, q, r, s, \ldots$ bezeichnen, so dass:

$$p+q+r+s+\ldots=1$$

ist, und zugleich wollen wir annehmen, dass mit dem Stattfinden des Ereignisses E für eine erste Person ein Gewinn g, mit dem des Ereignisses F für eine zweite Person derselbe Gewinn g, u. s. f. verbunden sei. Wenn alsdann alle diese Personen übereinkommen, den Gewinn g vor der Entscheidung hinsichtlich des Stattfindens der erwähnten Ereignisse zu theilen, oder aus irgend welchen Gründen dazu gezwungen sind; so muss dieser Gewinn nach Verhältniss ihrer resp. Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, unter sie vertheilt werden, d. h. gp muss der Antheil der ersten, gq der der zweiten, ... Person sein.

Denn es sei m die Gesammtzahl aller gleichmöglichen Fälle und unter diesen Fällen seien $a, b, c, d, \ldots$ resp. den Ereignissen $E, F, G, H, \ldots$ günstig, so dass:

$$a+b+c+d+etc.=m$$

und folglich:

$$p = \frac{a}{m}, q = \frac{b}{m}, r = \frac{c}{m}, s = \frac{d}{m}, \text{etc.}$$

ist. Wenn es m Personen gäbe, wovon jede bei dem Stattfinden eines der m möglichen Fälle gewinnen müsste, so ist klar, dass der Gewinn g unter alle gleich vertheilt, und folglich $\frac{1}{m}g$ der Antheil jeder derselben sein müsste. Nun muss aber die Person, deren Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, $=p$ ist, oder welche a günstige Fälle für sich hat, offenbar auch a dieser gleichen Theile bekommen, so dass ihr ganzer Antheil also $=\frac{a}{m}g = pg$ sein muss, und ebenso sind die Antheile der übrigen Personen resp. $qg, rg, sg, \ldots$

Bei bereits angefangenen Spielen gibt diese Regel auch an, wie viel jeder Spieler nach seiner Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, von dem Einsatze bekommen muss, wenn sich beide Spieler vor der Beendigung des Spieles trennen wollen. Auch ergibt sich aus dieser Regel, dass der Einsatz jedes Spielers vor dem Beginnen des Spieles seiner Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, proportional sein muss. Denn wenn die beiden Spieler nach geschehenem Einsatze, statt zu spielen, sich trennen wollten, so müsste jeder seinen Einsatz wieder bekommen, und nach der vorhergehenden Regel müsste das, was jeder Spieler wieder bekommt, auch dem Producte aus der Summe der Einsätze und seiner Wahrscheinlichkeit, das ganze Spiel zu gewinnen, gleich sein. Diese Wahrscheinlichkeit ist in den Hazardspielen von den Regeln des Spieles abhängig und lässt sich a priori berechnen, wenn sie nicht sehr complicirt sind. In den Spielen, wo der Erfolg von der Geschicklichkeit jedes Spielers abhängt, beruht seine Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, gewöhnlich auf seiner Reputation und lässt sich nur durch eine lange Reihe von Versuchen mit einiger Genauigkeit bestimmen.

Wenn p und q die Wahrscheinlichkeiten zwei entgegengesetzter Ereignisse E und F sind, so dass $p+q=1$ ist, und eine Person A wettet um eine Summe α, dass das Ereigniss E stattfindet, während eine andere Person B um eine Summe β wettet, dass das Ereigniss F stattfinden wird; so müssen sich, wenn beide Wetten einander gleich sein sollen, diese Summen α und β wie die Wahrscheinlichkeiten p und q verhalten, so dass:

$$p\beta = q\alpha$$

ist. Aber man darf nicht vergessen, dass diese Wahrscheinlichkeiten p

und q im Allgemeinen von den abstracten, eigenen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und F verschieden sind und von den Kenntnissen abhängen, welche die Personen A und B in Beziehung auf diese Ereignisse haben können. Wenn sich diese Wahrscheinlichkeiten auf dieselben Kenntnisse der Personen A und B hinsichtlich der Ereignisse E und F gründen, so ist die Wette billig (subjectiv gleich), obgleich sie eine dieser beiden Personen auf Kosten der andern sehr begünstigen kann. Wenn aber die beiden Personen A und B nicht dieselbe Kenntniss von den beiden Ereignissen E und F haben, so können sich die Summen α und β nicht mehr wie die subjectiven Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse für die beiden Personen A und B verhalten, und es gibt kein Mittel mehr, die Billigkeit der Wette herzustellen.

§. 22. Vermittelst der Formeln in §. 19. lassen sich leicht die Wahrscheinlichkeiten in Beziehung auf die loterie de France, welche glücklicher Weise durch ein neues Gesetz aufgehoben ist, berechnen. Vergleicht man sie mit den Vielfachen der Einsätze, welche die Lotterie für die gewinnenden Loose zahlte, so ergibt sich, dass diese Vielfachen weit kleiner sind, als die, welche sie hätte zahlen müssen, damit das Spiel gleich gewesen wäre, und dass hieraus für die Lotterie auf Kosten der Spieler ein außerordentlich großer Vortheil entsprang, welchen das Gesetz bei einer andern Speculation als unerlaubt verboten haben würde.

Es sei im Allgemeinen n die Anzahl der Nummern, woraus eine Lotterie besteht, m die Anzahl der Nummern, welche bei jeder Ziehung herauskommen, l die Anzahl der auf dem von dem Spieler gewählten Loose verzeichneten Nummern und λ die Wahrscheinlichkeit, dass diese letzten Nummern herauskommen. Die Anzahl der Gruppen von l Nummern, welche man aus den n Nummern der Lotterie und aus den, bei jeder Ziehung herauskommenden m Nummern bilden kann, wird nach den Formeln des angeführten §. resp. ausgedrückt durch:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)}{1.2.3\ldots l}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-l+1)}{1.2.3\ldots l},$$

und die Wahrscheinlichkeit λ wird durch das Verhältniss der zweiten Zahl zur ersten, d. h. durch:

$$\lambda = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-l+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)}$$

ausgedrückt. Wenn man den Einsatz des Spielers zur Einheit nimmt, so muss der der Lotterie dem Verhältnisse von $1-\lambda$ zu λ gleich sein, und wenn der Spieler gewinnt, so muss ihm die Lotterie auch seinen

gezahlten Einsatz zurückgeben. Bezeichnet man also das Vielfache dieses Einsatzes, welches die Lotterie dem Gewinner zahlen muss, mit μ, so hat man:

$$\mu = \frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Ferner sei x die Anzahl der Ziehungen, welche erforderlich sind, damit man 1 gegen 1 wetten kann, dass die auf dem Loose des Spielers verzeichneten Nummern wenigstens einmal herauskommen; so ist nach der Regel in §. 8:

$$(1-\lambda)^x = \tfrac{1}{2},$$

und wenn die Wahrscheinlichkeit λ ein sehr kleiner Bruch ist, so erhält man sehr nahe:

$$x = \frac{1}{\lambda}(0,69315),$$

indem man 0,69315 für den Neperschen Logarithmus der Zahl 2 nimmt.

In der loterie de France war:

$$n = 90, \ m = 5.$$

Für eine Terne muss man $l = 3$ setzen, woraus folgt:

$$\lambda = \frac{5.4.3}{90.89.88}, \ \mu = 11748, \ x = 8143,13\ldots$$

Wenn also das Spiel hätte gleich sein sollen, so hätte die Lotterie dem Gewinner seinen 11748 fachen Einsatz zahlen müssen, wogegen sie ihm nur den 5500 fachen Einsatz, d. h. weniger, als die Hälfte von dem zahlte, was sie hätte zahlen müssen. Das Mißverhältniss war bei der Quaterne und Quinterne noch größer, aber bei einer Ambe und dem einfachen Auszuge geringer. Es würde vortheilhaft sein, 1 gegen 1 zu wetten, dass eine gegebene Terne bei 8144 Ziehungen wenigstens einmal herauskommt, und nachtheilig, 1 gegen 1 zu wetten, dass sie bei 8143 Ziehungen wenigstens einmal herauskommt. Für eine vorher besetzte Nummer hätte man:

$$\left(1-\frac{1}{18}\right)^x = \tfrac{1}{2}, \ x = \frac{\log 2}{\log 18 - \log 17} = 12,137\ldots,$$

so dass es nachtheilig sein würde, 1 gegen 1 zu wetten, dass diese Nummer in 12 Ziehungen wenigstens einmal herauskommt, aber da-

gegen vortheilhaft, daſſ ſie in 13 Ziehungen wenigſtens einmal herauskommt. Auch könnte man 1 gegen 1 wetten, daſſ die 90 Nummern in 85 oder 84 Ziehungen wenigſtens einmal herauskommen.*)

Von den Spielern wählten einige diejenigen Nummern, welche ſeit langer Zeit nicht herausgekommen waren, und andere dagegen die Nummern, welche am häufigſten herauskamen. Dieſe beiden Meinungen ſind aber ganz ungegründet; denn obgleich z. B. eine ſich der Gewiſſheit ſehr nähernde Wahrſcheinlichkeit $= 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{100} = 0,997$ vorhanden iſt, daſſ eine beſtimmte Nummer bei 100 ſucceſſiven Ziehungen wenigſtens einmal herauskommt, ſo wäre die Wahrſcheinlichkeit ihres Herauskommens, wenn ſie bei den erſten 88 Ziehungen nicht herausgekommen wäre, in den 12 letzten Ziehungen immer faſt $= \frac{1}{2}$, wie für jede andere beſtimmte Nummer. Was die am häufigſten herausgekommenen Nummern anlangt, ſo kann dieſer Umſtand nur als eine mit der offenbaren Gleichheit der Wahrſcheinlichkeit des Herauskommens aller Nummern bei jeder Ziehung verträgliche Wirkung des Zufalles betrachtet werden. Aber bei allen Hazardſpielen, wo die gleichen oder ungleichen Wahrſcheinlichkeiten bekannt ſind, haben die ſtattgehabten Ereigniſſe auf die Wahrſcheinlichkeit der künftigen keinen Einfluſſ und alle Combinationen, welche ſich die Spieler einbilden mögen, können weder den ſich nach der Regel im vorhergehenden §. ergebenden Gewinn vermehren, noch den Verluſt vermindern.

Bei den öffentlichen Spielen zu Paris, z. B. bei dem Spiele »trente-et-quarante«, iſt der Vortheil des Banquiers bei jedem einzelnen Spiele nur unbeträchtlich, und zwar etwas kleiner, als $\frac{11}{1000}$ jedes Einſatzes;**) allein da bei dieſen Spielen in wenigen Stunden eine ſehr große Anzahl von Partien geſpielt werden; ſo entſpringt daraus für den Banquier doch ein ſicherer Gewinn, welcher jedes Jahr faſt derſelbe iſt und wofür er der öffentlichen Verwaltung, welche ihm das Monopol bewilligt, jährlich 5 bis 6 Millionen Franken zahlen kann. Dieſe Spiele ſind noch verderblicher, als die Lotterie; denn die darin aufs Spiel geſetzte Kapitalſumme beträgt jedes Jahr mehre hundert Millionen Franken und überſteigt bei weitem die Summe, welche in die ganze loterie de France geſetzt wurde.

Es iſt hier nicht der Ort, die Gründe zu unterſuchen, welche

*) Théorie analytique des probabilités, page 198.

**) Wegen der Wahrſcheinlichkeiten dieſes Spieles vergleiche man unſere Abhandlung in dem Journal des Mathématiques von Gergonne, tome XVI., No. 6. Decemb. 1825.

man gewöhnlich für die Beibehaltung der öffentlichen Spiele anzugeben pflegt; wir haben sie nie billigen können, und schon der Umstand, dass sie die Ursache zu so manchem Unglücke und sogar zu Verbrechen sind, ist hinreichend, dass sie von der Regierung untersagt werden, statt den Gewinn mit den Inhabern dieser Spiele zu theilen.*)

§. 23. Das Product aus einem Gewinne und der Wahrscheinlichkeit, denselben zu erhalten, nennt man die mathematische Hoffnung jeder bei irgend einer Speculation interissirten Person. Wenn z. B. dieser Gewinn 60000 Thaler beträgt, und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, wovon er abhängt, ist $=\frac{1}{3}$, so kann die Person, welche diese Summe eventuell erhalten muss, den dritten Theil von 60000 Thaler oder 20000 Thaler als eine Summe betrachten, welche sie wirklich besitzt, und welche man in das Inventarium ihres Vermögens als eine positive Forderung aufnehmen müsste.**)

Allgemein, wenn Jemand bei dem Stattfinden eines Ereignisses E eine Summe g, bei dem Stattfinden eines andern Ereignisses E'

---

*) Dieser Paragraph war bereits niedergeschrieben, als das Finanzgesetz erschien, welches die öffentlichen Spiele vom 1. Januar 1838 an aufhebt.

**) Dieses würde jedoch nur dann erlaubt sein, wenn die in Rede stehende Person eine große Anzahl solcher Summen zu erwarten hätte, wie dieses z. B. bei den Versicherungsanstalten der Fall ist, deren Zustand man untersuchen will. Die Resultate der Wahrscheinlichkeitsrechnung beziehen sich immer auf eine hinreichend große Anzahl ähnlicher Fälle oder Wiederholungen, aber niemals auf einen einzelnen speciellen Fall. Denn in einem solchen Falle findet das fragliche Ereigniss entweder statt, oder nicht. Wenn z. B. eine Urne 2 weiße und 3 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weißen Kugel $=\frac{2}{5}$ und die für den Zug einer schwarzen Kugel $=\frac{3}{5}$; aber damit soll nicht gesagt sein, dass schon bei 5 Ziehungen nothwendig 2 weiße und 3 schwarze Kugeln gezogen werden, sondern dass sich die Anzahlen der gezogenen weißen und schwarzen Kugeln erst bei einer sehr großen Anzahl von Ziehungen, indem die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne gelegt wird, wie 2:3 verhalten werden. So wenig aber die mathematische Wahrscheinlichkeit auf einen einzelnen Fall anwendbar ist, eben so wenig ist es auch die mathematische Hoffnung, welche das Product aus dieser Wahrscheinlichkeit und einer constanten Größe ist. Hat z. B. Jemand die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, bei einem Spiele die Summe von 4000 Thaler zu gewinnen, so ist der Werth seiner Erwartung nach dem Obigen $=\frac{1}{4}.4000=1000$ Thaler; aber Niemand wird ihm für diese Erwartung diesen Werth zahlen, wenn nur ein einziger Versuch gemacht werden soll, wohl aber, wenn eine große Anzahl, z. B. 40000 Versuche gemacht werden. Denn bei diesen 40000 Versuchen würde der Spieler ungefähr 10000 mal gewinnen; also im Ganzen $4000 \times 10000 = 40000000$ Thaler, und folglich betrüge der mittlere oder durchschnittliche Gewinn bei jedem der 40000 Versuche $\frac{40000000}{40000} = 1000$ Thaler. Anmerk. d. Uebers.

eine Summe g', u. s. f. gewinnen muss, und die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind resp. $p, p', p'', \ldots$; so wird ihre mathematische Hoffnung durch die Summe $gp + g'p' + g''p'' + \ldots$ ausgedrückt. Wenn eine oder mehrere der Größen $g, g', g'', \ldots$ Verluste ausdrücken, welche diese Person zu befürchten hat, so muss man ihnen in dieser Summe das Zeichen — geben, und für die, welche eventuelle Gewinne ausdrücken, das Zeichen + behalten. Je nachdem der Totalwerth der mathematischen Hoffnung positiv oder negativ ist, drückt sie eine Vermehrung oder Verminderung des Vermögens aus und muss wirklich unter die ausstehenden Forderungen oder Schulden gerechnet werden, wenn man den Ausfall der betreffenden ungewissen Ereignisse nicht abwarten will. Es ist übrigens wohl zu bemerken, dass, wenn die Gewinne oder Verluste erst nach längern Zeiträumen stattfinden können, man sie auf den betrachteten Zeitpunkt zurück discontiren muss, um ihren wahren Werth zu erhalten, abgesehen von ihrer Ungewissheit. Wenn die Person, deren Vermögenszustand bestimmt werden soll, die Summe g erst nach n Jahren, die Summe g' erst nach n' Jahren, ... erhält, so sind die gegenwärtigen Werthe dieser Summen resp. $\frac{g}{(1+\theta)^n}, \frac{g'}{(1+\theta)^{n'}}, \ldots$, wo θ den Zinsfuß bezeichnet, und folglich ist der gegenwärtige Werth ε dieser Summen nach der Regel der mathematischen Hoffnung:

$$\varepsilon = \frac{gp}{(1+\theta)^n} + \frac{g'p'}{(1+\theta)^{n'}} + \frac{g''p''}{(1+\theta)^{n''}} + \ldots$$

ε ist also der wahre oder gegenwärtige Werth der verschiedenen ungewissen Summen, welche die Person gewinnt, oder verliert und welchen eine andere Person für diese Erwartungen jetzt zahlen kann.

Auf diese Formel und auf die Sterblichkeitstafeln gründet sich die Berechnung der auf eine oder mehrere Personen lautenden Lebensrenten, Lebensversicherungen, Witwenpensionen, *etc.*, wie man in den, speciell über diesen Gegenstand handelnden Werken sehen kann.*)

§. 24. Da der Vortheil, welchen ein Gewinn Jemandem verschafft, von seinem Vermögenszustande abhängt, so hat man diesen relativen Vortheil von der mathemathischen Hoffnung unterschieden und moralische Hoffnung genannt. Wenn er eine unendlich kleine Größe ist, so nimmt man sein Verhältniss zu dem gegenwärtigen Vermögen der betreffenden Person als Maß der moralischen Hoffnung,

*) Vergl. Anhang I.

welche übrigens positiv oder negativ sein kann, je nachdem von einer eventuellen Vermehrung oder Verminderung dieses Vermögens die Rede ist. Durch die Integralrechnung ergeben sich aus diesem Maße alsdann Folgerungen, welche mit den Regeln der Klugheit übereinstimmen, welche uns in unsern Speculationen leiten müssen. In den Resultaten dieser Rechnung hat man auch Gründe gefunden, selbst ein gleiches Spiel nicht zu spielen, die aber vielleicht nicht die besten sind, welche man geben kann. Ein unwidersprechlicher Einwurf gegen das Spiel, wenn es nicht mehr ein bloßes Vergnügen ist, besteht darin, dass durch dasselbe nichts geschafft wird, was an und für sich Werth hat, und dass die Spieler, welche gewinnen, nur ihren Vortheil in dem Unglücke und zuweilen in dem Ruine derer finden können, welche verlieren. Der Handel ist insofern auch ein Spiel, als der Erfolg der klügsten Speculationen immer nur eine starke Wahrscheinlichkeit hat und immer auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit des Verlustes vorhanden ist, welche durch Geschicklichkeit und Umsicht nur vermindert werden kann; allein der Handel vergrößert den Werth der Dinge durch ihren Transport von einem Orte zum andern und in dieser Zunahme des Werthes der Gegenstände findet der Kaufmann eben seinen Gewinn, indem er zugleich auch den Consumenten einen Vortheil verschafft.

§. 25. Wie einfach und natürlich die Regel in §. 21. auch sein mag, so führt sie doch auf eine Schwierigkeit, womit man sich ehedem viel beschäftigt hat.

Zwei Personen A und B spielen das Spiel Wappen oder Schrift; die Bedingungen des Spieles sind: 1) dass die Partie beendigt ist, wenn das Wappen getroffen wird; 2) dass die Person B der Person A zwei Thaler gibt, wenn das Wappen bei dem ersten Wurfe getroffen wird, 4 Thaler, wenn es bei dem zweiten Wurfe getroffen wird, ... und allgemein 2^n Thaler, wenn das Wappen erst bei dem $n$ten Versuche getroffen wird; und 3) dass die Partie ungültig ist, wenn das Wappen nicht in den m ersten Versuchen getroffen wird, ohne welche Bedingung sich die Partie nicht entscheiden lassen würde. Es wird angenommen, dass das Münzstück kein Bestreben hat, eher auf die eine, als auf die andere Seite zu fallen, so dass bei jedem Wurfe die Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Wappens, so wie die für das Treffen der Schrift $= \frac{1}{2}$ ist. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wappen bei dem $n$ten Wurfe und nicht früher getroffen wird, $= \frac{1}{2^n}$; denn hierzu ist erforderlich, dass die Schrift $(n-1)$mal hinter einander getroffen wird, wofür die

Wahrscheinlichkeit $=\frac{1}{2^{n-1}}$ ist, und dass bei dem folgenden Wurfe das Wappen getroffen wird, wofür die Wahrscheinlichkeit $=\frac{1}{2}$ ist. Folglich wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Wappen bei dem $n$ten Wurfe zum ersten Male getroffen wird, durch das Product aus $\frac{1}{2^{n-1}}$ und $\frac{1}{2}$ oder durch $\frac{1}{2^n}$ ausgedrückt. In diesem Falle bekommt die Person A, 2^n Thaler, so dass der Werth ihrer mathematischen Hoffnung $= 1$ Thaler ist, und da sie für jeden der m Würfe, woraus die Partie bestehen kann, denselben Werth hat, so folgt, dass der ganze Werth der mathematischen Hoffnung der Person $A = m$ Thaler ist. Soll also das Spiel gleich sein, so muss die Person A der Person B, m Thaler geben, d. h. 1000 Thaler oder 1000000 Thaler, wenn die Partie aus 1000 oder 1000000 Würfen bestehen kann, und sie müsste ihr sogar eine unendlich große Summe geben, wenn das Spiel ohne Ende fortdauern könnte. Jedoch wird Niemand unter diesen Bedingungen eine etwas beträchtliche Summe, z. B. von 1000 Thalern, aufs Spiel setzen. Hier scheint also die Regel der mathematischen Hoffnung nicht anwendbar zu sein, und um diese Schwierigkeit zu beseitigen, hat man eben die Regel der moralischen Hoffnung und ihr Maß erdacht. Allein man muß bemerken, dass diese Schwierigkeit darin liegt, dass man in den Bedingungen des Spieles von der Möglichkeit abstrahirt hat, ob die Person B auch alle Summen an A zu zahlen im Stande ist, welche nach den Wahrscheinlichkeiten des Spieles zu zahlen sein können. Wie groß nun aber auch das Vermögen von B angenommen werden mag, so ist es doch begrenzt, und wenn man es durch b Thaler ausdrückt, so kann A niemals eine größere Summe, als b bekommen, wodurch die mathematische Hoffnung dieser letzten Person in einem sehr großen Verhältnisse vermindert wird.

Denn es ist immer:

$$b = 2^{\varepsilon}(1+h),$$

wo ε eine ganze Zahl und h eine positive, kleinere Zahl, als die Einheit ist. Wenn $\varepsilon > m$ oder nur $\varepsilon = m$ ist, so kann B alle Summen zahlen, welche A zufallen; aber wenn $\varepsilon < m$ ist, so kann sie B nicht mehr zahlen, wenn nach den ε ersten Würfen das Wappen zum ersten Male getroffen wird. Die mathematische Hoffnung von A beträgt also für diese ε ersten Würfe b Thaler, aber darüber hinaus, d. h. für die $m-\varepsilon$ folgenden Würfe reducirt sie sich auf die Constante b oder auf $2^{\varepsilon}(1+h)$, mit ihren resp. Wahrscheinlich-

keiten von $\frac{1}{2^{\beta+1}}$ bis $\frac{1}{2^m}$ multiplicirt. Bezeichnet man also den vollständigen Werth der mathematischen Hoffnung der Person A oder die Summe, welche sie der Person B geben muss, damit das Spiel gleich ist, mit ε, so hat man:

$$\varepsilon = \beta + \tfrac{1}{2}(1+h)\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{m-\beta-1}}\right)$$

oder:

$$\varepsilon = \beta + (1+h)\left(1 - \frac{1}{2^{m-\beta}}\right),$$

welche Größe nicht mit m fortwährend wächst, sondern im Gegentheil von dieser Zahl fast unabhängig ist, und sich beinahe auf:

$$\varepsilon = \beta + 1 + h$$

reducirt, wenn m sehr groß ist. Nun kann aber das Vermögen von B niemals so groß sein, dass β aufhört, eine wenig beträchtliche Zahl zu sein, und folglich muss A bei diesem Spiele nur eine wenig beträchtliche, zwischen $\beta+1$ und $\beta+2$ liegende Summe wagen. Wenn man annimmt, dass B ein Vermögen von 100 Millionen Thalern besitzt, so findet man, dass 2^{26} die höchste in b enthaltene Potenz von 2 ist, d. h. $\beta = 26$, so dass die Person A schon im Nachtheil sein würde, wenn sie 28 Thaler, oder mehr gegen das bedeutende Vermögen von B aufs Spiel setzen wollte.

Wenn man die Regel der moralischen Hoffnung auf diese Aufgabe anwendet, so ergibt sich für die Summe, welche A aufs Spiel setzen kann, ein anderer Werth, welcher von dem Vermögen der Person A und nicht von dem der Person B abhängig ist;*) allein es scheint uns, dass es bei diesem Spiele die Möglichkeit ist, dass A von B die vollständige Summe erhalten kann, welches der Summe, die A vor dem Anfange des Spieles an B zahlen muss, eine gewisse Grenze setzt.**)

§. 26. Wir schließen dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen über den Einfluss einer unbekannten, einem gewissen Ereignisse günstigen Ursache, wodurch, wie wir sogleich sehen werden, die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der Ereignisse in einer Reihe von Versuchen fortwährend vergrößert wird.

---

*) Théorie analytique des probabilités, page 439.

**) Wegen der moralischen Hoffnung vergl. Anhang II.

So z. B. muss man bei dem Spiele Wappen oder Schrift immer annehmen, dass das Münzstück vermöge seiner physischen Constitution ein Bestreben hat, eher auf die eine, als auf die andere Fläche zu fallen; allein a priori weiß man nicht, ob durch diesen Umstand das Treffen des Wappens oder das der Schrift begünstigt wird, obgleich die Wahrscheinlichkeit, dass dieselbe Fläche des Münzstückes mehrere Male hintereinander oben liegt, dadurch vergrößert wird.

Um dieses nachzuweisen, wollen wir die Wahrscheinlichkeit für das Treffen der durch die physische Constitution des Münzstückes begünstigten Fläche mit $\frac{1}{2}(1+\delta)$ und folglich die für das Treffen der andern Fläche mit $\frac{1}{2}(1-\delta)$ bezeichnen, so dass δ ein kleiner positiver Bruch ist, dessen Werth unbekannt ist, und man auch nicht weiß, welche dieser beiden ungleichen Wahrscheinlichkeiten dem Treffen des Wappens oder der Schrift entspricht. Wenn nur ein Wurf gemacht werden soll, so hat man keinen Grund, anzunehmen, dass die von dem einen der Spieler gewählte Seite des Münzstückes mehr oder weniger begünstigt ist, als die andere, und die Wahrscheinlichkeit ihres Treffens ist folglich $=\frac{1}{2}$, wie wenn $\delta=0$ wäre. Aber wenn zwei Würfe gemacht werden müssen, so ist es vortheilhaft, für die Uebereinstimmung der beiden getroffenen Flächen zu wetten; denn es können 4 Combinationen stattfinden, wovon zwei übereinstimmende Flächen, nämlich zweimal das Wappen, oder zweimal die Schrift geben und zwei ungleichartige, nämlich Wappen und Schrift, oder Schrift und Wappen. Die Wahrscheinlichkeiten der beiden ersten sind die Quadrate von $\frac{1}{2}(1+\delta)$ und $\frac{1}{2}(1-\delta)$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Combinationen stattfinden wird, nach der Regel in §. 10. die Summe dieser Quadrate, oder $=\frac{1}{2}(1+\delta^2)$. Die Wahrscheinlichkeiten der beiden andern Combinationen sind einander gleich und jede wird durch das Product aus $\frac{1}{2}(1+\delta)$ und $\frac{1}{2}(1-\delta)$ ausgedrückt. Folglich ist ihre Summe, oder die Wahrscheinlichkeit des Treffens zweier nicht übereinstimmender Flächen $=\frac{1}{2}(1-\delta^2)$, welche in dem Verhältnisse der Differenz $1-\delta^2$ zu der Summe $1+\delta^2$, oder von $1-\frac{2\delta^2}{1+\delta^2}$ zu 1 kleiner ist, als die Wahrscheinlichkeit für das Treffen zwei übereinstimmender Flächen. Wenn also A um 1 Thaler wettet, dass bei zwei Würfen zwei übereinstimmende Flächen getroffen werden, und B das Gegentheil behauptet; so muss B, damit die Wette gleich wird, $1-\frac{2\delta^2}{1+\delta^2}$ Thaler setzen, d. h. $\frac{99}{101}$ Thaler, wenn δ z. B. $=\frac{1}{10}$ wäre.

Wenn das Münzstück dreimal hintereinander in die Luft geworfen

werden soll, so können 8 verschiedene Combinationen stattfinden, nämlich es kann dreimal Wappen und dreimal Schrift geworfen werden, welches die beiden übereinstimmenden Fälle sind, oder es kann zweimal Wappen und einmal Schrift in drei Fällen, und zweimal Schrift und einmal Wappen in ebenfalls drei Fällen getroffen werden. Wenn man annimmt, dass δ genau $=0$ ist, so sind die Wahrscheinlichkeiten dieser 8 Combinationen einander gleich, und wenn folglich A wieder für die Gleichartigkeit der drei Würfe wettet, so muss der Einsatz von A $\frac{1}{3}$ von dem des B sein. Da aber δ ohne Zweifel nicht $=0$ ist, so würde durch dieses Verhältniss der Einsätze die Person A noch mehr begünstigt werden, als bei zwei successiven Würfen; denn die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der drei Würfe ist die Summe der Cubi von $\frac{1}{2}(1+\delta)$ und $\frac{1}{2}(1-\delta)$, welche sich auf $\frac{1}{4}(1+3\delta^2)$ reducirt, und wenn man sie von der Einheit abzieht, so erhält man unmittelbar die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses, d. h. der Ungleichartigkeit der drei Würfe $=\frac{3}{4}(1-\delta^2)$, welche in dem Verhältnisse von $1-\delta^2$ zu $1+3\delta^2$ oder von $1-\frac{4\delta^2}{1+3\delta_2}$ zu 1, d. h. in einem größern Verhältnisse, als $1-\frac{2\delta^2}{1+\delta^2}$ zu 1, kleiner ist, als das Dreifache der vorhergehenden Wahrscheinlichkeit. Diese Schlüsse lassen sich leicht auf mehr als drei Versuche, und wenn man will, auf andere Spiele, worin mehr, als zwei mögliche Ereignisse, deren unbekannte Wahrscheinlichkeiten ungleich sein können, vorkommen, ausdehnen.

Wenn zwei Personen ein Spiel spielen, wobei die Fertigkeit auf das Resultat einigen Einfluss haben kann, so ist es nicht wahrscheinlich, dass beide Spieler gleiche Fertigkeit haben, und alsdann muss man, wenn man den bessern Spieler nicht kennt, annehmen, dass es der ist, welcher die beiden ersten Partien gewinnt. Aber selbst dann, wenn man den bessern Spieler kennt, ist es nicht immer vortheilhaft, zu wetten, dass er diese beiden Partien gewinnt; denn man würde alsdann von den vier möglichen Combinationen drei gegen und nur eine einzige für sich haben, und wenngleich diese letztere die wahrscheinlichste wäre; so könnte ihre Wahrscheinlichkeit denen der drei andern doch nicht das Gleichgewicht halten.

Im Allgemeinen, es sei p die bekannte Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses E und q die des entgegengesetzten Ereignisses F, so dass $p+q=1$ ist. Ferner wollen wir annehmen, dass irgend eine Ursache die Wahrscheinlichkeit eines dieser beiden Ereignisse, ohne dass man weiß welches, um eine unbekannte Größe α vergrößern und die

des andern Ereignisses folglich um eben diese Größe vermindern könne, und ϖ sei die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe Ereigniss E oder F bei m Versuchen beständig stattfindet. Wenn E das durch die unbekannte Ursache begünstigte Ereigniss ist, so ist die Wahrscheinlichkeit der Gleichartigkeit der m successiven Ereignisse nach der Regel in §. 10:

$$(p+\alpha)^m+(q-\alpha)^m.$$

Denn sie kann auf zwei verschiedene Arten stattfinden, d. h. jenachdem das Ereigniss E oder F bei allen Versuchen eintritt. Wenn dagegen F das begünstigte Ereigniss ist, so wird die Wahrscheinlichkeit der Gleichartigkeit der m successiven Ereignisse durch:

$$(p-\alpha)^m+(q+\alpha)^m$$

ausgedrückt. Da wir nun nicht wissen, welches von den beiden Ereignissen E und F dasjenige ist, dessen Wahrscheinlichkeit vermehrt oder vermindert wird, so sind diese beiden verschiedenen Werthe der Wahrscheinlichkeit der Gleichartigkeit der m successiven Ereignisse für uns gleich möglich. Die Wahrscheinlichkeit jeder derselben ist folglich $=\frac{1}{2}$ und die Summe dieser beiden mit $\frac{1}{2}$ multiplicirten Werthe ist nach der Regel in §. 10. wieder die Totalwahrscheinlichkeit der Gleichartigkeit der m successiven Ereignisse. Es ist also:

$$\varpi=\tfrac{1}{2}(p+\alpha)^m+\tfrac{1}{2}(q-\alpha)^m+\tfrac{1}{2}(p-\alpha)^m+\tfrac{1}{2}(q+\alpha)^m,$$

oder was dasselbe ist:

$$\varpi=P+Q,$$

wenn man der Kürze wegen:

$$P=p^m+\frac{m(m-1)}{1.2}p^{m-2}\alpha^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}p^{m-4}\alpha^4+etc.$$

$$Q=q^m+\frac{m(m-1)}{1.2}q^{m-1}\alpha^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}q^{m-4}\alpha^4+etc.$$

setzt. Wenn die unbekannte Ursache nicht stattfände, d. h. wenn $\alpha=o$ wäre, so wäre die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der m Versuche blos $=p^m+q^m$. Jede Ursache, welche die Wahrscheinlichkeit des einen der beiden entgegengesetzten Ereignisse E und F vergrößert, ohne dass man weiß welche, vergrößert also auch die Wahrscheinlichkeit der Gleichartigkeit der Ereignisse in einer Reihe successiver Versuche, weil sie den Werth von ϖ offenbar größer macht, als p^m+q^m.

Zweites Kapitel.

Fortsetzung der allgemeinen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Wahrscheinlichkeiten der Ursachen und der künftigen Ereignisse, welche aus der Beobachtung vergangener oder stattgehabter Ereignisse abgeleitet werden.

§. 27. Die in dem vorhergehenden Kapitel aufgestellten Regeln setzten die Wahrscheinlichkeit irgend welcher Ereignisse als bekannt voraus und hatten zum Zwecke, die Wahrscheinlichkeiten anderer, aus jenen zusammengesetzter Ereignisse daraus abzuleiten. In dem gegenwärtigen Kapitel aber wollen wir die Regeln aufstellen, welche zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ursachen nach den beobachteten Ereignissen, und folglich der Wahrscheinlichkeiten künftiger Ereignisse dienen. Aber zuvor wird es zweckmäßig sein, den Begriff genau zu bestimmen, welchen man mit dem Ausdrucke Ursache verbinden muss, und welcher von dem in der gewöhnlichen Sprache üblichen verschieden ist.

Wenn man im gewöhnlichen Leben sagt, dass irgend etwas die Ursache von einem Ereignisse ist, so schreibt man diesem Etwas die Fähigkeit zu, dieses Ereigniss nothwendig hervorbringen zu müssen, ohne jedoch damit ausdrücken zu wollen, dass man die Natur dieser Kraft oder Fähigkeit und die Art ihrer Wirkung kenne. Am Ende dieses Kapitels werden wir auf diesen Begriff der Causalität wieder zurückkommen, und für den Augenblick genügt die Bemerkung, dass der Ausdruck Ursache in der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer ausgedehntern Bedeutung genommen wird, indem man hier unter einer Ursache C irgend eines Ereignisses E dasjenige versteht, welches dem Stattfinden des Ereignisses E die ihm eigenthümliche abstracte Wahrscheinlichkeit ertheilt, während in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes C die Ursache dieser Wahrscheinlichkeit und nicht die des Ereignisses selbst wäre, und wenn das Ereigniss E wirklich stattfindet; so wird dieses durch die Vereinigung der Ursache C mit andern Ursachen oder Umständen, welche auf die eigene abstracte Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses keinen Einfluss haben, bewirkt. Wenn p diese bekannte oder unbekannte abstracte oder eigenthümliche Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E ist, welche im Allgemeinen von seiner Wahrscheinlichkeit verschieden ist; so ertheilt die Ursache C zu gleicher Zeit dem entgegengesetzten Ereignisse F die Wahrscheinlichkeit $1-p$. Wenn $p=1$ ist, so bringt die Ursache C das Ereigniss E nothwendig hervor und ist die Ursache desselben in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes, und wenn $p=o$ ist; so ist C die Ursache von F.

Die Gesammtheit der Ursachen, welche vereinigt ein gewisses Ereigniss hervorbringen, ohne auf die Größe seiner abstracten Wahrscheinlichkeit, d. h. auf das Verhältniss der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle zur Anzahl aller möglichen Fälle Einfluss zu haben, ist das, was man unter dem Zufalle verstehen muss. So ist z. B. bei den Würfelspielen das bei jedem Wurfe stattfindende Ereigniss eine Folge von der Anzahl der Flächen, der Unregelmäßigkeiten der Formen und der Dichtigkeiten der Würfel und dem Schütteln der Würfel in dem Becher. Nun sind aber diese Bewegungen der Würfel durch das Schütteln Ursachen, welche auf die abstracte Wahrscheinlichkeit des Treffens einer bestimmten Fläche keinen Einfluss haben; ihr Zweck ist blos, den Einfluss der Lage der Würfel in dem Becher vor diesen Bewegungen aufzuheben, damit diese ursprüngliche Lage der Würfel keinem der Spieler bekannt sei, und wenn dieser Zweck erreicht ist; so hängt die abstracte Wahrscheinlichkeit für das Treffen jeder Fläche des Würfels nur noch von der Anzahl der Flächen und von den physischen Unvollkommenheiten des Würfels ab, welche die abstracten Wahrscheinlichkeiten für das Treffen der verschiedenen Flächen ungleich machen können. Man sagt, dass etwas zufällig gemacht ist, wenn es so geschieht, dass an den resp. abstracten Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Ereignisse nichts geändert ist. So zieht man z. B. aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln zufällig eine Kugel, wenn man nicht auf ihre Anordnung innerhalb dieser Urne sieht, ehe man hineingreift. Sind alle Kugeln von demselben Durchmesser, so kann die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, offenbar nur von der Anzahl der weißen und der Anzahl der schwarzen Kugeln abhängen, und man beweis't, dass sie dem Verhältnisse der ersten dieser beiden Zahlen zu der Summe beider gleich ist.

Die Ursache C kann eine physische oder moralische sein. Bei dem Spiele Wappen oder Schrift ist es die physische Constitution des Münzstückes, welche dem Treffen des Wappens oder der Schrift eine im Allgemeinen wenig von $\frac{1}{2}$ verschiedene abstracte Wahrscheinlichkeit ertheilt, während bei einem Criminalurtheile die abstracte Wahrscheinlichkeit der Wahrheit oder des Irrthums des Urtheiles jedes Geschworenen durch seine Moralität, worunter wir seine Fähigkeit und Gewissenhaftigkeit mit verstehen, bestimmt wird. Zuweilen besteht die Ursache C aus der Vereinigung einer moralischen und einer physischen Ursache. So hängt z. B. bei jeder Art von Messungen oder Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von gegebener Größe von der Geschicklichkeit des Beobachters und von der mehr oder weniger vollkommenen Construction des Instrumentes ab, dessen er sich bedient. Aber in allen

Fällen werden die verschiedenen Ursachen der Ereignisse in der Wahrscheinlichkeitsrechnung unabhängig von ihrer besondern Natur und blos in Beziehung auf die Größe der Wahrscheinlichkeiten, welche sie hervorbringen, betrachtet, und eben deswegen ist diese Rechnung sowohl auf moralische, als auf physische Gegenstände anwendbar. Jedoch ist bei den meisten Untersuchungen die Wahrscheinlichkeit, welche eine gegebene Ursache C bestimmt, nicht a priori bekannt, und zuweilen ist sogar die Ursache eines Ereignisses, oder ihre Wahrscheinlichkeit selbst unbekannt. Wenn die Wahrscheinlichkeit constant ist, so bestimmt man sie, wie wir in der Folge sehen werden, durch eine hinreichend lange Reihe von Versuchen; aber bei dem Urtheile eines Geschworenen z. B. ändert sich die Wahrscheinlichkeit des Irrthums von einem Geschworenen zum andern, und für denselben Geschworenen ohne Zweifel auch in verschiedenen Angelegenheiten, und da es nicht möglich ist, durch Wiederholung der Versuche für jeden Geschworenen und jede Art von Prozessen die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit des Irrthums eines Geschworenen aus der Beobachtung abzuleiten; so muss man, wie wir in der Folge sehen werden, eine gewisse Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf die Gesammtheit der Geschworenen des ganzen Sprengels eines Assisenhofes suchen, und diese ist zur Auflösung der Aufgaben, welche den speciellen Gegenstand des fünften Kapitels bilden, auch zureichend.

Oft gibt es mehrere verschiedene Ursachen, welche in Verbindung mit dem Zufalle ein gegebenes Ereigniss E, oder das entgegengesetzte F hervorbringen können, und ehe das eine oder das andere dieser beiden Ereignisse stattgehabt hat, hat jede dieser Ursachen eine gewisse Wahrscheinlichkeit, welche sich ändert, sobald das Ereigniss E oder F beobachtet ist. Zunächst wollen wir nun, indem wir die abstracte Wahrscheinlichkeit, welche jede dieser möglichen Ursachen, wenn sie gewiss wäre, dem Stattfinden des Ereignisses E oder F ertheilen würde, als bekannt annehmen, die Wahrscheinlichkeiten aller dieser Ursachen nach der Beobachtung und dann die Wahrscheinlichkeit jedes andern künftigen Ereignisses, welches von denselben Ursachen, als E und F abhängt, bestimmen.

§. 28. Es sei also E ein beobachtetes Ereigniss. Wir wollen annehmen, dass sein Stattfinden m verschiedenen Ursachen zugeschrieben werden kann, dass diese m Ursachen die allein möglichen sind, dass sie sich gegenseitig ausschließen und dass sie vor der Beobachtung des Ereignisses E alle gleich wahrscheinlich waren. Durch das Stattfinden des Ereignisses E sind diese hypothetischen Ursachen ungleich wahrscheinlich gemacht, und es kommt darauf an, die sich aus der Beobachtung

ergebende Wahrscheinlichkeit jeder derselben zu bestimmen, was vermittelst des folgenden Lehrsatzes geschehen kann:

Die Wahrscheinlichkeit jeder der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses wird erhalten, wenn man die Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache dem Stattfinden des Ereignisses ertheilen würde, wenn sie gewiss wäre, durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieses Ereignisses dividirt, welche aus allen Ursachen, denen man es zuschreiben kann, entspringen würden, wenn diese Ursachen gewiss wären.

Es seien:

$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_n, \ldots C_m$$

die m möglichen Ursachen des Ereignisses E und:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n, \ldots p_m$$

die diesen verschiedenen Ursachen entsprechenden bekannten Wahrscheinlichkeiten seines Stattfindens, so dass p_n die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E ausdrückt, welche stattfinden würde, wenn die Ursache C_n allein vorhanden, oder was dasselbe ist, wenn sie gewiss wäre, wodurch alle übrigen ausgeschlossen würden. Ferner seien:

$$\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots \varpi_n, \ldots \varpi_m$$

die unbekannten Wahrscheinlichkeiten derselben Ursachen, so dass ϖ_n die Wahrscheinlichkeit der Ursache C_n, d. h. die Wahrscheinlichkeit ist, dass diese Ursache das Stattfinden von E herbeigeführt hat; so kommt es darauf an, zu beweisen, dass

$$\varpi_n = \frac{p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n \ldots + p_m}$$

ist. Von welcher Beschaffenheit das Ereigniss E nun aber auch sein mag, so kann man, um die Begriffe zu fixiren, es doch immer als den Zug einer weißen Kugel aus einer Urne, welche weiße und schwarze Kugeln enthält, betrachten. Zu dem Zwecke wollen wir annehmen, dass man m solcher Urnen:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, \ldots A_m$$

habe, woraus die weiße Kugel hat gezogen werden können, und dass in einer beliebigen A_n derselben das Verhältniss der Anzahl der weißen Kugeln zu der Anzahl aller darin enthaltenen Kugeln dem Bruche p_n

gleich ist. Jede dieser Urnen, in welche man zufällig greifen kann, um eine weiße Kugel herauszuziehen, stellt eine der Ursachen des Treffens einer weißen Kugel dar. Die Urne A_n entspricht der Ursache C_n und die Aufgabe besteht darin, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die weiße Kugel aus der Urne A_n gezogen ist.

Zu dem Zwecke wollen wir die Brüche $p_1, p_2, p_3, \ldots$ als auf denselben Nenner gebracht annehmen, so dass:

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu},\ p_2 = \frac{\alpha_2}{\mu},\ \ldots\ p_n = \frac{\alpha_n}{\mu},\ \ldots\ p_m = \frac{\alpha_m}{\mu}$$

ist, wo der Nenner μ und die Zähler $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ganze Zahlen sind. Die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus der Urne A_n wird nicht geändert, wenn man annimmt, dass sie α_n weiße und μ weiße und schwarze Kugeln enthält, und dasselbe gilt in Beziehung auf die übrigen Urnen. Da die jetzt in jeder Urne enthaltene Gesammtzahl von Kugeln für alle dieselbe ist, so folgt aus dem Lehrsatze in §. 10., dass, wenn man alle diese Kugeln in dieselbe Urne A legt, indem man die der Urne A_1 mit der Zahl 1, die der Urne A_2 mit der Zahl 2, u. s. f. bezeichnet, die Wahrscheinlichkeit ϖ_n, dass die aus dem Systeme der Urnen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gezogene weiße Kugel aus der Urne A_n gezogen ist, der Wahrscheinlichkeit gleich ist, dass eine aus der Urne A gezogene weiße Kugel mit der Zahl n bezeichnet ist, welche letzte Wahrscheinlichkeit das Verhältniss von α_n zu der Summe der m Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zum Werthe hat, weil diese Summe die Gesammtzahl der in der Urne A enthaltenen weißen Kugeln ist, worunter sich α_n weiße Kugeln befinden, welche mit der Zahl n bezeichnet sind. Man hat also auch:

$$\varpi_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \ldots + \alpha_m},$$

und diese Größe stimmt vermöge der vorhergehenden Gleichungen mit dem obigen Ausdrucke für ϖ_n überein, was bewiesen werden sollte.

§. 29. Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten des Stattfindens mehrerer successiver Ereignisse muss man nicht blos den Einfluss in Betracht ziehen, welchen das Stattfinden des einen derselben auf die Wahrscheinlichkeit des folgenden haben kann (§. 9.), sondern zuweilen muss man bei der Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit auch auf die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Ursachen des vorhergehenden Ereignisses oder auf die verschiedenen Arten, auf welche es hat stattfinden können, Rücksicht nehmen, was z. B. bei der folgenden Aufgabe der Fall ist.

Gesetzt, man hätte eine Anzahl m von Urnen $A, B, C, D, \ldots$ mit weißen und schwarzen Kugeln und die Wahrscheinlichkeiten des Zuges einer weißen Kugel aus den Urnen $A, B, C, \ldots$ wären resp. $a, b, c, \ldots$ Aus einer dieser Urnen zieht man zufällig eine erste Kugel, dann eine zweite Kugel aus den Urnen, woraus die erste nicht gezogen ist, hierauf eine dritte Kugel aus einer der Urnen, woraus die beiden ersten nicht gezogen sind, u. s. f., d. h. es wird nach jeder Ziehung die Urne, woraus eine Kugel gezogen ist, hinweggenommen. Man soll nun die Wahrscheinlichkeit bestimmen, auf diese Weise n weiße Kugeln in n Ziehungen zu ziehen, wo n kleiner als m oder $= m$ ist.

Wir wollen der Kürze wegen

$$a + b + c + d + \text{etc.} = s_1,$$
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd + \text{etc.} = s_2,$$
$$abc + abd + bcd + \text{etc.} = s_3,$$
$$abcd + \text{etc.} = s_4,$$
$$\text{etc.}$$

setzen, so daß s_1 die Summe der Brüche $a, b, c, d, \ldots$, s_2 die Summe der Producte aus je zwei derselben von der Anzahl $\frac{m(m-1)}{1.2}$, s_3 die Summe der Producte aus je drei derselben von der Anzahl $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ bezeichnet, u. s. f. Die Wahrscheinlichkeit, bei dem ersten Zuge eine weiße Kugel zu ziehen, ist $= \frac{1}{m} s_1$. Wenn die bei diesem Versuche gezogene weiße oder schwarze Kugel aus der Urne A gezogen ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei dem zweiten Zuge eine weiße Kugel zu ziehen, $= \frac{1}{m-1}(s_1 - a)$. Diese Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{1}{m-1}(s_1 - b)$, wenn die erste Kugel aus der Urne B gezogen ist; sie ist $= \frac{1}{m-1}(s_1 - c)$, wenn diese erste Kugel aus der Urne C gezogen ist, u. s. f. Hieraus und aus den Regeln in §. **9** und **10**. folgt, daß die vollständige Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei der zweiten Ziehung durch:

$$\frac{\alpha(s_1 - a)}{m-1} + \frac{\beta(s_1 - b)}{m-1} + \frac{\gamma(s_1 - c)}{m-1} + \text{etc.}$$

ausgedrückt wird, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ resp. die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, dass die Kugel bei dem ersten Versuche aus der Urne A, der Urne B, der Urne $C, \ldots$ gezogen ist. Nun sind aber diese Wahrscheinlichkeiten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nicht einander gleich,*) und nach dem vorhergehenden §. ist:

$$\alpha = \frac{a}{s_1},\ \beta = \frac{b}{s_1},\ \gamma = \frac{c}{s_1},\ etc.$$

Aber da:

$$a(s_1 - a) + b(s_1 - b) + c(s_1 - c) + etc. = 2 s_2$$

ist, so ist folglich die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei dem zweiten Versuche $= \frac{2 s_2}{(m-1) s_1}$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei dem dritten Versuche $= \frac{1}{m-2} \times (s_1 - a - b)$, wenn die in den beiden ersten Ziehungen gezogenen beiden weißen oder schwarzen Kugeln aus den Urnen A und B gezogen sind; sie ist $= \frac{1}{m-2}(s_1 - a - c)$, wenn diese beiden Kugeln aus den Urnen A und C gezogen sind, u. s. f. Der vollständige Werth der Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei dem dritten Versuche ist also:

$$\frac{g(s_1 - a - b)}{m-2} + \frac{h(s_1 - a - c)}{m-2} + \frac{k(s_1 - b - c)}{m-2} + etc.,$$

wo $g, h, k, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, dass die bei den beiden ersten Versuchen gezogenen Kugeln aus den Urnen A und B, A und C, B und $C, \ldots$ gezogen sind, und welche nach dem vorhergehenden §. durch:

$$g = \frac{ab}{s_2},\ h = \frac{ac}{s_2},\ k = \frac{bc}{s_2},\ etc.$$

ausgedrückt werden, und da

$$ab(s_1 - a - b) + ac(s_1 - a - c) + bc(s_1 - b - c) + etc. = 3 s_3$$

---

*) Wegen Nichtberücksichtigung dieses Umstandes ist die Auflösung dieser Aufgabe in §. 17. unserer Abhandlung über das Verhältniss der männlichen und weiblichen Geburten unrichtig, woraus wir auch eine falsche Folgerung gezogen haben.

ist, so verwandelt sich die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei dem dritten Versuche in:

$$\frac{3s_3}{(m-3)s_2}.$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht beliebig weit fortsetzen, und folglich sind die Brüche:

$$\frac{s_1}{m}, \frac{2s_2}{(m-1)s_1}, \frac{3s_3}{(m-2)s_2}, \ldots \frac{ns_n}{(m-n+1)s_{n-1}}$$

die Wahrscheinlichkeiten, bei dem ersten, zweiten, dritten, ... $n$ten Versuche eine weiße Kugel zu ziehen, so daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit das Product aus diesen n Brüchen ist (§. 5.), welches sich auf $\frac{1}{\mu}s_n$ reducirt, wenn man:

$$\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

setzt, wo μ die Anzahl der Producte aus je n der m Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ deren Summe s_n bezeichnet, ist.

Von der Richtigkeit dieses Werthes $\frac{1}{\mu}s_n$ überzeugt man sich, wenn man bemerkt, daß jedes dieser Producte die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, aus n bestimmten der Urnen $A, B, C, D, \ldots$, n weiße Kugeln zu ziehen, und daß folglich der Quotient aus der Summe aller dieser Producte und ihrer Anzahl die Wahrscheinlichkeit ist, aus n zufällig gewählten dieser Urnen n weiße Kugeln zu ziehen, welche offenbar der gesuchten Wahrscheinlichkeit gleich ist. Wenn $n = m$ ist, so hat man $\mu = 1$ und diese Wahrscheinlichkeit ist $= s_m$, was unmittelbar aus der Regel in §. 5. folgt.

§. **30.** Es sei nun E' ein anderes, von E verschiedenes, aber von denselben Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ abhängiges Ereigniß und durch:

$$p'_1, p'_2, \ldots p'_n, \ldots p'_m$$

wollen wir die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses E' in Beziehung auf diese verschiedenen Ursachen bezeichnen, so daß p'_n die gegebene Wahrscheinlichkeit ist, daß das Ereigniß E' stattfinden würde, wenn die Ursache C_n gewiß wäre. Da aber diese Ursache blos wahrscheinlich und ihre Wahrscheinlichkeit durch ϖ_n bezeichnet ist, so ist das Statt=

finden von E' vermöge dieser Ursache ein zusammengesetztes Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit durch das Product dieser beiden Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt wird (§. 5.). Ferner ist die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E' die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die m verschiedenen Arten, auf welche dieses Ereigniss stattfinden kann (§. 10.), d. h. die Summe der Werthe von $p'_n \varpi_n$, welche sich auf die m möglichen Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ von E und E' beziehen. Bezeichnen wir diese vollständige Wahrscheinlichkeit von E' mit ϖ', so haben wir folglich:

$$\varpi' = p'_1 \varpi' + p'_2 \varpi_2 + \ldots + p'_n \varpi_n + \ldots + p'_m \varpi_m$$

oder, wenn wir für $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ ihre Werthe setzen:

$$\varpi' = \frac{p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + \cdots + p_n p'_n + \cdots + p_m p'_m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots + p_m}.$$

Dieses ist die Formel, welche zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse nach der Beobachtung vergangener oder stattgehabter Ereignisse dient. Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch ohne Hülfe der gemeinschaftlichen Ursachen der Ereignisse E und E', wenn man sie als zwei zusammengesetzte Ereignisse betrachtet, welche von demselben einfachen Ereignisse abhängen, und die Schlüsse, welche uns darauf geführt haben, sind ebenfalls auf diese andere Betrachtungsweise der Aufgabe anwendbar; aber man kann sie, wenn man will, unmittelbar auf die vorhergehende zurückführen.

Denn wenn E und E' zwei aus demselben Ereignisse G zusammengesetzte Ereignisse sind und G kann, ehe das Ereigniss E beobachtet ist, verschiedene gleichwahrscheinliche abstracte Wahrscheinlichkeiten:

$$g_1, g_2, \ldots g_n, \ldots g_m$$

haben; so kann man sie als eben so viele verschiedene Ursachen von E und E' betrachten. Nimmt man also g_n für die im Vorhergehenden mit C_n bezeichnete Ursache, so ist die Wahrscheinlichkeit von g_n der Werth von ϖ_n, welchen wir gefunden haben, d. h. ϖ_n ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit von G gleich g_n ist, und der vorhergehende Ausdgruck von ϖ' ist alsdann die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden von E', welche sich aus den m möglichen Werthen der Wahrscheinlichkeit von G ergibt. In dieser Formel drückten p_n und p'_n die gegebenen Wahrscheinlichkeiten des Stattfindens von E und E' aus, wenn g_n zuverlässig die Wahrscheinlichkeit von G wäre.

§. **31.** Man muss diese Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von E' nach der Beobachtung von E nicht mit irgend einem Einflusse des

Stattfindens vergangener Ereignisse auf das der zukünftigen, dessen Annahme ungereimt sein würde, verwechseln. Wenn wir z. B. sicher wissen, dass eine Urne A drei weiße und eine schwarze Kugel enthält, so ist es für uns gewiss, dass die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel $= \frac{3}{4}$ ist. Wenn folglich das Ereigniss E' in der Ziehung zwei weißer Kugeln aus der Urne A, indem die erste gezogene Kugel wieder hineingelegt wird, besteht, so ist die Wahrscheinlichkeit von E' das Quadrat von $\frac{3}{4}$ oder $\frac{9}{16}$, von welcher Art das Ereigniss E, welches wir haben beobachten können, auch sein mag, und wenn wir annehmen, dass E die successive Ziehung einer gewissen Anzahl weißer Kugeln und einer gewissen Anzahl schwarzer Kugeln aus der Urne A, welche jedesmal wieder in diese Urne gelegt werden, bedeutet; so können wir ohne Rücksicht auf das Verhältniss dieser beiden Zahlen immer 9 gegen 7 wetten, dass das Ereigniss E' stattfinden wird. Aber wenn die Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses G uns nicht bekannt ist und wir blos wissen, dass sie nur gewisse Werthe haben kann, so gibt uns die Beobachtung des Ereignisses E die Wahrscheinlichkeit jedes derselben, woraus wir alsdann die Wahrscheinlichkeit von E' ableiten. Diese Beobachtung vermehrt oder vermindert unsern Grund zu der Annahme des Stattfindens des Ereignisses E' ohne auf dieses künftige Ereigniss oder seine abstracte eigene Wahrscheinlichkeit irgend einen Einfluss zu haben, so dass für Jemanden, welcher irgend ein anderes, von demselben einfachen Ereignisse G abhängiges Ereigniss E_1 beobachtet hätte, der Grund zu der Annahme des Stattfindens von E' weit stärker oder geringer sein könnte, als für uns, wodurch an der eigenthümlichen oder abstracten Wahrscheinlichkeit von E' nichts geändert würde.

Hinsichtlich des Falles zweier Personen, wovon die eine ein Ereigniss E und die andere ein Ereigniss E_1, die beide aus demselben Ereignisse G zusammengesetzt sind, beobachtet hat, ist zu bemerken, dass, wenn das Ereigniss E_1 das Ereigniss E und außerdem noch etwas mehr in sich begreift, die Meinung der zweiten Person hinsichtlich des Stattfindens eines neuen, ebenfalls von G abhängigen Ereignisses E' richtiger sein wird, als die der ersten Person und vor dieser den Vorzug verdient (§. 1.). Wenn wir annehmen, dass die Beobachtung des Ereignisses E_1 auf eine Wahrscheinlichkeit k des künftigen Ereignisses E' und die des Ereignisses E auf eine Wahrscheinlichkeit h desselben künftigen Ereignisses geführt hat; so hat die zweite Person mehr Grund, k gegen $1 - k$ zu wetten, als die erste, h gegen $1 - h$ zu wetten, dass das Ereigniss E' stattfinden wird, die Brüche h und k mögen größer oder kleiner, als $\frac{1}{2}$ und die Differenz $h - k$ positiv oder negativ sein.

§. **32.** Ehe wir weiter gehen, wird es zweckmäßig sein, einige Anwendungsbeispiele der vorhergehenden Ausdrücke von ϖ_n und ϖ', welche wir zunächst der Kürze halber auf die Form:

$$\varpi_n = \frac{p_n}{\Sigma p_n}, \quad \varpi' = \frac{\Sigma p_n p'_n}{\Sigma p_n}$$

bringen wollen, wo das Zeichen Σ eine Summe andeutet, welche sich auf die m Werthe des Index n, von $n=1$ bis $n=m$ erstreckt, mitzutheilen.

Man weiß, daſſ eine Urne B, m weiße oder schwarze Kugeln enthält, man hat eine weiße Kugel aus derselben gezogen und soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daſſ diese Urne n weiße Kugeln enthält. In Beziehung auf die Anzahl der in der Urne enthaltenen weißen Kugeln kann man m verschiedene Voraussetzungen machen, nämlich man kann annehmen, daſſ sie m weiße Kugeln, oder $m-1$ weiße Kugeln und 1 schwarze, oder $m-2$ weiße und 2 schwarze, ... oder endlich, daſſ sie 1 weiße und $m-1$ schwarze Kugeln enthält. Da alle diese Voraussetzungen gleich möglich sind und sich gegenseitig ausschließen, so kann man sie für die m Ursachen C_1, C_2, C_3, ... des Ereignisses E nehmen, welches hier der Zug einer weißen Kugel aus der Urne B ist. In der Voraussetzung aber, daſſ sich unter den m Kugeln der Urne B, n weiße befinden, wäre die Wahrscheinlichkeit dieses Zuges das Verhältniſſ von n zu m, und man hat also:

$$p_n = \frac{n}{m},$$

woraus folgt:

$$\Sigma p_n = \tfrac{1}{2}(m+1),$$

und mithin ist:

$$\varpi_n = \frac{2n}{m(m+1)}$$

die Wahrscheinlichkeit, daſſ die Urne B wirklich n weiße Kugeln enthält. Sie kann nur dann $=\frac{1}{2}$ sein, wenn $m=n=3$ ist. Im Allgemeinen ist die Wahrscheinlichkeit, daſſ die Urne B nur weiße Kugeln enthält, oder daſſ $n=m$ ist, nachdem eine weiße Kugel herausgezogen ist, $=\frac{2}{m+1}$.

Wenn das Ereigniſſ E' der Zug einer neuen weißen Kugel aus der Urne B ist, so ist seine Wahrscheinlichkeit ϖ' verschieden, je nach-

dem die bereits gezogene weiße Kugel wieder in die Urne gelegt ist, oder nicht.

Im ersten Falle hat man:

$$p'_n = p_n = \frac{n}{m}, \quad \Sigma p_n p'_n = \frac{1}{m^2} \Sigma n^2;$$

aber bekanntlich ist:

$$\Sigma \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}, \quad \Sigma n = \frac{m(m+1)}{1.2},$$

folglich:

$$\Sigma n^2 = 2\Sigma \frac{n(n+1)}{1.2} - \Sigma n = \frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3},$$

und mithin:

$$\varpi' = \frac{2m+1}{3m}.$$

Da im zweiten Falle die Gesammtanzahl der weißen und schwarzen Kugeln, so wie die der weißen allein, welche in der Urne B enthalten sind, bei dem zweiten Versuche um eine Einheit vermindert ist, so hat man:

$$p'_n = \frac{n-1}{m-1}, \quad \Sigma p_n p'_n = \frac{1}{m(m-1)} \Sigma n(n-1),$$

aber wieder:

$$p_n = \frac{n}{m}, \quad \Sigma p_n = \tfrac{1}{2}(m+1),$$

und wegen:

$$\Sigma \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}$$

ergibt sich:

$$\varpi' = \tfrac{2}{3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus einer Urne, woraus bereits eine Kugel von dieser Farbe gezogen, aber nicht wieder hineingelegt ist, ist also von der Gesammtzahl m der in dieser Urne enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln unabhängig und immer

$= \frac{2}{3}$. Der Werth von ϖ' für den ersten Fall reducirt sich auch auf diesen Bruch $\frac{2}{3}$, wie es auch der Fall sein muss, wenn m eine sehr große Zahl ist, welche man als unendlich ansehen kann.

Wenn man wüsste, dass von den ursprünglich in der Urne B enthaltenen m weißen oder schwarzen Kugeln $m-1$ weiße Kugeln gezogen sind, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass die noch darin gebliebene Kugel auch eine weiße ist, $= \frac{m}{m+1}$. Denn man könnte alsdann nur zwei Voraussetzungen C_1 und C_2 machen, nämlich, dass alle in der Urne B enthaltenen m Kugeln weiß sind, oder dass sich eine schwarze darunter befindet. In der ersten Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses die Gewissheit und in der zweiten Voraussetzung ist diese Wahrscheinlichkeit, d. h. die des Ziehens von $m-1$ weißen Kugeln aus der Urne B dieselbe, als die Wahrscheinlichkeit, dass die schwarze Kugel in der Urne bleibt, und da die in der Urne zurückbleibende Kugel eben sowohl jede der m darin enthaltenen Kugeln sein kann; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses die schwarze Kugel ist, $= \frac{1}{m}$. Man hat also:

$$p_1 = 1,\ p_2 = \frac{1}{m},$$

folglich:

$$\varpi' = \frac{p_1}{p_1 + p_2} = \frac{m}{m+1}$$

für die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese, d. h. für die Wahrscheinlichkeit, dass die in der Urne bleibende Kugel, wie alle aus derselben gezogenen Kugeln, weiß ist. Der Fall, wo $m = 1$ ist, ist in diesem Werthe von ϖ_1, so wie in dem zweiten der vorhergehenden Werthe von ϖ' nicht mit begriffen.

§. 33. Wir wollen noch folgende unmittelbare Anwendung der vorhergehenden Formeln anführen, wo man die Gesammtzahl der in der Urne B enthaltenen weißen oder schwarzen Kugeln nicht kennt, und z. B. blos weiß, dass diese Zahl nicht größer sein kann, als 3. Das beobachtete Ereigniss E besteht in dem Treffen von x weißen Kugeln in einer Reihe von n Ziehungen, indem man die aus der Urne B gezogene weiße oder schwarze Kugel jedesmal wieder hineinlegt. Wenn x weder $= o$, noch $= n$ ist, so kann man in Beziehung auf die in der Urne B enthaltenen Kugeln nur drei Voraussetzungen machen, nämlich 1) die Voraussetzung C_1, dass sie eine weiße

und eine schwarze Kugel enthält, 2) die Voraussetzung C_2, dass sie zwei weiße und eine schwarze Kugel enthält und 3) die Voraussetzung C_3, dass sie zwei schwarze Kugeln und eine weiße enthält. Die diesen drei verschiedenen Ursachen oder Hypothesen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses E sind resp.:

$$p_1 = (\tfrac{1}{2})^x (\tfrac{1}{2})^{n-x},\ p_2 = (\tfrac{2}{3})^x (\tfrac{1}{3})^{n-x},\ p_3 = (\tfrac{1}{3})^x (\tfrac{2}{3})^{n-x},$$

oder was dasselbe ist:

$$p_1 = \frac{1}{2^n},\ p_2 = \frac{2^x}{3^n},\ p_3 = \frac{2^{n-x}}{3^n},$$

und wenn man der Kürze wegen:

$$3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x} = \mu$$

setzt, so hat man auch:

$$\varpi_1 = \frac{3^n}{\mu},\ \varpi_2 = \frac{2^{n+x}}{\mu},\ \varpi_3 = \frac{2^{2n-x}}{\mu}$$

als die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen oder Hypothesen C_1, C_2, C_3. Wenn man den Zug einer neuen weißen Kugel als das künftige Ereigniss E' annimmt, so sind die Wahrscheinlichkeiten von E' in Beziehung auf diese drei Ursachen oder Hypothesen resp.:

$$p'_1 = \tfrac{1}{2},\ p'_2 = \tfrac{2}{3},\ p'_3 = \tfrac{1}{3}$$

und folglich ist die vollständige Wahrscheinlichkeit ϖ' dieses Ereignisses:

$$\varpi' = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot 3^n + \tfrac{2}{3} \cdot 2^{n+x} + \tfrac{1}{3} \cdot 2^{2n-x}}{3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}}.$$

Wenn $n = 2x$ ist, so hat man:

$$\varpi_1 = \frac{9^x}{9^x + 2 \cdot 8^x},$$

$$\varpi_2 = \varpi_3 = \frac{8^x}{9^x + 2 \cdot 8^x},$$

$$\varpi' = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot 9^x + 8^x}{9^x + 2 \cdot 8^x} = \tfrac{1}{2}.$$

Der Werth von ϖ' ist, wie es auch der Fall sein muss, $= \tfrac{1}{2}$. Denn da eben so viel weiße, als schwarze Kugeln aus der Urne B gezogen sind, so ist kein Grund vorhanden, weswegen man annehmen

sollte, dass bei einem neuen Zuge eher eine weiße, als eine schwarze Kugel gezogen werden sollte. Jedoch muss 9^x größer sein, als das Doppelte von 8^x oder $x > 5$, damit man mehr als 1 gegen 1 wetten kann, dass die in der Urne B enthaltene Anzahl weißer Kugeln der darin enthaltenen Anzahl schwarzer Kugeln gleich ist, oder dass diese Urne eine weiße und eine schwarze Kugel enthält. Die Wahrscheinlichkeit ϖ_1 dieser Hypothese ist sehr wenig von der Gewissheit verschieden, wenn x eine sehr große Zahl ist.

Wenn i eine ganze Zahl ist und man $x = 2i, n = 3i$ hat, so ergibt sich:

$$\varpi' = \frac{\frac{1}{2}(27)^i + \frac{2}{3}(32)^i + \frac{1}{3}(16)^i}{(27)^i + (32)^i + (16)^i},$$

welche Größe sehr wenig von $\frac{2}{3}$ verschieden ist, wenn i sehr groß ist. Zu gleicher Zeit ist die Wahrscheinlichkeit ϖ_2, dass die Urne B zwei weiße Kugeln und eine schwarze enthält, sehr wenig von der Gewissheit verschieden.

Ferner wollen wir $n = 3x$ setzen, so verwandelt sich der zugehörige Werth von ϖ' in:

$$\varpi' = \frac{\frac{1}{2}(27)^x + \frac{2}{3}(16)^x + \frac{1}{3}(32)^x}{(27)^x + (16)^x + (32)^x}.$$

Wenn x sehr groß ist, so reducirt sich derselbe fast auf $\frac{1}{3}$, und die Wahrscheinlichkeit ϖ_3, dass die Urne B eine weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, wird ebenfalls fast der Gewissheit gleich.

In den drei Fällen, wo die Anzahl der Ziehungen als sehr groß angenommen ist, nähert sich die Wahrscheinlichkeit ϖ' des Zuges einer neuen weißen Kugel also sehr dem Verhältnisse der Anzahl der aus der Urne B gezogenen weißen Kugeln zur Gesammtzahl der Versuche, und dieses Verhältniss ist zugleich mit einer sich der Gewissheit sehr nähernden Wahrscheinlichkeit das Verhältniss der Anzahl der, in der Urne B enthaltenen weißen Kugeln zur Gesammtzahl der darin enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln, d. h. die eigene abstracte Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus dieser Urne. In der Folge werden wir in der That sehen, dass, wenn irgend ein Ereigniss in einer sehr großen Anzahl von Versuchen eine gewisse Anzahl von Malen beobachtet ist, das Verhältniss der letzten Zahl zur ersten der sehr wahrscheinliche und sehr genäherte Werth der bekannten oder unbekannten abstracten Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist. Da in dem

eben betrachteten Beispiele diese Wahrscheinlichkeit nur $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ sein kann, so folgt, dass die Werthe $\frac{x}{n} = \frac{1}{2}, = \frac{2}{3}, = \frac{1}{3}$ auch die einzigen sind, welche man mit Wahrscheinlichkeit annehmen kann, wenn x und n sehr große Zahlen sind.

§. 34. In dem Vorhergehenden haben wir vorausgesetzt, dass vor dem Stattfinden des Ereignisses E alle die Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$, welchen man es zuschreiben kann, gleich möglich sind; aber wenn man a priori irgend welchen Grund hätte, das Vorhandensein einer dieser Ursachen eher anzunehmen, als das einer andern, so müsste man bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, welche diese verschiedenen Ursachen nach dem Stattfinden des Ereignisses E erhalten haben, auf diese Ungleichheit der Wahrscheinlichkeiten der Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ vor der Beobachtung des Ereignisses E Rücksicht nehmen. Diese Berücksichtigung ist in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten und, wie wir im fünften Kapitel sehen werden, besonders bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit von Rechtsentscheidungen ein wichtiger Punkt. Der Beweis in §. 28. lässt sich übrigens leicht auf den allgemeinen Fall erstrecken, wo die Ursachen des Ereignisses E vor der Beobachtung desselben beliebige Wahrscheinlichkeiten haben, deren Werthe gegeben sind.

Denn wir wollen, wie in diesem §., das Ereigniss E durch den Zug einer weißen Kugel aus einer der Urnen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ darstellen und zuerst annehmen, dass dieser Zug aus jeder dieser Urnen gleich möglich gewesen ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die weiße Kugel aus der Urne A_n gezogen ist, ist $= \frac{p_n}{\Sigma p_n}$, wo p_n wieder das Verhältniss der Anzahl der in der Urne A_n enthaltenen weißen Kugeln zur Gesammtanzahl der darin enthaltenen Kugeln bezeichnet und die Summe Σ sich auf alle Urnen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ erstreckt. Für andere unter diesen Urnen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ vorkommende Urnen $A_{n'}, A_{n''}$, *etc.* ist diese Wahrscheinlichkeit ebenfalls resp. $\frac{p_{n'}}{\Sigma p_n}, \frac{p_{n''}}{\Sigma p_n}$, *etc.*, und nach der Regel in §. 10. ist die Wahrscheinlichkeit, dass die weiße Kugel aus einer der Urnen $A_n, A_{n'}, A_{n''}$, *etc.* gezogen ist, die Summe:

$$\frac{p_n}{\Sigma p_n} + \frac{p_{n'}}{\Sigma p_n} + \frac{p_{n''}}{\Sigma p_n} + etc.,$$

welche sich auf das Product aus einem dieser Brüche und ihrer Anzahl reducirt, wenn die Größen $p_n, p_{n'}, p_{n''}, \ldots$ einander gleich sind.

Nun wollen wir annehmen, dass die Urnen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ aus a_1 Urnen A_1, wo in jeder das Verhältniss der weißen Kugeln zu der Gesammtzahl der weißen und schwarzen Kugeln $= p_1$ ist, aus a_2 Urnen A_2, wo für jede dieses Verhältniss $= p_2$ ist, ... und endlich aus a_i Urnen A_i, für welche dieses Verhältniss $= p_i$ ist, bestehen, so dass i die Anzahl dieser Gruppen gleicher Urnen ausdrückt, und wenn s die Summe aller Urnen bezeichnet,

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$$

ist. Die auf alle Urnen erstreckte Summe Σp_n kann durch die Summe $\Sigma a_n p_n$, welche sich auf alle Gruppen von Urnen oder auf alle Werthe des Index n von $n = 1$ bis $n = i$ erstreckt, ersetzt werden. Wenn also die a_n Urnen $A_n, A_{n'} \ A_{n''}, \ldots$ eine der Gruppen bilden, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die, aus einer der s Urnen gezogene weiße Kugel aus dieser Gruppe gezogen ist, durch das Product aus dem Verhältnisse $\frac{p_n}{\Sigma a_n p_n}$ und der Zahl a_n ausgedrückt, so dass, wenn man sie mit ϖ_n bezeichnet,

$$\varpi_n = \frac{a_n p_n}{\Sigma a_n p_n}$$

ist. Aber vor der Beobachtung war die Wahrscheinlichkeit, dass die zu ziehende weiße oder schwarze Kugel aus dieser Gruppe von Urnen würde gezogen werden, offenbar $= \frac{a_n}{s}$, und wenn man sie mit q_n bezeichnet, so hat man folglich:

$$q_n = \frac{a_n}{s}, \text{ alſo } a_n = s q_n,$$

und wenn man diesen Werth von a_n in den von ϖ_n substituirt, und den gemeinschaftlichen Faktor s des Zählers und Nenners hinweglässt; so erhält man:

$$\varpi_n = \frac{q_n p_n}{\Sigma q_n p_n}.$$

Die verschiedenen Gruppen von Urnen, welche wir eben betrach-

tet haben, stellen die i möglichen Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_i$ des Ereignisses E dar, welche vor der Beobachtung desselben ungleich wahrscheinlich waren. Der Bruch q_n drückt die Wahrscheinlichkeit vor der Beobachtung aus, dass das Ereigniss, welches stattfinden wird, von der Ursache C_n herrührt, und ϖ_n drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass das stattgehabte Ereigniss E durch dieselbe Ursache hervorgebracht ist, und da sich die Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ gegenseitig ausschließen; so sind q_n und ϖ_n die Wahrscheinlichkeiten der Existenz dieser Ursachen vor und nach der Beobachtung des Ereignisses E. Der Ausdruck von ϖ_n zeigt also, dass die Wahrscheinlichkeit jeder der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses erhalten wird, wenn man das Product aus der Wahrscheinlichkeit q_n dieser Ursache vor der Beobachtung des Ereignisses E und der Wahrscheinlichkeit p_n, welche sie diesem Ereignisse ertheilen würde, wenn sie gewiss wäre, durch die Summe $\Sigma q_n p_n$ der sich auf alle Ursachen, welchen das Ereigniss zugeschrieben werden kann, beziehenden ähnlichen Producte dividirt.

Die Wahrscheinlichkeit ϖ' des künftigen Ereignisses E', welches von denselben Ursachen, als E abhängt, wird, wie weiter oben, durch $\Sigma \varpi_n p'_n$ ausgedrückt, wenn man für ϖ_n den ebengefundenen Werth setzt, und es ist folglich:

$$\varpi' = \frac{\Sigma q_n p_n p'_n}{\Sigma q_n p_n}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass nach dem stattgehabten Ereignisse E auch das Ereigniss E' beobachtet sei, und es sei E'' ein drittes Ereigniss, welches wieder von denselben Ursachen abhängt, und durch p''_n wollen wir die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, welche die Ursache C_n, wenn sie gewiss wäre, dem Stattfinden des künftigen Ereignisses E'' ertheilen würde. Die Wahrscheinlichkeit dieser Ursache war nach der Beobachtung des Ereignisses E und vor der des Ereignisses $E' = \varpi_n$ und nach der vorhergehenden Regel ist sie nach der Beobachtung des Ereignisses E' gleich $\frac{\varpi_n p'_n}{\Sigma \varpi_n p'_n}$. Setzt man in diesen Werth den von ϖ_n, so verwandelt er sich in $\frac{q_n p_n p'_n}{\Sigma q_n p_n p'_n}$ und multiplicirt man denselben mit p''_n, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E'' vermöge der Ursache C_n stattfinden wird. Be-

zeichnen wir also die vollständige Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses mit ϖ'', so erhalten wir:

$$\varpi'' = \frac{\Sigma q_n p_n p'_n p''_n}{\Sigma q_n p_n p'_n},$$

welcher Ausdruck sich auch aus dem von ϖ' ergibt, wenn man p''_n für p'_n und $p'_n p'_n$ für p'_n substituirt, und in der That ist dieses Product $p_n p'_n$ in Beziehung auf die Ursache C_n die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses, d. h. der Aufeinanderfolge der Ereignisse E und E'.

§. 35. Um ein einfaches Beispiel anzuführen, welches zur Nachweisung der Richtigkeit und Nothwendigkeit der vorhergehenden Regel dienen kann, wollen wir annehmen, man fände auf einem Tische zwei Karten von unbekannten Farben, und dass, wenn man eine derselben umkehrte, sie eine rothe wäre. In Beziehung auf die Farben dieser beiden Karten kann man nur zwei Voraussetzungen machen; denn es sind entweder beide Karten roth, oder die eine ist roth und die andere schwarz. Wenn man durchaus nicht weiß, woher diese beiden Karten kommen, so sind diese beiden hypothetischen Ursachen des beobachteten Ereignisses vor der Beobachtung gleich wahrscheinlich und nach der Beobachtung ist die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese, wie wir in §. 32. gesehen haben, $=\frac{2}{3}$, so dass man 2 gegen 1 wetten könnte, dass die noch nicht umgewandte Karte, wie die bereits umgewandte, roth ist. Aber dasselbe findet nicht mehr statt, wenn man z. B. weiß, dass die beiden Karten zufällig aus einem Piquetspiele genommen sind, welches aus 16 rothen und ebenso viel schwarzen Karten besteht. Vor der Beobachtung ist die Wahrscheinlichkeit der ersten und zweiten Hypothese nach §. 18. resp.:

$$q_1 = \frac{16 \cdot 15}{32 \cdot 31}, \quad q_2 = 2 \cdot \frac{16 \cdot 16}{32 \cdot 31},$$

und zu gleicher Zeit hat man:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \tfrac{1}{2};$$

folglich ist:

$$\varpi_1 = \frac{q_1 p_1}{q_1 p_1 + q_2 p_2} = \frac{15}{31}$$

die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese nach der Beobachtung, so

daſſ man, ſtatt **2** gegen **1**, noch nicht einmal **1** gegen **1**, ſondern blos **15** gegen **16** wetten kann, daſſ die unbekannte Karte, wie die bereits umgekehrte, roth iſt. Die Richtigkeit dieſes Werthes von ϖ_1 ergibt ſich unmittelbar; denn es iſt einleuchtend, daſſ die vorliegende Aufgabe ganz dieſelbe iſt, als wenn man, nachdem aus dem ganzen Spiele eine rothe Karte gezogen iſt, die Wahrſcheinlichkeit beſtimmen ſollte, daſſ aus den übrigen **31** Karten, worunter ſich nur noch **15** rothe befinden, wieder eine rothe gezogen werden wird.

Allgemein, wenn man einen Haufen von m Karten hat, wovon a roth und b ſchwarz ſind, nimmt aus dieſem Haufen zufällig n Karten und kehrt $n-1$ derſelben um, wodurch man a' rothe und b' ſchwarze findet; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit ϖ_1, daſſ die $n$te Karte roth iſt, und die Wahrſcheinlichkeit ϖ_2, daſſ ſie ſchwarz iſt, nach der vorhergehenden Regel resp.:

$$\varpi_1 = \frac{a-a'}{m-n+1}, \quad \varpi_2 = \frac{b-b'}{m-n+1}.$$

Dieſer Werth von ϖ_1 iſt auch, wie es ſein muſſ, die Wahrſcheinlichkeit, aus dem urſprünglichen Haufen, welcher nur noch $m-n+1$ Karten enthält, worunter ſich $a-a'$ rothe befinden, eine rothe Karte zu ziehen, und ebenſo erhellet die Richtigkeit des Werthes von ϖ_2, weil $a+b=m$, $a'+b'=n-1$ und überdies $\varpi_1+\varpi_2=1$ iſt.

§. **36.** Aus der Regel in §. **34.** ergibt ſich die allgemeine Folgerung, daſſ, wenn zwei Ereigniſſe E und E' von derſelben Urſache abhängen, die Wahrſcheinlichkeit des künftigen Ereigniſſes E' nicht blos von dem beobachteten Ereigniſſe E abhängt, ſondern daſſ man bei ihrer Beſtimmung auch die Aufſchlüſſe berückſichtigen muſſ, welche man vor der Beobachtung hinſichtlich der gemeinſchaftlichen Urſachen der Ereigniſſe E und F haben kann, ſo daſſ die Wahrſcheinlichkeit des Ereigniſſes E' für zwei Perſonen, welche daſſelbe Ereigniſſ E beobachtet, aber zuvor verſchiedene Kenntniſſe davon gehabt haben, verſchieden ſein kann.

Ebenſo muſſ man bei Unterſuchungen des Zweifels oder der Kritik, worauf die Wahrſcheinlichkeitsrechnung ebenfalls anwendbar iſt (§. **3.**), z. B. wenn man wiſſen will, ob ein von einem Zeugen bezeugtes Factum wahr oder falſch iſt, nicht blos die Wahrſcheinlichkeit des Irrthums des Zeugen, ſondern auch das, was wir vor der Ablegung ſeines Zeugniſſes von dem in Rede ſtehenden Ereigniſſe wiſſen, in Betracht ziehen.

Bezeichnet alſo p die Wahrſcheinlichkeit, daſſ ſich der Zeuge nicht

irret, oder irren will und q die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit des Ereignisses vor der Ablegung des Zeugnisses; so hängt die Wahrscheinlichkeit desselben nach Ablegung des Zeugnisses von p und q ab und wird auf folgende Weise bestimmt.

Das beobachtete Ereigniss ist hier die Bezeugung eines Ereignisses, dessen Stattfinden nicht völlig gewiss ist. In der Voraussetzung, dass es wahr ist, werden wir durch den Zeugen nicht getäuscht, und p ist folglich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. In der entgegengesetzten Voraussetzung ist seine Wahrscheinlichkeit $=1-p$, weil uns alsdann der Zeuge täuscht. Vor der Ablegung des Zeugnisses war q die Wahrscheinlichkeit der ersten und $1-q$ die der zweiten Voraussetzung. Bezeichnet man also die Wahrscheinlichkeit der ersten Voraussetzung oder der Wahrheit des Ereignisses nach der Ablegung des Zeugnisses mit r, so ist nach der Regel in §. 34:

$$r=\frac{pq}{pq+(1-p)(1-q)},$$

und hieraus folgt:

$$r-q=\frac{q(1-q)(2p-1)}{pq+(1-p)(1-q)},$$

woraus erhellet, dass die Differenz $r-q$ dasselbe Zeichen hat, als $p-\frac{1}{2}$, und folglich wird die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit des Ereignisses, welche vor der Ablegung des Zeugnisses stattfand, durch dieses vermehrt oder vermindert, je nachdem $p>\frac{1}{2}$ oder $p<\frac{1}{2}$ gesetzt wird. Diese Differenz ist $=o$, und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses vor der Bezeugung desselben wird durch diese nicht geändert, wenn $p=\frac{1}{2}$ ist, und man also 1 gegen 1 wetten kann, dass der Zeuge die Wahrheit sagt, oder nicht. Wenn man a priori keinen Grund hat, eher die Wahrheit, als die Unwahrheit des von dem Zeugen behaupteten Ereignisses anzunehmen, so ist die Wahrscheinlichkeit $q=\frac{1}{2}$; folglich $r=p$, und in diesem Falle hängt die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss wahr ist, nur noch von der Wahrhaftigkeit und Einsicht des Zeugen ab.

Man kann nicht annehmen, dass eine der beiden Größen p und q die Einheit und die andere Null sei; aber wenn sich p der Gewissheit und q der Unmöglichkeit sehr nähert, so dass das Verhältniss von q zu $1-p$ ein sehr kleiner Bruch ist, so ist die Wahrscheinlichkeit r ebenfalls sehr klein und diesem Verhältnisse fast gleich. Dieser Fall findet bei einem Ereignisse statt, welches den allgemeinen Naturgesetzen zuwiderläuft und von einem Zeugen bestätigt wird, welchem man, wenn

dieses nicht der Fall wäre, einen sehr hohen Grad von Zutrauen schenken würde. Diese allgemeinen Naturgesetze sind für uns das Resultat langer Reihen von Erfahrungen, wodurch dieselben, wenn auch nicht absolute Gewissheit, so doch wenigstens eine sehr starke Wahrscheinlichkeit bekommen, welche durch die in diesen Gesetzen stattfindende Harmonie noch mehr vermehrt wird, und welcher durch kein Zeugniss das Gleichgewicht würde gehalten werden können. Wenn also das von dem Zeugen behauptete Ereigniss diesen allgemeinen Naturgesetzen zuwider ist, so ist die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit desselben vor der Ablegung des Zeugnisses fast Null, und wenn man auch dem Zeugen das grösste Zutrauen schenkt, so genügt doch schon die Möglichkeit seines Irrthumes, damit die Wahrscheinlichkeit $1-p$ des letztern gegen die Wahrscheinlichkeit q des Ereignisses vor dem Bezeugen desselben sehr gross sei und die Wahrscheinlichkeit r nach dem Zeugnisse noch als unmerklich betrachtet werden könne. In einem solchen Falle müssen wir sogar unser eigenes Zeugniss verwerfen und annehmen, dass wir durch unsere Sinne getäuscht sind, welche uns etwas als wahr darstellen können, was den Gesetzen der Natur zuwiderläuft.

§. 37. Wir wollen annehmen, dass das Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit wir eben betrachtet haben, auch durch einen zweiten Zeugen bestätigt werde. Die Wahrscheinlichkeit, dass uns dieser Zeuge nicht hintergeht, wollen wir mit p' bezeichnen und die sich aus dem doppelten Zeugnisse ergebende Wahrscheinlichkeit der Wahrheit des Ereignisses mit r'. Wenn man erwägt, dass die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit dieses Ereignisses unabhängig von der Bestätigung des zweiten Zeugen schon $=r$ war, so folgt, dass sich der Ausdruck von r' aus dem von r ergeben muss, wenn man p und q in p' und r verwandelt, wodurch man

$$r' = \frac{p'r}{p'r + (1-p')(1-r)}$$

erhält, oder wenn man für r und $1-r$ ihre Werthe setzt:

$$r' = \frac{qpp'}{qpp' + (1-q)(1-p)(1-p')}.$$

Wenn der zweite Zeuge die Unwahrheit des Ereignisses bezeugt, dessen Wahrheit von dem ersten Zeugen behauptet ist, so ist die Wahrscheinlichkeit der Unwahrheit des Ereignisses, unabhängig von dem zweiten Zeugnisse $=1-r$, und wenn man folglich die aus den beiden entgegengesetzten Zeugnissen resultirende Wahrscheinlichkeit der Unwahrheit des Ereignisses mit r_1 bezeichnet, so muss sich der Ausdruck für r_1

aus dem für r im vorhergehenden §. ableiten lassen, wenn man p und q in p' und $1-r$ verwandelt, und auf diese Weise erhält man:

$$r_1 = \frac{p'(1-r)}{p'(1-r)+r(1-p')},$$

oder was dasselbe ist:

$$r_1 = \frac{p'(1-p)(1-q)}{p'(1-p)(1-q)+qp(1-p')}.$$

Wenn $p=p'$ ist, so reducirt sich dieser Werth von r_1 auf $1-q$, und in der That heben sich die beiden entgegengesetzten Zeugnisse von gleichem Gewichte gegenseitig auf, und die Wahrscheinlichkeit der Unwahrheit des Ereignisses muss dieselbe bleiben, als zuvor.

Ebenso lässt sich leicht die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ein Ereigniss wahr oder unwahr ist, wenn es von irgend einer Anzahl Zeugen bestätigt und von einer andern Anzahl verneint wird. Wenn das Ereigniss von allen Zeugen zu gleicher Zeit bestätigt wird, so nimmt der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, dass es wahr ist, folgende Form an.

Es sei wieder vor der Ablegung eines Zeugnisses q die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit des Ereignisses und mit y_x wollen wir den Werth dieser Wahrscheinlichkeit bezeichnen, nachdem das Ereigniss durch eine beliebige Anzahl x von Zeugen bestätigt ist; y_{x-1} sei diese Wahrscheinlichkeit, wenn das Ereigniss blos durch $x-1$ Zeugen bestätigt wird, und wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge, welcher nicht unter den $x-1$ Zeugen mitbegriffen ist, uns nicht täuscht, wenn er ebenfalls die Wahrheit des Ereignisses bezeugt, mit $p^{(x-1)}$ bezeichnet wird; so ergibt sich der Ausdruck von y_x aus dem von r im vorhergehenden §., wenn man darin $p^{(x-1)}$ und y_{x-1} statt p und q setzt, und man hat:

$$y_x = \frac{p^{(x-1)}y_{x-1}}{p^{(x-1)}y_{x-1}+(1-p^{(x-1)})(1-y_{x-1})}.$$

Der Werth von y_x ist die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit q, und wenn man successive $x=1, =2, =3, \ldots$ setzt, so ergibt sich aus dieser Formel:

$$y_1 = \frac{pq}{pq+(1-p)(1-q)},\quad y_2 = \frac{p'q_1}{p'y_1+(1-p')(q-y_1)}, \text{ etc.},$$

woraus man den Werth von y_2 durch Elimination von y_1, den von y_3

durch Elimination von y_2, u. s. f. ableitet. Aber wenn man der Kürze wegen

$$\frac{1-p^{(x-1)}}{p^{(x-1)}}=\varrho_x$$

setzt, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung mit endlichen Differenzen der ersten Ordnung in folgende:

$$y_x=\frac{y_{x-1}}{y_{x-1}+\varrho_x(1-y_{x-1})},$$

deren vollständiges Integral

$$y_x=\frac{c}{c+(1-c)\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cdots\varrho_x}$$

ist, wo c die willkürliche Constante bezeichnet. Wenn man in diesem Ausdrucke von y_x, $x-1$ statt x setzt, so ergibt sich daraus in der That:

$$y_{x-1}=\frac{c}{c+(1-c)\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cdots\varrho_{x-1}},$$

$$1-y_{x-1}=\frac{(1-c)\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cdots\varrho_{x-1}}{c+(1-c)\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cdots\varrho_{x-1}},$$

und werden diese Werthe mit dem von y_x verbunden, so machen sie die gegebene Gleichung identisch. Die Constante c bestimmt man vermittelst eines besondern Werthes von y_x, und wenn man will, vermittelst des Werthes, welcher $x=o$ entspricht. Nimmt man alsdann die Einheit für das Product $\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cdots\varrho_x$ von x Factoren, so ergibt sich $y_o=q=c$, und man hat alsdann für eine beliebige Anzahl x von Zeugen:

$$y_x=\frac{q}{q+(1-q)\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cdots\varrho_x}.$$

In Beziehung auf den Zeugen, welcher einem beliebigen Index i entspricht, ist die Größe ϱ_i das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit, dass er uns täuscht zu der Wahrscheinlichkeit, dass er uns nicht täuscht, so dass $\varrho_i>1$ oder $\varrho_i<1$ ist, jenachdem die erste Wahrscheinlichkeit größer oder kleiner ist, als die zweite, und ϱ_i ist $=1$, wenn sie einander gleich sind. Wenn die Anzahl der Zeugen sehr groß ist und als unendlich betrachtet wird, und ϱ_i ist für alle Zeugen größer, als die Einheit, so ist die Wahrscheinlichkeit y_x der Wahrheit des von ihnen

bezeugten Ereignisses, bis auf eine Ausnahme, Null, und wenn dagegen x unendlich ist, so ist diese Wahrscheinlichkeit wieder bis auf eine Ausnahme die Einheit oder Gewissheit, wenn ϱ_i für alle Zeugen kleiner als die Einheit ist. Die Ausnahme findet statt, wenn die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ fortwährend ab- oder zunehmen; aber sich ohne Ende der Einheit nähern. Wir wollen z. B. allgemein

$$\varrho_i = 1 - \frac{4g^2}{(2i-1)^2 \pi^2}$$

nehmen, wo π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet, und g eine gegebene Constante, welche die Einheit nicht übersteigt, damit keine der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ negativ wird. Das Product dieser Größen ist nach einer bekannten Formel $= \cos g$ und man hat folglich:

$$y_\infty = \frac{q}{q + (1-q)\cos g},$$

welche Größe sehr von der Einheit verschieden ist, wenn g von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden ist. Wenn man $g = h\sqrt{-1}$ setzt, so kann die neue Constante h größer oder kleiner als die Einheit sein. Bezeichnet man die Basis der Neperschen Logarithmen mit e, so ergibt sich:

$$y_\infty = \frac{2q}{2q + (1-q)(e^h + e^{-h})},$$

und wenn h die Einheit nicht übersteigt, oder nur keine sehr große Zahl ist, so ist diese Wahrscheinlichkeit y_∞ nicht sehr klein. Man kann sich jedoch leicht überzeugen, dass der erste Werth von y_∞ immer größer ist, als die Wahrscheinlichkeit q des Ereignisses vor der Ablegung der Zeugnisse und der zweite immer kleiner.

Diese Formeln setzen voraus, dass alle Zeugnisse directe sind, und wir wollen sogleich den Fall untersuchen, wo nur ein einziges Zeugniss direct und alle übrigen traditionell sind.

§. 38. Wenn ein Zeuge nicht blos aussagt, dass ein Ereigniss wahr oder falsch ist, sondern auch das Stattfinden eines Ereignisses in einem Falle bezeugt, wo mehrere möglich waren, so ist das Ereigniss, welches er bezeugen kann, wenn er sich irret, oder wenn er sich irren will, nicht das einzige, sondern nur eins von denen, welche nicht stattgefunden haben, oder wovon er dieses wenigstens glaubt. Dieser Umstand hat aber, wie man sogleich sehen wird, auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses nach dem Zeugnisse, unabhängig von der, welche vorher stattfand, Einfluss.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, dass eine Urne A eine Anzahl μ von Kugeln enthält, wovon a_1 mit der Zahl **1**, a_2 mit der Zahl **2**, ... a_m mit der Zahl m bezeichnet sind, so dass:

$$\mu = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_m$$

und m die Anzahl der verschiedenen Nummern der in dieser Urne enthaltenen Kugeln ist. Wenn aus der Urne eine Kugel gezogen ist, so kann man in Beziehung auf die Nummer dieser Kugel m verschiedene Voraussetzungen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ machen, und wenn ihre Wahrscheinlichkeiten, vor irgend einem Zeugnisse, mit $q_1, q_2, q_3, \ldots q_m$ bezeichnet werden, so hat man:

$$q_1 = \frac{a_1}{\mu},\ q_2 = \frac{a_2}{\mu}, \ldots q_m = \frac{a_m}{\mu},$$

und wenn ein Zeuge aussagt, dass die aus der Urne A gezogene Kugel die Nummer n hat, so bekommen die Wahrscheinlichkeiten dieser Hypothesen die Werthe von $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots \varpi_m$, welche nach der Regel in §. **34.** zu bestimmen sind. Das beobachtete Ereigniss ist hier die Aussage des Zeugen, dass die gezogene Kugel die Nummer n trägt, und jede dieser Voraussetzungen gibt diesem Ereignisse eine gewisse Wahrscheinlichkeit, deren Ausdruck zunächst gebildet werden muss. Wir wollen die den m Hypothesen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten dieses Ereignisses mit $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ bezeichnen, so entsprechen nach den frühern Bezeichnungen die Größen C_i, q_i, ϖ_i, p_i dem Zuge einer beliebigen Nummer i und C_n, q_n, ϖ_n, p_n entsprechen insbesondere dem Treffen der von dem Zeugen ausgesagten Nummer.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich dieser Zeuge nicht irret, wollen wir mit u und die, dass er sich nicht absichtlich irret, mit v bezeichnen, so ist $1 - u$ die Wahrscheinlichkeit, dass er sich irret, und $1 - v$ die, dass er sich absichtlich irret. In der $n$ten Hypothese, d. h. in der Voraussetzung, dass n wirklich die aus der Urne A gezogene Nummer ist, wird der Zeuge den Zug dieser Nummer aussagen, wenn er sich nicht irret und nicht irren will, wofür die Wahrscheinlichkeit nach der Regel in §. **5.** durch uv ausgedrückt wird. Wenn er sich irret, so glaubt er, dass die aus der Urne A gezogene Kugel irgend eine von n verschiedene Nummer n' hat, und wenn er täuschen will, so sagt er eine von n verschiedene oder unter den $m - 1$ übrigen Nummern genommene Nummer aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nummer n gerade die ist, welche der Zeuge aussagt, ergibt sich hieraus folglich $= \frac{1}{m-1}$, indem jedoch angenommen wird, dass der Zeuge für irgend

eine Nummer keine besondere Vorliebe hat. Folglich wird die Wahrscheinlichkeit, daſſ diese Nummer von einem Zeugen, welcher sich irret, und täuschen will, angegeben wird, durch das Product der drei Brüche $1-u$, $1-v$, $\frac{1}{m-1}$ ausgedrückt. Der Zeuge sagt die Nummer n nicht aus, wenn er sich irret und nicht täuschen will, oder wenn er sich nicht irret und hintergehen will; denn im ersten Falle sagt er die Nummer aus, welche er für die gezogene hält, aber nicht die Nummer n ist, und im zweiten Falle weiß er, daſſ diese Nummer gezogen ist und will sie nicht aussagen. Hieraus und aus der Regel in §. **10.** ergibt sich:

$$p_n = uv + \frac{(1-u)(1-v)}{m-1}$$

für die vollständige Wahrscheinlichkeit, welche die Hypothese C_n dem beobachteten Ereignisse ertheilen würde, wenn sie gewiſſ wäre.

In der dem Zuge einer von n verschiedenen Nummer i entsprechenden Hypothese C_i sagt der Zeuge nicht die Nummer n aus, wenn er sich nicht irret und nicht hintergehen will. Wenn er sich nicht irret, aber täuschen will, so weiß er, daſſ die Nummer i gezogen ist, aber er sagt aus, daſſ eine der $m-1$ andern Nummern gezogen ist, und die Wahrscheinlichkeit, daſſ dieses die Nummer n ist, ist $=\frac{1}{m-1}$, woraus sich die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Zeuge wirklich die Nummer n aussagt, $=\frac{u(1-v)}{m-1}$ ergibt. Wenn sich der Zeuge irret, aber nicht betrügen will, so ist diese Wahrscheinlichkeit $=\frac{v(1-u)}{m-1}$; denn er kann glauben, daſſ die gezogene Nummer eine der übrigen $m-1$ von i verschiedenen Kugeln ist, und er sagt die aus, von welcher er glaubt, daſſ sie gezogen ist und $\frac{1}{m-1}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daſſ n diese Nummer ist. Endlich, wenn sich der Zeuge irret und er will hintergehen, so glaubt er, daſſ eine der $m-1$ Nummern aus der Urne A gezogen ist, welche von der verschieden sind, die er aussagt, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daſſ er glaubt, es sei eine bestimmte Nummer n' gezogen, $=\frac{1}{m-1}$. Dieser Bruch drückt auch die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ er unter den $m-1$ von n' verschiedenen Nummern die Nummer n als die ausgezogene ausspricht, und folglich ist $\frac{1}{(m-1)^2}$ die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Zeuge glaubt, die Nummer n' sei gezogen, aber

ausſagt, daſſ die Nummer n gezogen ſei. Die Wahrſcheinlichkeit, daſſ der Zeuge die Nummer n als die gezogene angibt, wird folglich durch das Product aus dem Bruche $\frac{1}{(m-1)^2}$ und der Anzahl der Nummern wie n', welche der Zeuge für gezogene hat halten können und welche Zahl nur $= m-2$ iſt, weil der Zeuge, welcher ſich irret und betrügen will, weder glauben kann, daſſ die wirklich gezogene Nummer i, noch die von ihm ausgeſprochene Nummer n gezogen iſt, ausgedrückt. Anderer Seits iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſes doppelten Fehlers dem Producte $(1-u)(1-v)$ gleich und die Wahrſcheinlichkeit, daſſ der Zeuge wirklich die Nummer n ausſagt, wird folglich durch das Product $(1-u)\times(1-v)\frac{m-2}{(m-1)^2}$ ausgedrückt. Wenn man alsdann die Wahrſcheinlichkeiten dieſer Ausſagen in den drei verſchiedenen Fällen, worin ſie haben ſtattfinden können, in eine Summe bringt, ſo ergibt ſich:

$$p_i = \frac{u(1-v)}{m-1} + \frac{v(1-u)}{m-1} + \frac{(m-2)(1-u)(1-v)}{(m-1)^2}$$

als die vollſtändige Wahrſcheinlichkeit des beobachteten Ereigniſſes in einer der $m-1$ ſeiner Wahrheit zuwiderlaufenden Hypotheſen. Dieſer Werth von p_i iſt mit dem von p_n übrigens durch die Gleichung:

$$p_n + (m-1)p_i = 1$$

verbunden, weil die Summe der Wahrſcheinlichkeiten, daſſ der Zeuge die Ziehung der den m verſchiedenen Hypotheſen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ entſprechenden Nummer n ausſagt, der Einheit gleich ſein muſſ.

Nun iſt aber nach der Regel in §. **34**:

$$\varpi_n = \frac{q_n p_n}{q_n p_n + \Sigma q_i p_i}, \quad \varpi_i = \frac{q_i p_i}{q_n p_n + \Sigma q_i p_i},$$

wo ſich die Summe Σ auf alle Werthe des Index i von $i=1$ bis $i=m$ erſtreckt, ausgenommen $i=n$. Da die Größe p_i von i unabhängig und die Summe der Werthe von q_i, weniger dem $i=n$ entſprechenden, $=\frac{\mu - a_n}{\mu}$ iſt; ſo verwandelt ſich der Ausdruck von ϖ_n, nachdem man die Werthe von p_n, q_n, p_i, q_i hineinſubſtituirt und ſeinen Zähler und Nenner mit $\mu(m-1)^2$ multiplicirt hat, in:

$$\varpi_n = \frac{[(m-1)uv + (1-u)(1-v)](m-1)a_n}{\left\{\begin{array}{l}[(m-1)uv + (1-u)(1-v)](m-1)a_n \\ +[(m-1)(1-v)u + (m-1)(1-u)v + (m-2)(1-u)(1-v)](\mu - a_n)\end{array}\right\}}$$

Dieses ist also die Wahrscheinlichkeit, dass die von dem Zeugen ausgesagte Nummer n wirklich aus der Urne A gezogen ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses nicht der Fall ist, wird durch $1-\varpi_n$ ausgedrückt und die des Zuges einer jeden andern bestimmten Nummer i ergibt sich aus dem Ausdrucke von $1-\varpi_n$, wenn man denselben mit dem Verhältnisse von $q_i p_i$ zu $\Sigma q_i p_i$ oder von a zu $\mu-a_n$ multiplicirt; so dass man hat:

$$\varpi_i=\frac{(1-\varpi_n)\,a_i}{\mu-a_n}.$$

Um diese Resultate zu erhalten, haben wir angenommen, dass, wenn sich der Zeuge irret, oder wenn er betrügen will, die von ihm ausgesagte Nummer blos durch den Zufall und nicht durch irgend eine besondere Ursache bestimmt ist, und dieses ist wohl zu bemerken. Dasselbe würde nicht mehr der Fall sein, wenn er betrügen will und irgend einen Grund hätte, den Zug einer bestimmten Nummer lieber glauben zu machen, als den einer andern, so wie auch nicht mehr, wenn er sich irret und sein Irrthum z. B. daraus entspringt, dass zwischen der Nummer, welche er für die gezogene hält und ausspricht, und der wirklich aus der Urne A gezogenen Kugel eine gewisse Aehnlichkeit stattfindet. Diese schwer zu berechnenden Umstände, wovon wir abstrahirt haben, könnten auf die Wahrscheinlichkeit des Zuges der von dem Zeugen ausgesagten Nummer einen bedeutenden Einfluss haben

Statt der mit m verschiedenen Nummern bezeichneten Kugeln könnte die Urne A auch Kugeln von eben so vielen verschiedenen Farben enthalten. Wenn sie blos weiße und schwarze Kugeln enthält, und zwar von der ersten Farbe a und von der zweiten $\mu-a$ Kugeln, und der Zeuge sagt aus, dass eine weiße Kugel gezogen sei; so macht man in dem Ausdrucke von ϖ_n, $m=2$ und $a_n=a$, und wenn man alsdann seinen Werth mit r bezeichnet, so erhält man:

$$r=\frac{[uv+(1-u)(1-v)]\,a}{[uv+(1-u)(1-v)]\,a+[(1-v)\,u+(1-u)\,v]\,(\mu-a)}$$

als die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich eine weiße Kugel aus der Urne A gezogen ist.

Diesen besondern Fall kann man als den eines wahren oder falschen von einem Zeugen bezeugten Ereignisses betrachten. Wenn dieses Ereigniss der Zug der weißen Kugel ist, so ist r die Wahrscheinlichkeit, dass er stattgefunden hat und ihr Ausdruck muss mit dem in §. 36. übereinstimmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass uns der Zeuge nicht hintergeht, ist zuvörderst:

$$p = uv + (1-u)(1-v);$$

denn dieses kann stattfinden, wenn er sich nicht irret und uns nicht betrügen will, oder auch, wenn er sich irret und uns hintergehen will, d. h. wenn der Zeuge von den beiden allein möglichen Ereignissen des Zuges einer weißen und des einer schwarzen Kugel das Entgegengesetzte glaubt von dem, was stattgefunden hat, oder das Entgegengesetzte aussagt von dem, was er glaubt. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass uns der Zeuge hintergeht;

$$1-p = (1-v)u + (1-u)v,$$

was sich aus dem Werthe von p ergibt, oder direct erhalten lässt, wenn man bemerkt, dass uns der Zeuge hintergehen kann, sowohl, wenn er sich nicht irret und uns betrügen will, als wenn er sich irret und uns nicht täuschen will. Auch ist:

$$q = \frac{a}{\mu},\ 1-q = \frac{\mu-a}{\mu}.$$

resp. die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit und Unwahrheit des von dem Zeugen behaupteten Ereignisses vor der Ablegung seines Zeugnisses. Diese verschiedenen Werthe machen den Ausdruck von r in §. **36.** in der That mit dem eben angeführten identisch.

Wenn die Urne A nur eine Kugel mit jeder der Nummern von **1** bis m enthält, so hat man $a_n = 1$ und $\mu = m$, wodurch der allgemeine Ausdruck von ϖ_n sehr vereinfacht wird und sich auf:

$$\varpi_n = uv + \frac{(1-u)(1-v)}{m-1}$$

reducirt. Diese Wahrscheinlichkeit, dass die von dem Zeugen ausgesagte Nummer n wirklich aus der Urne A gezogen ist, ist in diesem Falle von der weiter oben mit p_n bezeichneten Wahrscheinlichkeit, d. h. von der Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge die Nummer n in der Voraussetzung aussagt, dass sie gezogen ist, nicht verschieden, sie nimmt desto mehr ab, je größer die Anzahl m der in der Urne enthaltenen Kugeln wird und würde der Wahrscheinlichkeit gleich sein, dass sich der Zeuge weder irret, noch uns hintergehen will, wenn diese Zahl unendlich groß werden könnte.

§. **39.** Es bliebe nun noch der allgemeine Fall zu betrachten übrig, wo mehrere Zeugen vorhanden wären, wovon einige von dem Ereignisse, welches sie bezeugen, eine directe und die übrigen eine traditionelle Kenntniss haben; um aber diese Untersuchung über die Be-

stimmung der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse nicht zu weitläufig zu machen, wollen wir nur eine specielle Aufgabe dieser Art auflösen.

Wir wollen die Zeugen, deren Anzahl $= x+1$ ist, mit T, T_1, T_2, ... T_{x-1}, T_x bezeichnen. Es ist, wie in der vorhergehenden Aufgabe, aus der Urne A eine Kugel gezogen, deren Nummer nur der Zeuge T direct kennt; jeder der übrigen Zeugen hat sie von den vorhergehenden durch eine unterbrochene Reihe von Traditionen kennen gelernt, und von dem letzten Zeugen T_x ist diese Auskunft auf uns übergegangen. Da der Zeuge T_x also der einzige ist, von welchem wir etwas gehört haben, so ist in dieser Aufgabe das beobachtete Ereigniss die von dem Zeugen T_{x-1} abhängige Versicherung des Zeugen T_x, dass aus der Urne A die Nummer n gezogen ist, und es kommt darauf an, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass diese Nummer wirklich die aus dieser Urne gezogene ist.

Es sei y_x die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses in der Hypothese C_n des Zuges der Nummer n aus der Urne A und y'_x diese Wahrscheinlichkeit in der Voraussetzung C_i des Zuges einer andern Nummer i. Bezeichnet man wieder durch a_n und a_i die Anzahlen der in der Urne A enthaltenen und mit den Nummern n und i bezeichneten Kugeln und mit μ die Gesammtzahl der Kugeln, welche diese Urne enthält; so ist der Bruch $\frac{a_n}{\mu}$ die Wahrscheinlichkeit des Zuges der Nummern n, und $\frac{a_i}{\mu}$ die des Zuges der Nummer i. Nach der Regel in §. **34.** wird die Wahrscheinlichkeit der Hypothese C_n durch:

$$\varpi_n = \frac{a_n y_x}{a_n y_x + \Sigma a_i y'_x}$$

ausgedrückt, wo sich die Summe Σ auf alle Indices i von $i=1$ bis $i=m$, mit Ausnahme von $i=n$, erstreckt. Wir werden sogleich sehen, dass der Ausdruck von y'_x von i unabhängig ist, und da die Summe der Werthe von a_i, mit Ausnahme von a_n, gleich $\mu - a_n$ ist, so ist dieser Werth von ϖ_n dasselbe als:

$$\varpi_n = \frac{a_n y_x}{a_n y_x + (\mu - a_n) y'_x}.$$

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit ϖ_i jeder andern Hypothese

C_1, wenn man den Werth von $1 - \varpi_n$ durch das Verhältniss von a_i zu $\mu - a_n$ multiplicirt.

Die Aufgabe reducirt sich also auf die Bestimmung der Unbekannten y_x und y'_x als Functionen von x. Zu dem Zwecke wollen wir die Wahrscheinlichkeit, dass uns der Zeuge T_x nicht täuscht, mit k_x bezeichnen, so dass $1 - k_x$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass er uns ohne oder mit Vorsatz täuscht. Der Zeuge T_x sagt aus, dass aus der Urne A die Nummer n gezogen ist, wenn er uns nicht täuscht, und der Zeuge T_{x-1} auch gesagt hat, dass diese Nummer gezogen sei, wofür in der Voraussetzung C_n die Wahrscheinlichkeit dem Producte $k_x y_{x-1}$ gleich ist, wo y_{x-1} in Beziehung auf den Zeugen T'_{x-1} dasselbe ausdrückt, was y_x in Beziehung auf den Zeugen T_x ausdrückt. Der Zeuge T_x kann auch aussagen, dass die Nummer n gezogen sei, wenn er uns hintergeht und zu gleicher Zeit der Zeuge T_{x-1} den Zug einer andern Nummer ausgesagt hat. In der Voraussetzung C_n ist die Wahrscheinlichkeit dieser Combination $= (1 - k_x)(1 - y_{x-1})$, aber da die Wahrscheinlichkeit, dass n die Nummer ist, welche der Zeuge T_x von den $m - 1$ Nummern, die er nicht für von dem Zeugen T_{x-1} ausgesprochene Nummern hält, aussagt, nur $= \frac{1}{m-1}$ ist; so wird die Wahrscheinlichkeit der Aussage der Nummer n auf $\frac{(1-k_x)(1-y_{x-1})}{m-1}$ reducirt. Endlich wird der Zeuge T_x die Ziehung dieser Nummer nicht aussagen, sowohl wenn er uns hintergeht, und der Zeuge T_{x-1} sie ausgesagt hat, als wenn er uns nicht hintergeht und T_{x-1} den Zug einer andern Nummer ausgesagt hat. Wir erhalten also

$$y_x = k_x y_{x-1} + \frac{(1-k_x)(1-y_{x-1})}{m-1}$$

als die vollständige Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses in der Voraussetzung C_n, und ebenso findet man:

$$y'_x = k_x y'_{x-1} + \frac{(1-k_x)(1-y'_{x-1})}{m-1}$$

für diese Wahrscheinlichkeit in jeder andern Hypothese C_i, so dass die beiden Unbekannten y_x und y'_x von derselben Gleichung mit endlichen Differenzen der ersten Ordnung abhängen, und sich nur durch die willkürliche Constante von einander unterscheiden.

Bezeichnet man diese willkürliche Constante mit c, so ist das vollständige Integral der gegebenen Gleichung:

$$y_x = \frac{1}{m} + \frac{c(mk_1-1)(mk_2-1)\ldots(mk_{x-1}-1)(mk_x-1)}{(m-1)^x}.$$

Denn setzt man darin $x-1$ statt x, so ergibt sich daraus:

$$y_{x-1} = \frac{1}{m} + \frac{c(mk_1-1)(mk_2-1)\ldots(mk_{x-1}-1)}{(m-1)^{x-1}},$$

$$1 - y_{x-1} = \frac{m-1}{m} - \frac{c(mk_1-1)(mk_2-1)\ldots(mk_{x-1}-1)}{(m-1)^{x-1}},$$

und diese Werthe machen in Verbindung mit dem von y_x die gegebene Gleichung identisch. Zur Bestimmung der Constante c setzen wir in dem Integrale $x=o$ und bemerken, daß die sich auf den directen Zeugen T beziehende Wahrscheinlichkeit y_x den im vorhergehenden §. mit p_n bezeichneten Werth haben muß. Nimmt man in diesem Falle, wo $x=o$ ist, die Einheit für das Product der in dem Integrale vorkommenden Factoren, so ist folglich:

$$p_n = \frac{1}{m} + c, \quad c = \frac{mp_n - 1}{m}.$$

und für einen beliebigen Werth von x ist folglich alsdann:

$$y_x = \frac{1}{m}[1 + (mp_n - 1)X],$$

wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{(mk_1-1)(mk_2-1)\ldots(mk_x-1)}{(m-1)^x} = X$$

setzt. Bemerkt man, daß die Wahrscheinlichkeit y'_x in Beziehung auf den directen Zeugen T in einer beliebigen von C_n verschiedenen Hypothese C_i auch dieselbe sein muß, als die, welche im vorhergehenden §. mit p_i bezeichnet ist, so hat man ebenso:

$$y'_x = \frac{1}{m}[1 + (mp_i - 1)X],$$

eine von i unabhängige Größe, weil p_i von dieser Zahl unabhängig ist.

Substituirt man diese Werthe in den von ϖ_n, so ergibt sich:

$$\varpi_n = \frac{[1+(mp_n-1)X]\,a_n}{[1+(mp_n-1)X]\,a_n+[1+(mp_i-1)X](\mu-a_n)}$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß die von dem letzten Zeugen T_x ausgesagte Nummer n wirklich aus der Urne A gezogen ist.

Statt des mit X bezeichneten Productes kann man folgendes:

$$X = h_1 h_2 h_3 \ldots h_x$$

substituiren, wenn man der Kürze wegen:

$$k_x - \frac{(1-k_x)}{m-1} = h_x$$

setzt. Da die Zahl m immer größer ist, als 1 und k_x einen positiven Bruch bezeichnet, welcher die Einheit nicht überschreiten kann, so folgt, daß jeder der Factoren von X positiv oder negativ sein kann, ohne die Grenzen ± 1 zu überschreiten. Wenn die Anzahl x der Factoren sehr groß ist, so ist dieses Product sehr klein und es würde völlig Null, wenn diese Zahl unendlich groß wäre, diejenigen besondern Fälle jedoch ausgenommen, wo die Factoren h_1, h_2, $h_3 \ldots$ eine Reihe von Brüchen bilden, die fortwährend gegen die Einheit convergiren. Wenn man nun in dem Ausdrucke für ϖ_n die Glieder mit X vernachlässigt, so reducirt er sich auf $\frac{a_n}{\mu}$, woraus folgt, daß im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches uns durch eine sehr lange Reihe von Traditionen mitgetheilt ist, nicht merklich von der eigenen abstracten Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses verschieden ist, während sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses der Gewißheit sehr nähert, wenn es von vielen directen Zeugen bestätigt wird und man in Beziehung auf jeden dieser Zeugen mehr als 1 gegen 1 wetten kann, daß er uns nicht täuscht (§. 37.).

In dem besondern Falle, wo die Urne A nur eine Kugel von jeder Nummer enthält und wo folglich $a_n = 1$ und $\mu = m$ ist, reducirt sich der Werth von ϖ_n vermöge der Gleichung:

$$p_n + (m-1)\,p_i = 1$$

auf:

$$\varpi_n = \frac{1}{n}[1+(mp_n-1)X].$$

Diese Wahrscheinlichkeit stimmt folglich alsdann mit y_x, d. h. mit der Wahrscheinlichkeit der Aussage der Nummer n durch den Zeugen T_x in der Voraussetzung C_n, daß dieses wirklich die aus der Urne A gezogene Kugel ist, überein. Aber man darf nicht, wie es Laplace bei der Auflösung derselben Aufgabe*) gethan hat, a priori eine der beiden Wahrscheinlichkeiten y_x und ϖ_n für die andere nehmen, welche nur dann identisch sind, wenn das Verhältniß von $\mu - a_n$ zu a_n dem von $m - 1$ zu 1 gleich ist.

§. 40. Man kann, wenn man will, jede der Größen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ auch vermittelst der Zahl m und der Wahrscheinlichkeiten, daß der Zeuge, auf welchen sie sich bezieht, sich nicht irret, und uns nicht hintergehen will, ausdrücken. Es sei u_x die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiger Zeuge T_x der vorhin erwähnten traditionellen Reihe nicht getäuscht ist und v_x die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht hat täuschen wollen. Wenn diese beiden Umstände zugleich stattfinden, so hat uns der Zeuge nicht getäuscht und er hat uns auch nicht täuschen können, wenn er sich geirret hat und uns hat täuschen wollen; aber in diesem zweiten Falle ist $\frac{1}{m-1}$ die Wahrscheinlichkeit, daß er unter den $m - 1$ Nummern, wovon er glaubt, daß sie nicht aus der Urne A gezogen sind, die Nummer n ausgesagt hat, und da diese beiden Fälle die einzigen sind, worin er nicht hat täuschen können durch die Aussage dieser Nummer; so ist der vollständige Werth von $k_{x'}$:

$$k_{x'} = u_{x'} v_{x'} + \frac{(1 - u_{x'})(1 - v_{x'})}{m - 1}.$$

Für $x' = 0$ stimmt er mit dem Werthe von p_n im vorhergehenden §. überein, wenn man u_1, v_1 für die in dem letztern vorkommenden Größen u und v nimmt.

Diese Größe $k_{x'}$ ist die Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses von $T_{x'}$ oder der Werth dieses Zeugnisses an sich betrachtet, d. h. der Grund, welchen man hat, zu glauben, daß die Nummer n aus einer Urne A gezogen ist, welche m verschiedene Arten von Nummern enthalten kann, wenn man blos weiß, daß dieser Zug von einem Zeugen $T_{x'}$ bezeugt wird, für welchen $u_{x'}$ und $v_{x'}$ die Wahrscheinlichkeiten sind, daß er sich nicht irret und uns nicht hintergehen will. Wenn man gewiß weiß, daß der Zeuge $T_{x'}$ sich irret und uns täuschen will, so ist $u_{x'} = 0$ und $v_{x'} = 0$; aber die aus seinem Zeugnisse resultirende Wahrscheinlichkeit

*) Théorie analytique des probabilités, page 457.

$k_{x'}$, dass die Nummer n gezogen ist, ist dennoch $=\frac{1}{m-1}$. Sie ist für $m=2$ die Gewissheit, und in der That sagt der Zeuge nothwendig die Wahrheit, wenn er die der beiden Nummern aussagt, wovon er nicht glaubt, dass sie gezogen ist und die für die gezogene Nummer hält, welche es nicht ist. Wenn $m=3$ ist, so kann man 1 gegen 1 wetten, dass von den drei Nummern die gezogen ist, welche der Zeuge aussagt, wovon man sich leicht durch die Aufzählung aller möglichen Combinationen überzeugen kann, und ebenso überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit des Werthes $\frac{1}{m-1}$ der Wahrscheinlichkeit $k_{x'}$ für eine beliebige Zahl m.

Man muss den Fall, wo sich ein Zeuge irret, und zuverlässig täuschen will, nicht mit dem verwechseln, wo die Reihe der Traditionen unterbrochen ist, so dass der Zeuge $T_{x'-1}$, welcher vor $T_{x'}$ vorhergeht, nicht existirt. Alsdann ist es gewiss, dass der Zeuge $T_{x'}$ täuschen will, weil er die Existenz des Zeugen $T_{x'-1}$ voraussetzt, und man hat folglich $v_{x'}=0$; aber die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Zeuge $T_{x'}$ nicht irret, ist nicht Null. Da dieser Zeuge in diesem Falle über das stattgehabte Ereigniss keinen Aufschluss hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die wirklich gezogene Nummer aussagt, $=\frac{1}{m}$, und sie ist zu gleicher Zeit auch der Werth seines Zeugnisses; denn wenn man in der vorhergehenden Formel $u_{x'}=\frac{1}{m}$ und $v_{x'}=0$ setzt, so kommt $k_{x'}=\frac{1}{m}$. Dieser Werth von $k_{x'}$ reducirt den Factor $h_{x'}$ von X auf Null, und folglich die Wahrscheinlichkeit ϖ_n des Zuges der Nummer n auf $\frac{a_n}{\mu}$, d. h. auf die eigene abstracte Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, wie es offenbar der Fall sein muss.

§. 41. Mit Hülfe der zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen aufgestellten Regel können wir nun das am Ende des §. 7. über das Bestreben unseres Geistes, bei gewissen Ereignissen eine specielle, von dem Zufalle unabhängige Ursache derselben nicht zu bezweifeln, Gesagte vervollständigen.

Wenn wir ein Ereigniss beobachtet haben, welches an und für sich eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit hatte, und es bietet irgend etwas Symmetrisches oder Merkwürdiges dar, so werden wir ganz natürlich auf den Gedanken geführt, dass es nicht die Wirkung des Zufalles, oder allgemeiner, der einen Ursache, welche ihm diese geringe Wahr-

scheinlichkeit ertheilen würde, ist, sondern dass es von einer mächtigern Ursache, wie z. B. der Wille irgend eines Wesens, welches einen bestimmten Zweck dabei hatte, herrührt. Wenn wir z. B. auf einem Tische die 25 Buchstaben des Alphabetes in Lettern nach der natürlichen Ordnung $a, b, c, \ldots x, y, z$ an einander gereiht finden, so zweifeln wir nicht, dass sie Jemand vermöge eines Actes seines Willens so geordnet hat, und dessenungeachtet ist diese Anordnung an und für sich betrachtet, nicht unwahrscheinlicher, als jede andere, welche uns nichts Merkwürdiges darbietet, und welche wir daher keinen Anstand nehmen, dem bloßen Zufalle zuzuschreiben. Wenn diese 25 Lettern successive und ganz zufällig aus einer Urne, worin sie enthalten sind, gezogen werden müssten, so würde es ebenso wahrscheinlich sein, dass sie in der natürlichen Ordnung gezogen werden, als in einer vorher bestimmten andern Ordnung, wie z. B. $b, p, w, \ldots q, a, t$, welche man willkürlich wählt, und diese Wahrscheinlichkeit würde sowohl für die erste, als für die zweite Anordnung sehr klein sein; aber in dem einen Falle nicht kleiner, als in dem andern Falle. Desgleichen, wenn eine Urne gleichviel weiße und schwarze Kugeln enthält, und man soll aus derselben successive 30 weiße Kugeln ziehen, indem die gezogene Kugel jedesmal wieder hineingelegt wird, so wird die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses durch $(\frac{1}{2})^{30}$ ausgedrückt, d. h. sie ist ungefähr $= \frac{1}{1000000000}$. Aber die Wahrscheinlichkeit, 30 weiße und schwarze Kugeln in einer solchen Ordnung zu ziehen, wie sie zum Voraus bestimmt ist, ist weder größer, noch kleiner, als die Wahrscheinlichkeit, 30 weiße Kugeln hinter einander zu ziehen, und man kann ebenfalls **1000000000** gegen 1 wetten, dass diese zweite bestimmte Aufeinanderfolge nicht stattfinden wird. Wenn wir aber dennoch sehen, dass 30 mal hinter einander eine weiße Kugel aus der Urne gezogen wird, so können wir nicht glauben, dass dieses Ereigniss von dem bloßen Zufalle herrührt, während wir es ohne weiteres dem Zufalle zuschreiben, wenn die Aufeinanderfolge der 30 gezogenen Kugeln nichts Regelmäßiges und Merkwürdiges darbietet.

Was wir Zufall nennen (§. 27.), bringt so zu sagen ein Ereigniss, welches wir merkwürdig finden, und ein anderes, welches es nicht ist, mit derselben Leichtigkeit hervor. Die Ereignisse der ersten Art sind weit seltener, als die der zweiten, wenn alle gleich möglichen Ereignisse in sehr großer Anzahl vorhanden sind. Aus diesem Grunde fällt uns das Stattfinden der erstern weit mehr auf, wodurch wir veranlasst werden, sie einer besondern Ursache zuzuschreiben. Die Existenz dieser Ursache ist in der That sehr wahrscheinlich; aber ihre große Wahrscheinlichkeit entspringt nicht aus der Seltenheit der merkwürdigen Er=

eignisse, sondern sie beruht auf einem andern Prinzipe, worauf wir nun die im Vorhergehenden bewiesenen Regeln anwenden wollen.

§. 42. Wir wollen die merkwürdigen Ereignisse, welche stattfinden können, mit $E_1, E_2, E_3, \ldots$ und die nicht merkwürdigen mit $F_1, F_2, F_3, \ldots$ bezeichnen. Wenn es sich z. B. darum handelt, aus einer Urne, welche gleichviel weiße und schwarze Kugeln enthält, 30 Kugeln zu ziehen, so sind die Ereignisse $E_1, E_2, E_3 \ldots$ das Treffen von 30 Kugeln derselben Farbe, das abwechselnde Treffen einer weißen und einer schwarzen Kugel, ferner das Treffen von 15 Kugeln von derselben Farbe, worauf 15 Kugeln von der andern Farbe folgen, u. s. f. In dem Falle, wo 30 Lettern an einander gereiht sind, sind die Ereignisse $E_1, E_2, E_3, \ldots$ die, wo diese Lettern in der alphabetischen Ordnung, oder in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, oder wo sie eine Phrase irgend einer Sprache bilden. Die Anzahl der Ereignisse $E_1, E_2, E_3, \ldots$ wollen wir wieder mit m und die der übrigen Ereignisse $F_1, F_2, F_3, \ldots$ mit n bezeichnen und annehmen, dass sie alle gleich möglich sind, wenn sie allein von dem Zufalle herrühren, so dass die Wahrscheinlichkeit p jedes derselben durch:

$$p = \frac{1}{m+n}$$

ausgedrückt wird, es mag übrigens der ersten oder der zweiten Reihe angehören. Dieses findet nicht mehr statt, wenn diese Ereignisse durch irgend eine besondere, von der Wahrscheinlichkeit p unabhängige Ursache C hervorgebracht werden müssen, welche z. B. der Wille einer Person sein mag, die die Wahl eines unter ihnen trifft. Wir wollen annehmen, dass diese Wahl durch die verschiedenen Umstände bestimmt wird, wodurch ein Theil der möglichen Ereignisse zu merkwürdigen gemacht wird. Es wird also eine gewisse Wahrscheinlichkeit p_1 oder p_2, ... haben, dass diese Person das Ereigniss E_1 oder $E_2, \ldots$ wählt; aber es ist keine Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass sie von den Ereignissen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ das eine oder das andere auswählt, und da diese verschiedenen Ereignisse die allein möglichen sind; so muss:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$$

sein. Wenn die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ alle einander gleich sind, so ist ihr gemeinschaftlicher Werth $= \frac{1}{m}$ und folglich sehr groß gegen p, wenn die Gesammtzahl $m+n$ der möglichen Fälle an und für sich und gegen die Anzahl m der merkwürdigen Fälle sehr groß ist. Im Allgemeinen können diese Wahrscheinlichkeiten sehr ungleich

sein, und wir haben kein Mittel sie zu bestimmen; allein es ist hinreichend, daſſ sie gegen die Wahrscheinlichkeit p sehr groß sind, welches jedesmal der Fall ist, wenn letztere, wie in den eben angeführten Beispielen, sehr klein oder die Anzahl $m+n$ außerordentlich groß ist.

Dieses ist das Grundprinzip, wovon wir ausgehen wollen, um die Wahrscheinlichkeit der Ursache C nach der Beobachtung eines der Ereignisse $E_1, E_2, E_3, \ldots F_1, F_2, F_3, \ldots$ zu bestimmen, oder wenigstens zu zeigen, daſſ sie sehr groß ist, wenn das beobachtete Ereigniſſ der ersten Reihe angehört.

Es sei E_1 dieses Ereigniſſ, so kann man zwei Voraussetzungen machen, nämlich: 1) daſſ es von der Ursache C hervorgebracht wird, und 2) daſſ es die Wirkung des Zufalles ist. Wenn die erste Hypothese gewiſſ wäre, so wäre p_1 die Wahrscheinlichkeit des Stattfindens des Ereignisses E_1, und wenn die zweite gewiſſ wäre, so würde diese Wahrscheinlichkeit durch p ausgedrückt. Bezeichnet man also die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese nach der Beobachtung des Ereignisses mit r und betrachtet beide Hypothesen vorher als gleich wahrscheinlich, so ist nach der Regel in §. 28:

$$r = \frac{p_1}{p_1 + p}.$$

Nun braucht aber die Wahrscheinlichkeit p_1 nur gegen die sehr kleine Wahrscheinlichkeit p sehr groß zu sein, damit dieser Werth von r sehr wenig von der Einheit oder der Gewiſſheit verschieden ist. Wenn man in einem der vorhergehenden Beispiele, wo die Anzahl der möglichen Ereignisse **1000000000** überstieg und p kleiner war als $\frac{1}{1000000000}$, annimmt, daſſ die Anzahl der Ereignisse, welche hinreichend merkwürdig sind, um eine Person zur Wahl eines derselben zu bestimmen, $=$ **1000** ist, und $\frac{1}{1000}$ für den Werth von p_1 nimmt; so ist der Werth von r um weniger als ein Milliontel von der Einheit verschieden und noch weit weniger, wenn die Wahrscheinlichkeit p_1, wie sich annehmen läſſt, größer als $\frac{1}{1000}$ ist. Wenn man folglich eins dieser merkwürdigen Ereignisse, z. B. die successive Ziehung von **30** Kugeln derselben Farbe aus einer Urne, die gleich viel Kugeln von zwei verschiedenen Farben enthält, beobachtet hat, so muſſ man es, wie es auch geschieht, ohne alles Bedenken der Willenswirkung irgend Jemandes oder jeder andern speciellen Ursache zuschreiben und nicht als eine bloße Wirkung des Zufalles betrachten.

Jedoch würde die Wahrscheinlichkeit r der Ursache C bedeutend vermindert werden, wenn vor der Beobachtung des Ereignisses ihr Vorhandensein oder Nichtvorhandensein nicht gleich möglich wäre, wie es die

vorhergehende Formel voraussetzt, und ihre Nichteristenz ursprünglich die größte Wahrscheinlichkeit hätte. Dieses findet in dem eben angeführten Beispiele statt, wenn vor der Ziehung die gehörigen Vorsichtsmaßregeln getroffen sind, um den Einfluss irgend eines Willens auf die Ziehung der Kugeln zu verhindern. Wenn man auf diesen Umstand vor der Beobachtung Rücksicht nimmt, so zeigt die Regel in §. **34.** die Abnahme des Werthes von r. Diese Wahrscheinlichkeit wird zuweilen auch in einem sehr großen Verhältnisse vermehrt oder vermindert, wenn nicht alle Ereignisse $E_1, E_2, E_3, \ldots F_1, F_2, F_3, \ldots$ gleich möglich sind, nämlich vermehrt, wenn die eigene abstracte Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses der ersten Reihe größer ist, als die der zweiten Reihe, und vermindert im entgegengesetzten Falle.

Die Harmonie, welche wir in der Natur beobachten, ist ohne Zweifel nicht das Werk des Zufalles; aber durch eine aufmerksame und lange Zeit fortgesetzte Untersuchung ist man dahin gelangt, für eine sehr große Anzahl von Naturerscheinungen die physischen Ursachen, welche ihr Stattfinden bewirken, wenn auch nicht mit einer absoluten Gewissheit, so doch wenigstens mit einer sich der Gewissheit sehr nähernden Wahrscheinlichkeit angeben zu können. Betrachtet man sie als die Ereignisse $E_1, E_2, E_3, \ldots$ welche besondere Merkwürdigkeiten darbieten, so haben diese Ereignisse schon an und für sich eine hinreichend starke Wahrscheinlichkeit, dass es unwahrscheinlich und ganz unnütz ist, dass die mit C bezeichnete Wahrscheinlichkeit ins Spiel kommt. Was die physikalischen Erscheinungen anlangt, deren Ursachen noch unbekannt sind, so ist es vernünftig, sie ähnlichen Ursachen, wie die, welche wir kennen und denselben Gesetzen unterliegen, zuzuschreiben. Ihre Anzahl wird durch die Fortschritteder Wissenschaften übrigens täglich vermindert. So wissen wir z. B. jetzt, wodurch der Blitz entsteht und wie die Planeten in ihren Bahnen erhalten werden, was unsere Vorgänger nicht wussten, und ebenso werden unsere Nachfolger die Ursachen anderer Naturerscheinungen kennen, welche jetzt unbekannt sind.

§. **43.** Wenn die Anzahl der verschiedenen Ursachen, welchen man ein beobachtetes Ereigniss E zuschreiben kann, unendlich groß ist, so werden ihre Wahrscheinlichkeiten sowohl vor, als nach dem Stattfinden des Ereignisses E unendlich klein und die in den Formeln in §. **32** und **34.** vorkommenden Summen Σ verwandeln sich in bestimmte Integrale.

Um diese Transformation zu bewirken, wollen wir annehmen, dass das beobachtete Ereigniss E in dem Zuge einer weißen Kugel aus einer Urne A mit unendlich vielen weißen oder schwarzen Kugeln bestehe. In Beziehung auf das unbekannte Verhältniss der Anzahl der weißen

zur Anzahl aller Kugeln kann man unendlich viele Voraussetzungen machen, welche man als eben so viele verschiedene und sich gegenseitig ausschließende Ursachen des Stattfindens von E betrachtet. Wir wollen dieses Verhältniss mit x bezeichnen, so dass x eine Größe ist, welche von einem unendlich kleinen Werthe, der dem Falle entspricht, wo die aus der Urne A gezogene Kugel die einzige weiße ist, welche sie enthält, bis zu dem Werthe $x = 1$, welcher dem andern Grenzfalle entspricht, wo diese Urne nur weiße Kugeln enthält, stetig zunehmen kann.

Ferner sei X die Wahrscheinlichkeit des Stattfindens des Ereignisses E, wenn der Werth x dieses Verhältnisses gewiss wäre, so dass X in jedem Falle eine bekannte Function von x ist. Es kommt also darauf an, indem dieser Werth als eine der möglichen Ursachen von E betrachtet wird, die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit von x zu bestimmen, sowohl wenn alle diese Ursachen vor der Beobachtung gleich wahrscheinlich sind, als wenn sie a priori verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben.

Im ersten Falle ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus der Größe ϖ_n in §. **28.**, wenn man darin m unendlich groß und für $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die allen Werthen von X entsprechenden Werthe von x setzt. Bedienen wir uns, wie in §. **32.**, zuerst des Zeichens Σ und bezeichnen die Wahrscheinlichkeit von x mit ϖ, so ist folglich:

$$\varpi = \frac{X}{\Sigma X};$$

aber nach dem Hauptlehrsatze über die bestimmten Integrale ist auch:

$$\Sigma X dx = \int_0^1 X dx.$$

Wenn wir also das Differenzial dx als constant betrachten, und die beiden Glieder des vorhergehenden Bruches mit dx multipliciren, so ergibt sich:

$$\varpi = \frac{X dx}{\int_0^1 X dx}.$$

Bezeichnen wir zu gleicher Zeit die x entsprechende Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses E', welches von denselben Ursachen, als E abhängt, mit X' und mit ϖ' die vollständige Wahrscheinlichkeit des Stattfindens von E'; so haben wir nach der Regel in §. **30**:

$$\varpi' = \Sigma X' \varpi,$$

oder wenn man für ϖ seinen vorhergehenden Werth setzt und die Summe Σ in ein Integral verwandelt:

$$\varpi' = \frac{\int_0^1 X X' dx}{\int_0^1 X dx},$$

wo die Größe X' in jedem Beispiele eine gegebene Function von x ist.

In dem Falle, wo die verschiedenen Werthe von x vor der Beobachtung des Ereignisses E ungleich wahrscheinlich sind, wollen wir die unendlich kleine und vor dieser Beobachtung stattfindende Wahrscheinlichkeit der abstracten Wahrscheinlichkeit x von E mit $Y dx$ bezeichnen und in den Formeln in §. 34., $Y dx$ statt q_n setzen; so ergibt sich:

$$\varpi = \frac{X Y dx}{\int_0^1 X Y dx}$$

als die Wahrscheinlichkeit dieser abstracten Wahrscheinlichkeit x nach dem Stattfinden des Ereignisses E, und:

$$\varpi' = \frac{\int_0^1 X X' Y dx}{\int_0^1 X Y dx}$$

für die Wahrscheinlichkeit des Stattfindens des künftigen Ereignisses E'.

§. 44. Wenn man a priori gewiss ist, dass sich der Werth von x nicht von $x=0$ bis $x=1$ erstrecken kann und zwischen gegebenen Grenzen liegen muss, so nimmt man diese Grenzen für die der bestimmten Integrale, welche diese Formeln enthalten, oder wenn man ihre Grenzen 0 und 1 beibehalten will, so betrachtet man Y als eine discontinuirliche Function von x, welche außerhalb der gegebenen Grenzen dieser Veränderlichen Null ist. Die Veränderliche x mag alle Werthe von 0 bis 1 annehmen können, oder zwischen gegebene Grenzen eingeschlossen sein, so ist die Wahrscheinlichkeit λ, dass ihr unbekannter Werth nach dem beobachteten Ereignisse E wirklich zwischen andern engern Grenzen, als die ersten eingeschlossen ist, doch immer die Summe der Werthe von ϖ, welche den Werthen von x entsprechen, die zwischen diesen andern Grenzen liegen, so dass, wenn man diese Grenzen mit α und β bezeichnet:

$$\lambda = \frac{\int_\alpha^\beta X Y dx}{\int_0^1 X Y dx}$$

ist.

Diese Formel kann man bei einer Näherungsrechnung anwenden, wenn die Anzahl der Ursachen, welchen das Ereigniss E zugeschrieben werden kann, statt unendlich, nur sehr groß ist. Wir wollen z. B. annehmen, dass das Ereigniss E darin bestehe, aus einer Urne B, welche eine sehr große Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält, hinter einander n weiße Kugeln zu ziehen, wenn die gezogene Kugel jedesmal wieder hineingelegt wird. Die einem Verhältnisse x zwischen der Anzahl der in der Urne B enthaltenen weißen und der Anzahl aller darin enthaltenen Kugeln entsprechende Wahrscheinlichkeit X von E ist die $n$te Potenz dieses Verhältnisses. Wenn man die Wahrscheinlichkeit bestimmen soll, dass die Anzahl der in der Urne B enthaltenen weißen Kugeln größer ist, als die der schwarzen, so nimmt man in dem Ausdrucke dieser Wahrscheinlichkeit λ, $\alpha=\frac{1}{2}$ und $\beta=1$. Wenn ferner alle möglichen Werthe von x vor den Ziehungen gleich wahrscheinlich wären, so änderte sich Y nicht mit x und verschwände folglich aus diesem Ausdrucke. Es wäre also:

$$X=x^n, \int_0^1 X dx=\frac{1}{n+1},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 X dx=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

und folglich:

$$\lambda=1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

mit desto größerer Genauigkeit, je mehr weiße oder schwarze Kugeln die Urne B enthält. Vor den Ziehungen konnte man 1 gegen 1 wetten, dass die Anzahl der weißen Kugeln größer sei, als die der schwarzen; aber es ist schon der Zug von einer weißen Kugel aus der Urne B hinreichend, dass $\lambda=\frac{3}{4}$ wird, oder dass man 3 gegen 1 wetten kann, dass die Anzahl der weißen Kugeln größer ist, als die der schwarzen, und wenn man eine etwas beträchtliche Anzahl weißer Kugeln hinter einander aus der Urne B gezogen hat; so nähert sich die Wahrscheinlichkeit λ, dass sie mehr weiße, als schwarze Kugeln enthält, sehr der Gewissheit.

§. 45. Nach dem, was bereits früher (§. 30.) bemerkt worden, kann man E und E' als Ereignisse betrachten, welche aus demselben einfachen Ereignisse G zusammengesetzt und wegen ihrer gemeinschaftlichen Abhängigkeit von diesem Ereignisse mit einander verbunden sind.

Die Wahrscheinlichkeit von G ist unbekannt; die Wahrscheinlich-

keit vor dem Stattfinden von E, daſſ ſie den Werth x hat, iſt $=Y\,dx$ und nach dieſem Stattfinden $=\varpi$, und da dieſe Wahrſcheinlichkeit nothwendig einen der zwiſchen $x=0$ und $x=1$ liegenden Werthe hat; ſo muſſ die Summe der correſpondirenden Werthe von $Y\,dx$ $=1$ ſein, wie dieſes ſchon für die Summe der Werthe von ϖ ſtattfindet. Die gegebene Function Y von x, ſie ſei übrigens continuirlich oder discontinuirlich, muſſ alſo immer der Bedingung:

$$\int Y\,dx = 1$$

Genüge leiſten.

Wendet man die Regel der mathematiſchen Hoffnung (§. 23.) auf die Beſtimmung der Wahrſcheinlichkeit von G an, ſo muſſ man für ihren Werth vor der Beobachtung des Ereigniſſes E die Summe aller ihrer möglichen Werthe, mit ihren reſp. Wahrſcheinlichkeiten multiplicirt, d. h. die Summe aller Producte aus x und $Y\,dx$ von $x=0$ bis $x=1$ nehmen. Bezeichnet man dieſe Wahrſcheinlichkeit von G, oder genauer den Werth, welchen man für ihren unbekannten Werth vor der Beobachtung des Ereigniſſes E nehmen muſſ, mit γ, ſo hat man folglich:

$$\gamma = \int_0^1 x\,Y\,dx.$$

Man kann hierbei bemerken, daſſ, wenn x und Y als die Abſciſſe und Ordinate einer ebenen Curve betrachtet werden, und wenn man erwägt, daſſ die ganze von dieſer Curve eingeſchloſſene Fläche oder das Integral $\int Y\,dx=1$ iſt, die Größe γ die Abſciſſe des Schwerpunktes dieſer Fläche iſt. Dieſem für die Wahrſcheinlichkeit von G angenommenen Werthe von γ gemäß müſſte man die Wette für ein erſtes Stattfinden dieſes Ereigniſſes, aber nicht für ein mehrere Male wiederholtes Stattfinden einrichten. Denn jenachdem das Ereigniſſ G in einem erſten Verſuche ſtattgefunden hat, oder nicht, wird die Wahrſcheinlichkeit ſeines Stattfindens in den folgenden Verſuchen vermehrt oder vermindert.

Wenn z. B. von vorn herein alle Werthe von x gleich wahrſcheinlich ſind, ſo muſſ die Größe Y von x unabhängig ſein. Nach den beiden vorhergehenden Gleichungen hat man folglich:

$$Y=1,\ \gamma=\tfrac{1}{2}$$

und in der That haben wir alsdann bei einem erſten Verſuche keinen Grund, eher das Stattfinden des Ereigniſſes G, als das des entgegengeſetzten Ereigniſſes zu glauben. Aber wenn man für jedes der Er-

eignisse E und E' das einfache Ereigniss G nimmt, in welchem Falle:

$$X = x, \; X' = x$$

ist, so ergibt sich:

$$\varpi' = \frac{\int_0^1 X X' dx}{\int_0^1 X dx} = \frac{2}{3}$$

als die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn das Ereigniss G ein erstes Mal stattgefunden hat, es auch ein zweites Mal stattfinden wird, so dass die Wahrscheinlichkeit seines Stattfindens von dem ersten Versuche zum zweiten um $\frac{1}{6}$ zugenommen hat. Sie nimmt bei dem zweiten Versuche um denselben Bruch ab und reducirt sich auf $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, wenn bei dem ersten Versuche das entgegengesetzte Ereigniss stattgefunden hat. Denn nimmt man dieses für E und wieder G für E', d. h. setzt man:

$$X = 1 - x, \; X' = x,$$

so erhält man:

$$\varpi' = \frac{\int_0^1 (1-x) x \, dx}{\int_0^1 (1-x) \, dx} = \frac{1}{3}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss G, wenn es bei dem ersten Versuche nicht stattgefunden hat, bei dem zweiten stattfinden wird.

Vor dem Stattfinden des Ereignisses G, wird die Wahrscheinlichkeit, dass es zweimal hintereinander stattfindet, nach der Regel in §. 9. durch das Product aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dass es ein erstes Mal stattgefunden hat und der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, dass, wenn es dieses erste Mal stattgefunden hat, es auch bei dem zweiten Versuche stattfinden wird, ausgedrückt, und ist folglich $= \frac{1}{3}$ statt $\frac{1}{4}$, welches ihr Werth sein würde, wenn die Wahrscheinlichkeit von G bei dem zweiten Versuche $= \frac{1}{2}$ wäre, wie bei dem ersten. Die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung zweier Ereignisse bei den beiden ersten Versuchen ist doppelt so groß, oder gleich $\frac{2}{3}$. Denn diese Uebereinstimmung findet sowohl bei der Wiederholung des Ereignisses G, als bei der seines Gegentheiles statt, welche beide gleich wahrscheinlich sind.

Vergleicht man die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3})$ mit der in §. 27. gefundenen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}(1 + \delta^2)$ der Uebereinstimmung der beiden ersten Versuche, so ergibt sich $\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Wenn wir also

a priori über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses G nichts näher wissen, so daß wir für x alle möglichen Werthe mit gleichem Rechte annehmen könnten, so ist die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung zwei auf einander folgender Versuche dieselbe, als wenn zwischen der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses G und der des entgegengesetzten Ereignisses eine Differenz $=\frac{1}{\sqrt{3}}$ stattfände, ohne daſſ man die günstigste Wahrscheinlichkeit kennt. Wir werden sogleich die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung zweier successiver Versuche für den Fall bestimmen, wo man a priori weiß, daſſ alle möglichen Werthe von x, statt gleich möglich zu sein, höchst wahrscheinlich sehr wenig von einem bekannten oder unbekannten Bruche verschieden sind.

§. 46. Wir wollen nun, indem das einfache Ereigniſſ, dessen Wahrscheinlichkeit unbekannt ist, wieder mit G bezeichnet wird, das entgegengesetzte Ereigniſſ, dessen Wahrscheinlichkeit erhalten wird, wenn man die des Ereignisses G von der Einheit abzieht, mit H bezeichnen und voraussetzen: 1) daſſ das beobachtete Ereigniſſ E darin bestehe, daſſ das Ereigniſſ G, m mal und das Ereigniſſ H, n mal in einer beliebigen Ordnung stattfinden, und 2) daſſ das künftige Ereigniſſ E' darin bestehe, daſſ das Ereigniſſ G, m' mal und das Ereigniſſ H, n' mal ebenfalls in einer beliebigen Ordnung stattfinden.

Für den Werth x der Wahrscheinlichkeit von G und den Werth $1-x$ der Wahrscheinlichkeit von H sind die Wahrscheinlichkeiten X und X' von E und E' resp:

$$X=Kx^m(1-x)^n,\ X'=K'x^{m'}(1-x)^{n'},$$

wo K und K' von x unabhängige Zahlen bezeichnen (§. 14.). Die Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses E' nach der Beobachtung des Ereignisses E ist folglich:

$$\varpi'=\frac{K'\int_0^1 Yx^{m+m'}(1-x)^{n+n'}dx}{\int_0^1 Yx^m(1-x)^n dx}.$$

Die Zahl K ist aus dieser Formel verschwunden und für K' muſſ man den Werth:

$$K'=\frac{1.2.3\ldots(m'+n')}{1.2.3\ldots m'.1.2.3\ldots n'}$$

setzen. Wenn das Ereigniſſ E' darin bestände, daſſ die Ereignisse G und H in einer bestimmten Ordnung resp. m' und n' mal stattfinden, so müſſte man $K'=1$ setzen.

Wenn man vor der Beobachtung des Ereignisses E keinen Grund hat, irgend einen der Werthe von x für wahrscheinlicher zu halten, als einen andern, so nimmt man für die Größe Y die Einheit. Vermittelst theilweiser Integration ergibt sich ferner:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)(m+n+1)}$$

oder einfacher:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{P_m P_n}{P_{m+n+1}},$$

wenn man der Kürze wegen:

$$1.2.3\ldots(i-1)i = P_i$$

setzt, wo i eine beliebige ganze Zahl ist. Ebenso hat man:

$$\int_0^1 x^{m+m'} (1-x)^{n+n'} \, dx = \frac{P_{m+m'} P_{n+n'}}{P_{m+m'+n+n'+1}}$$

und da:

$$K' = \frac{P_{m'+n'}}{P_{m'} P_{n'}}$$

ist, so ergibt sich für den in Rede stehenden Fall:

$$\varpi' = \frac{P_{m'+n'} P_{m+m'} P_{n+n'} P_{m+n+1}}{P_{m'} P_{n'} P_m P_n P_{m+m'+n+n'+1}}.$$

Soll diese Formel den Fall mit in sich begreifen, wo eine der Zahlen m, n, m', n' Null ist, so muss man $P_0 = 1$ setzen. Wenn demnach $n = 0$ und $n' = 0$ ist, so hat man blos:

$$\varpi' = \frac{m+1}{m+m'+1},$$

wodurch die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt wird, dass das Ereigniss G ununterbrochen noch m' mal stattfinden wird, nachdem es bereits m mal ununterbrochen stattgefunden hat.

Für $m'=1$ und $n'=0$ reducirt sich der $Y=1$ entsprechende Werth von ϖ' auf:

$$\varpi'=\frac{m+1}{m+n+2}$$

und für $m'=0$ und $n'=1$ verwandelt er sich in:

$$\varpi'=\frac{n+1}{m+n+2}.$$

Die Summe dieser beiden Brüche ist der Einheit gleich, was in der That der Fall sein muss, weil der erste die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass das Ereigniss G nach $m+n$ Versuchen bei dem folgenden Versuche stattfindet und der zweite die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereigniss bei diesem Versuche nicht stattfindet. Der erste ist größer oder kleiner, als der zweite, jenachdem $m>n$ oder $m<n$ ist, d. h. jenachdem das Ereigniss G bei den $m+n$ ersten Versuchen mehr oder weniger stattgefunden hat, als das entgegengesetzte Ereigniss H. Sie sind einander gleich und haben den gemeinschaftlichen Werth $\frac{1}{2}$, wie vor den Versuchen, wenn diese beiden Ereignisse dieselbe Anzahl von Malen stattgefunden haben. Allein dieses ist im Allgemeinen nicht mehr der Fall, wenn man entweder nach der Natur des Ereignisses G, oder nach dem Resultate der vor dem Ereignisse E stattgehabten Versuche weiss, dass die Werthe der unbekannten Wahrscheinlichkeit von G nicht alle gleich wahrscheinlich sind, so dass man nicht $Y=1$ hat. In diesem Falle ist der Bruch γ im vorhergehenden §., welchen man für die Wahrscheinlichkeit von G vor den $m+n$ neuen Versuchen nehmen muss, nicht nur nicht $=\frac{1}{2}$, sondern bei dem folgenden Versuche kann die Wahrscheinlichkeit von G kleiner sein, als γ, obgleich G öfter stattgefunden hat, als das entgegengesetzte Ereigniss H, oder größer, als γ, obgleich G die kleinste Anzahl von Malen stattgefunden hat, wie man aus dem folgenden Beispiele sehen wird.

§. 47. Wir wollen annehmen, es sei a priori sehr wahrscheinlich, dass die Wahrscheinlichkeit von G sehr wenig größer oder kleiner, als ein gewisser Bruch r sei, so dass, wenn man $x=r+z$ setzt, die Größe Y eine Function von z ist, welche nur für sehr kleine positive oder negative Werthe dieser Veränderlichen merkliche Werthe hat. Die ebene Curve, deren veränderliche Coordinaten x und Y sind, entfernt sich nur innerhalb eines sehr kleinen Intervalles zu beiden Seiten der $x=r$ entsprechenden Ordinate merklich von der Axe der x. Der Schwerpunkt der von dieser Curve eingeschlossenen Fläche fällt also in dieses Intervall; folglich ist die Abscisse dieses Punktes sehr wenig von r

verschieden, und wenn man diese Differenz unberücksichtigt lässt, so ist r der Werth der Größe γ in §. 45.

Hiernach sind die Grenzen der Integrationen in Beziehung auf z die $x=0$ und $x=1$ entsprechenden Werthe $z=-r$ und $z=1-r$. Wenn man folglich in dem ersten Ausdrucke von ϖ' im vorhergehenden §. $m'=1$, $n'=0$, $dx=dz$ setzt, so ergibt sich daraus:

$$\varpi' = \frac{\int_{-r}^{1-r} Yx^{m+1}(1-x)^n dz}{\int_{-r}^{1-r} Yx^m (1-x)^n dz}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß G wieder einmal stattfindet, nachdem es in $m+n$ Versuchen m mal und das entgegengesetzte Ereigniß n mal statt gefunden hat. Aber wegen der Natur des unter dem Integralzeichen $\int$ stehenden Factors Y kann man, wenn man will, diese Integrale auf sehr kleine Werthe von z beschränken. Entwickelt man alsdann die übrigen Factoren nach den Potenzen von z in Reihen, so sind diese Reihen im Allgemeinen sehr convergent, wovon nur eine Ausnahme stattfinden würde, wenn r oder $1-r$ auch ein sehr kleiner Bruch wäre. In jedem andern Falle braucht man nur die ersten Glieder dieser Reihen beizubehalten, und wenn man das Quadrat von z vernachlässigt, so erhält man:

$$\begin{aligned} x^m(1-x)^n &= r^m(1-r)^n + \\ &[m r^{m-1}(1-r)^n - n r^m (1-r)^{n-1}] z \\ &+ \tfrac{1}{2}[m(m-1) r^{m-2}(1-r)^n - 2mn r^{m-1}(1-r)^{n-1} \\ &\qquad + n(n-1) r^m (1-r)^{n-2}] z^2, \end{aligned}$$

woraus sich der Werth von $x^{m+1}(1-x)^n$ ergibt, wenn man $m+1$ statt m setzt.

Substituirt man diese Werthe von $x^m(1-x)^n$ und von $x^{m+1}\times(1-x)^n$ in den Ausdruck von ϖ', bemerkt, daß:

$$\int_{-r}^{1-r} Y dz = 1, \int_{-r}^{1-r} Yz\,dz = 0$$

ist, setzt der Kürze wegen:

$$\int_{-r}^{1-r} Yz^2 dz = h$$

und vrnachlässigt das Quadrat von h, welches nur ein sehr kleiner Bruch sein kann; so erhält man:

$$\varpi' = r + \left(\frac{m}{r} - \frac{n}{1-r}\right) h,$$

woraus erhellet, dass die Wahrscheinlichkeit ϖ' des Stattfindens von G nach den $m+n$ Versuchen kleiner oder größer ist, als der Bruch r oder γ, welchen man für die Wahrscheinlichkeit von G vor diesen Versuchen hätte nehmen müssen, und zwar größer, wenn $\frac{m}{r}$ größer ist, als $\frac{n}{1-r}$ und kleiner im entgegengesetzten Falle. Wenn es gewiss wäre, dass r die Wahrscheinlichkeit von G wäre und m, n wären große Zahlen, so würden die Zahlen, welche ausdrücken, wie vielmal die Ereignisse G und H stattgefunden haben, höchst wahrscheinlich ihren resp. Wahrscheinlichkeiten r und $1-r$ proportional sein, und die Wahrscheinlichkeit ϖ' würde wegen der Gleichheit der Verhältnisse $\frac{m}{r}$ und $\frac{n}{1-r}$ der Wahrscheinlichkeit r gleich werden, wie es der Fall sein müsste.

§. 48. Setzt man in dem vorhergehenden Werthe von ϖ' die Zahl $m=1$ und $n=0$, so erhält man:

$$\varpi' = r + \frac{h}{r}$$

als die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss G, welches bei einem ersten Versuche stattgefunden hat, auch bei dem folgenden stattfinden wird, und da r die Wahrscheinlichkeit des Stattfindens dieses Ereignisses bei dem ersten Versuche war; so drückt das Product aus r und ϖ' oder r^2+h die Wahrscheinlichkeit aus, dass sich dieses Ereigniss in beiden Versuchen wiederholt. Setzt man darin $1-r$ für r, so erhält man $(1-r)^2+h$ als die Wahrscheinlichkeit der Wiederholung des entgegengesetzten Ereignisses, und wenn man diese Größe zu r^2+h addirt, so ergibt sich:

$$1 - 2r + 2r^2 + 2h$$

für die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der Resultate beider Versuche.

Wenn man in dem Werthe von ϖ' im vorhergehenden §. $m=0$ und $n=1$ setzt, so erhält man:

$$\varpi' = r - \frac{h}{1-r}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daſſ das Ereigniſſ G, wenn es bei dem ersten Versuche nicht stattfindet, bei dem zweiten stattfinden wird. Das Product $r(1-r)-h$ aus diesem Werthe ϖ' und $1-r$ drückt also die Wahrscheinlichkeit der Aufeinanderfolge zwei entgegengesetzter Ereignisse G und H aus, und wenn man sie doppelt nimmt, so erhält man:

$$2r-2r^2-2h$$

für die Wahrscheinlichkeit der Nichtübereinstimmung der Resultate der beiden ersten Versuche, welche sich auch aus der Wahrscheinlichkeit ihrer Uebereinstimmung ergibt, wenn man diese von der Einheit abzieht.

Der Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Uebereinstimmung und der Nichtübereinstimmung der Resultate der beiden ersten Versuche ist folglich:

$$(1-2r)^2+4h,$$

woraus erhellet, daſſ dieser Unterschied durch den Umstand, daſſ r nicht genau die Wahrscheinlichkeit von G ist, und daſſ man blos weiſſ, daſſ sich diese Wahrscheinlichkeit sehr wenig von r entfernt, vergrößert wird, so daſſ, wenn man auch wüſſte, daſſ $r=\frac{1}{2}$ wäre, es doch noch vortheilhaft sein würde, 1 gegen 1 zu wetten, daſſ die Resultate beider Versuche übereinstimmen. Dieses findet bei dem Spiele »Wappen und Schrift« statt, wo man ein Münzstück zum ersten Male anwendet. Die Gleichheit der Wahrscheinlichkeit des Treffens der beiden Flächen dieses Münzstückes ist physisch unmöglich; allein nach der Verfertigungsart desselben ist es sehr wahrscheinlich, daſſ die absolute Wahrscheinlichkeit für das Treffen jeder Fläche sehr wenig von $\frac{1}{2}$ verschieden ist.

§. 49. Wir wollen nun einen Lehrsatz anführen, dessen Beweis in dem folgenden Kapitel mitgetheilt werden wird, und welcher dazu dient, die abstracte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zwar nicht mit Gewiſſheit und Strenge, aber doch einen sehr wahrscheinlichen und sehr genäherten Werth derselben durch das Experiment zu bestimmen.

Es sei g die bekannte oder unbekannte abstracte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses G, d. h. das Verhältniſſ der diesem Ereignisse günstigen und gleich möglichen Fälle zu der Anzahl aller Fälle, welche überhaupt stattfinden können und ebenfalls gleich möglich sind. Wir wollen annehmen, es würden μ Versuche gemacht, während welcher diese eigenthümliche oder abstracte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses G, die von seiner relativen oder subjectiven Wahrscheinlichkeit verschieden ist (§. 1.), constant bleibt. Es sei r das Verhältniſſ der Zahl, welche

ausdrückt, wie vielmal das Ereigniss G in dieser Reihe von Versuchen stattfindet, zu der Gesammtzahl μ der Versuche. So lange μ keine sehr beträchtliche Zahl ist, ändert sich das Verhältniss r mit μ und kann weit größer oder kleiner sein, als g; aber wenn μ eine sehr große Zahl geworden ist, so nimmt die Differenz $r-g$, abgesehen vom Zeichen, um so mehr ab, je mehr μ noch zunimmt, so dass in aller Strenge $r-g=0$ sein würde, wenn μ unendlich groß werden könnte, und dass, indem ε einen beliebig kleinen Bruch bezeichnet, man die Zahl μ immer so groß annehmen kann, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $r-g$ kleiner ist, als ε, sich der Gewissheit so weit, als man nur will, nähert. In der Folge werden wir den Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, dass $r-g$ kleiner als ε ist, als Function von μ und ε mittheilen.

Wenn man z. B. aus einer Urne A mit a weißen und b schwarzen Kugeln successive eine sehr große Anzahl μ von Kugeln zieht, indem die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne A gelegt wird, und es befinden sich unter den μ gezogenen Kugeln α weiße und β schwarze; so hat man mit desto größerer Genauigkeit und Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{a}{a+b},\quad \frac{\beta}{\alpha+\beta}=\frac{b}{a+b},\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{b}$$

eine je größere Zahl $\mu=\alpha+\beta$ ist. Umgekehrt, wenn das Verhältniss der in der Urne A enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln unbekannt ist, und es sind in einer sehr großen Anzahl von Versuchen, während welcher sich dieses Verhältniss nicht geändert hat, aus dieser Urne α weiße und β schwarze Kugeln gezogen; so kann man mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit die Größen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ für die Näherungswerthe dieses unbekannten Verhältnisses und der unbekannten abstracten Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel nehmen, wie groß oder klein übrigens die Anzahl der in der Urne A enthaltenen Kugeln auch sein mag. Jedoch muss man bemerken, dass, wenn die Anzahl a der in dieser Urne enthaltenen weißen Kugeln gegen die Anzahl b der darin enthaltenen schwarzen Kugeln sehr klein ist, die Zahl α auch gegen die Zahl β sehr klein sein wird, und umgekehrt; aber das Verhältniss des einen der Brüche $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{a}{b}$ zu dem andern kann sehr von der Einheit verschieden sein, wofern die Reihe der Versuche nicht außerordentlich weit fortgesetzt ist. Wenn die bekannte oder unbekannte Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Ku-

gel sehr gering ist, so bedeutet die genäherte Gleichung $\frac{\alpha}{6} = \frac{a}{b}$ blos so viel, daß jeder der Brüche $\frac{\alpha}{6}$ und $\frac{a}{b}$ sehr klein ist.

Die eben ausgesprochene Regel ist auch auf die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen sich gegenseitig ausschließenden Ursachen, welchen man ein sehr viele Male beobachtetes Ereigniß E zuschreiben kann, anwendbar. Wenn γ die bekannte oder unbekannte Wahrscheinlichkeit einer dieser Ursachen C ist, so drückt das Verhältniß $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ mit einer sehr großen Annäherung und Wahrscheinlichkeit das Verhältniß der Zahlen aus, welche angeben, wieviele Male das Ereigniß E von der Ursache C und wieviele Male es von irgend einer andern Ursache hervorgebracht ist. Dieses gibt das Verhältniß dieser beiden Zahlen, wenn die Wahrscheinlichkeit γ a priori bekannt ist, oder den Werth dieser Wahrscheinlichkeit, wenn man dieses Verhältniß durch die Erfahrung bestimmen kann.

Wenn das Ereigniß E z. B. der Zug einer weißen Kugel aus einer Urne A mit a weißen und a' schwarzen Kugeln, oder aus einer Urne B mit b weißen und b' schwarzen Kugeln ist; so wird die Wahrscheinlichkeit γ, daß A die Ursache von E, d. h. daß die weiße Kugel aus dieser Urne gezogen ist, nach der Regel in §. 28. durch:

$$\gamma = \frac{a(b+b')}{a(b+b')+b(a+a')}$$

und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, oder daß die weiße Kugel aus der Urne B gezogen ist, durch:

$$1-\gamma = \frac{b(a+a')}{a(b+b')+b(a+a')}$$

ausdrückt. Hat man nun aus der einen oder der andern dieser beiden Urnen eine sehr große Anzahl μ weißer Kugeln gezogen, indem bei jedem Versuche die gezogene weiße oder schwarze Kugel wieder in die Urne gelegt wird, woraus sie gezogen ist, so ist das Verhältniß der Anzahl der aus der Urne A gezogenen weißen Kugeln zur Anzahl der aus der Urne B gezogenen weißen Kugeln höchst wahrscheinlich sehr wenig von dem Verhältnisse $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ verschieden, so daß man, wenn das erste dieser beiden Verhältnisse mit ϱ bezeichnet wird,

$$\varrho = \frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{a(b+b')}{b(a+a')}$$

nehmen kann.

Dieser Werth von ϱ reducirt sich auf $\frac{a}{b}$, wenn die in den Urnen A und B enthaltenen Anzahlen $a+a'$ und $b+b'$ weißer oder schwarzer Kugeln einander gleich sind. In diesem Falle kann man alle diese Kugeln in dieselbe Urne D legen, ohne das Verhältniß der aus der Urne D gezogenen und resp. von den Urnen A und B herrührenden weißen Kugeln zu verändern (§. **10.**).

Bei einer sehr großen Anzahl weißer Kugeln verhält sich also die erste dieser beiden Zahlen zu der zweiten fast wie a zu b, wie man sich überzeugen könnte, wenn man den weißen Kugeln der Urne A ein gewisses Zeichen und denen der Urne B ebenfalls ein bestimmtes anderes Zeichen gäbe und nach jeder Ziehung einer weißen oder schwarzen Kugel aus der Urne D diese Kugel wieder hineinlegte.

§. **50.** In den Büffonschen Werken*) findet man die Zahlenresultate eines Versuches über das Spiel »Wappen und Schrift«, welches uns ein Beispiel und eine Bestätigung der vorhergehenden Regel liefert.

Bei diesem Spiele hängt die Wahrscheinlichkeit, die eine oder die andere der beiden Flächen des Münzstückes zu treffen, von seiner physischen Constitution ab, welche uns nicht genau bekannt ist, und selbst wenn wir sie kännten, würde es ein Problem der Mechanik sein, die abstracte Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Wappens oder der Schrift daraus abzuleiten, welches Niemand zu lösen im Stande wäre. Der genäherte Werth dieser Wahrscheinlichkeit muss also für jedes Münzstück besonders durch Versuche bestimmt werden, so dass, wenn man in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen das Wappen m mal trifft, das Verhältniß $\frac{m}{\mu}$ für die Wahrscheinlichkeit des Treffens des Wappens genommen werden muss. Dieses ist alsdann auch die Wahrscheinlichkeit oder der Grund zu der Annahme, dass diese Fläche bei einem neuen Versuche mit demselben Münzstücke getroffen wird, und nach dem Resultate dieser Versuchsreihe kann man m gegen $\mu-m$ wetten, dass das Wappen getroffen wird. Vermittelst dieser Wahrscheinlichkeit $\frac{m}{\mu}$ des einfachen Ereignisses muss man auch die Wahrscheinlichkeiten der zusammengesetzten Ereignisse berechnen, wenigstens wenn sie wegen der Natur dieser Ereignisse nicht sehr gering sind.

Wir wollen nun annehmen, dass man eine sehr große Anzahl m

---

*) Arithmétique morale, article XVIII.

von Versuchsreihen angestellt, und, wie in dem angeführten Versuche, jede Reihe so weit fortgesetzt habe, bis das Wappen getroffen ist. Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Zahlen, welche ausdrücken, wievielmal das Wappen bei dem ersten, zweiten, dritten, ... Wurfe getroffen ist, so ist die Gesammtzahl μ der Würfe oder Versuche:

$$\mu = a_1 + 2\,a_2 + 3\,a_3 + \ldots,$$

und die Zahl m, welche ausdrückt, wievielmal das Wappen getroffen ist, ist zu gleicher Zeit:

$$m = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

so daß die Wahrscheinlichkeit p für das Treffen des Wappens mit desto größerer Annäherung und Genauigkeit durch:

$$p = \frac{m}{\mu}$$

ausgedrückt wird, je größer die Zahl μ ist.

Die Wahrscheinlichkeiten, daß man bei dem ersten Wurfe das Wappen trifft, bei dem zweiten, ohne daß es bei dem ersten stattfindet, bei dem dritten, ohne daß es bei den beiden ersten stattgefunden hat, u. s. w., sind resp. p, $p(1-p)$, $p(1-p)^2$, u. s. w.

Da nun die Zahlen, welche ausdrücken, wievielmal diese Ereignisse in den m Versuchsreihen stattgefunden haben, nach der Voraussetzung $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sind, so muß folglich, wenn diese Zahl sehr groß ist, sehr nahe

$$p = \frac{a_1}{m},\; p(1-p) = \frac{a_2}{m},\; p(1-p)^2 = \frac{a_3}{m},\; etc.$$

sein, vorausgesetzt, daß diese Wahrscheinlichkeiten nicht sehr kleine Brüche geworden sind. Dividirt man jede dieser Gleichungen durch die vorhergehende, so ergeben sich verschiedene Werthe von $1-p$, und folglich

$$p = \frac{a_1}{m},\; p = 1 - \frac{a_2}{a_1},\; p = 1 - \frac{a_3}{a_2},\; etc.$$

Diese Werthe von p, oder wenigstens eine gewisse Anzahl der erstern, sind um so weniger unter sich und von dem Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ verschieden, je größer die Zahlen m und μ sind, und sollten sie in aller Strenge gleich sein, so müßten diese Zahlen unendlich groß sein. Wenn man für p das Mittel aus diesen sehr wenig verschiedenen Brü-

chen anwendet, oder wenn man von dem sich aus der Gesammtheit der Versuche ergebenden Werthe $\frac{m}{\mu}$ von p Gebrauch macht, so erhält man:

$$a_1 = mp,\ a_2 = mp(1-p),\ a_3 = mp(1-p)^2,\ etc.$$

für die berechneten Werthe der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche sich sehr wenig von den beobachteten Zahlen entfernen müssen, wenigstens in den ersten Gliedern dieser abnehmenden geometrischen Progression.

In dem Büffonschen Versuche war die Anzahl m der Versuchsreihen $= 2048$ und aus den Angaben Büffon's geht hervor, dass:

$$a_1 = 1061,\ a_2 = 494,\ a_3 = 232,\ a_4 = 137,\ a_5 = 56,$$
$$a_6 = 29,\quad a_7 = 25,\quad a_8 = 8,\quad a_9 = 6$$

gewesen ist. Die Zahlen $a_{10}, a_{11}, \ldots$ fehlen, d. h. die Anzahl m der Versuchsreihen ist nicht weit genug fortgesetzt, damit das Wappen in einer oder mehrern Versuchsreihen nicht getroffen wurde. Diese Zahl ist die Summe der Werthe von $a_1, a_2, a_3, \ldots$, woraus sich auch:

$$\mu = 4040$$

und folglich:

$$p = \frac{m}{\mu} = 0{,}50693$$

ergibt. Vermittelst dieses Werthes von p findet man, wenn man die Brüche unberücksichtigt lässt:

$$a_1 = 1038,\ a_2 = 512,\ a_3 = 252,\ a_4 = 124,\ a_5 = 61,$$
$$a_6 = 30,\quad a_7 = 15,\quad a_8 = 7,\quad a_9 = 4,\quad a_{10} = 1,$$

und die folgenden Zahlen $a_{11}, a_{12}, \ldots$ würden kleiner als die Einheit sein. Vergleicht man nun diese Reihe der berechneten Werthe mit denen der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche sich aus der Beobachtung ergeben, so sieht man, dass sich die ersten wenig von einander unterscheiden. Bei den folgenden werden die Unterschiede größer, und es ist z. B. der berechnete Werth von a_7 nur $\frac{3}{5}$ des beobachteten Werthes; aber diese Zahl a_7 entspricht einem Ereignisse, dessen Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{100}$ ist. Bleibt man bei den drei ersten Gliedern der Reihe der beobachteten Zahlen stehen, so ergibt sich daraus:

$$p = \frac{a_1}{m} = 0{,}51806,\ p = 1 - \frac{a_2}{a_1} = 0{,}53441,\ p = 1 - \frac{a_3}{a_2} = 0{,}53033,$$

welche Größen sehr wenig von einander verschieden sind, und woraus das Mittel oder der dritte Theil ihrer Summe

$$p = 0{,}52760$$

ist, welches kaum um 0,02 von dem sich aus der Gesammtheit der Versuche ergebenden Werthe $\frac{m}{\mu}$ von p verschieden ist.

Wir haben diesen Versuch deswegen gewählt, weil er von Buffon angestellt ist und das Werk, worin er sich befindet, denselben authentisch macht. Es kann Jeder viele Versuche dieser Art anstellen, sowohl mit einem Münzstücke, als mit einem sechsseitigen Würfel. In diesem letzten Falle ist die Zahl, welche ausdrückt, wievielmal jede Fläche des Würfels bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen oben zu liegen kommt, ungefähr $\frac{1}{6}$ der Gesammtzahl der Versuche, wofern der Würfel nicht falsch oder schlecht construirt ist.

§. 51. Der Lehrsatz, auf welchen sich die vorhergehende Regel gründet, rührt von Jacob Bernulli her, welcher über den Beweis desselben 20 Jahre nachgedacht hat, und der Beweis, welchen er davon gegeben hat, ergibt sich mit Hülfe folgender Sätze aus dem binomischen Lehrsatze.

Es seien bei jedem Versuche p und q die gegebenen Wahrscheinlichkeiten der beiden entgegengesetzten Ereignisse E und F; ferner seien g, h, k ganze Zahlen von solcher Beschaffenheit, dass:

$$p = \frac{g}{k},\ q = \frac{h}{k},\ g + h = k,\ p + q = 1$$

ist, und m, n, μ andere ganze Zahlen, welche mit g, h, k durch die Gleichungen:

$$m = gk,\ n = hk,\ \mu = m + n = (g + h)k$$

verbunden sind, so dass sich die Wahrscheinlichkeiten p und q wie die Zahlen m und n verhalten, welche man so groß machen kann, als man will, wenn man die Zahlen g, h, k hinreichend vergrößert, ohne ihr Verhältniss zu verändern. Alsdann finden folgende Sätze statt

1) In der Entwickelung von $(p+q)^\mu$ ist das Glied am größesten, worin das Product $p^m q^n$ vorkommt, und da dieses Glied die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass das Ereigniss E, m mal und das Ereigniss F, n mal stattfindet (§. 14.); so folgt, dass dieses zusammen-

gesetzte Ereigniss, d. h. das Stattfinden der einfachen Ereignisse nach dem directen Verhältnisse ihrer resp. Wahrscheinlichkeiten, das wahrscheinlichste von allen zusammengesetzten Ereignissen ist, welche in einer beliebigen Anzahl μ von Versuchen stattfinden können.

2) Wenn diese Zahl μ sehr groß ist, so ist das Verhältniss des größten Gliedes der Entwickelung von $(p+q)^{\mu}$ zu der Summe aller Glieder oder zu der Einheit ein sehr kleiner Bruch, welcher fortwährend abnimmt, je mehr μ noch zunimmt. In einer langen Reihe von Versuchen ist also das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniss dennoch sehr wenig wahrscheinlich und zwar um so weniger, je weiter die Versuche fortgesetzt werden.

3) Aber wenn man in der Entwickelung von $(p+q)^{\mu}$ das größte Glied, die l folgenden und die l vorhergehenden Glieder betrachtet, und mit λ die Summe dieser $2l+1$ aufeinander folgenden Glieder bezeichnet; so kann man immer, ohne weder p, noch q zu ändern, μ so groß nehmen, dass der Bruch λ beliebig wenig von der Einheit verschieden ist, und je mehr μ noch zunimmt, desto mehr nähert sich λ der Einheit.

Hieraus folgt, dass bei einer langen Reihe von Versuchen immer eine große Wahrscheinlichkeit λ vorhanden ist, dass die Anzahl von Malen, welche das Ereigniss E stattfindet, zwischen den Grenzen $m \pm l$ und die Anzahl von Malen, in welchen das Ereigniss F stattfindet, zwischen den Grenzen $n \mp l$ liegt, so dass man ohne das Intervall $2l$ der Grenzen dieser beiden Zahlen zu ändern, die Anzahl μ der Versuche immer hinreichend groß annehmen kann, damit sich die Wahrscheinlichkeit λ der Gewissheit beliebig nähert. Wenn man die Verhältnisse dieser Grenzen zu der Zahl μ der Versuche nimmt, die vorhergehenden Gleichungen berücksichtigt und:

$$\frac{l}{\mu}=\delta,\ p\pm\delta=p',\ q\mp\delta=q'$$

setzt; so sind p' und q' diese Verhältnisse, und da der Bruch δ ohne Ende abnimmt, je mehr μ zunimmt, so folgt, dass sich diese mit μ veränderlichen Verhältnisse ebenfalls ohne Ende und mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit den Wahrscheinlichkeiten p und q der Ereignisse E und F nähern. Hierin besteht das schöne Theorem von Jacob Bernoulli.

Wegen des Beweises dieser Eigenschaften der Glieder der Entwickelung von $(p+q)^{\mu}$ verweisen wir auf die Werke, worin der bi=

nomische Lehrsatz näher erörtert ist.*) Der Beweis des Lehrsatzes selbst, welcher sich auf die Anwendung der Integralrechnung gründet, wird in dem folgenden Kapitel mitgetheilt. Bis dahin darf man nicht vergessen, daß es bei diesem Lehrsatze wesentliche Voraussetzung ist, daß die Wahrscheinlichkeiten der einfachen Ereignisse E und F während der ganzen Dauer der Versuche unveränderlich bleiben. Nun sind aber bei den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf verschiedene physische oder moralische Erscheinungen diese Wahrscheinlichkeiten meistens von einem Versuche zum andern veränderlich, und zwar auf eine ganz unregelmäßige Weise. Das in Rede stehende Theorem ist also bei diesen Arten von Untersuchungen nicht ausreichend; aber es gibt andere allgemeinere Sätze, welche stattfinden, wie veränderlich diese successiven Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse auch sein mögen, und worauf die wichtigsten Anwendungen der Theorie der Wahrscheinlichkeiten beruhen. Sie werden ebenfalls in den folgenden Kapiteln bewiesen werden, aber wir wollen sie jetzt schon anführen und das in der Einleitung erwähnte Gesetz der großen Zahlen als ein allgemeines Factum, welches sich aus Beobachtungen jeder Art ergibt, daraus ableiten.

§. 52. In einer sehr großen Anzahl μ successiver Versuche wollen wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E von beliebiger Natur bei dem ersten Versuche mit p_1, bei dem zweiten mit $p_2, \ldots$ und bei dem letzten mit p_μ bezeichnen. Ferner sei p' das Mittel aus allen diesen Wahrscheinlichkeiten oder der Quotient aus ihrer Summe und ihrer Anzahl, d. h.

$$p' = \frac{1}{\mu}(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\mu),$$

so ist zu gleicher Zeit die mittlere Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses F der Quotient aus der Summe der Brüche $1-p_1$, $1-p_2, \ldots, 1-p_\mu$ und der Zahl μ, und wenn man sie mit q' bezeichnet, so hat man $p'+q'=1$. Dieses vorausgesetzt, besteht einer der erwähnten allgemeinen Sätze darin: daß, wenn m und n die Zahlen sind, welche angeben, wievielmal die Ereignisse E und F während dieser Versuchsreihe stattgefunden haben, oder stattfinden werden, die Verhältnisse der Zahlen m und n zur Gesammtzahl $\mu = m + n$ der Versuche sehr nahe und mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit die Werthe der mittleren Wahrscheinlichkeiten p' und q' sind, und umgekehrt sind p' und q' die Näherungswerthe von $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$.

*) Ars conjectandi, pars quarta. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Lacroix, Abthl. I. Fink's System der niedern und höhern Algebra.

Wenn diese Verhältnisse aus einer langen Reihe von Versuchen abgeleitet sind, so geben sie die mittleren Wahrscheinlichkeiten p' und q', und ebenso bestimmen sie nach der Regel in §. 49. die Wahrscheinlichkeiten p und q der Ereignisse E und F selbst, wenn sie constant sind. Sollen aber diese Näherungswerthe von p' und q' auch zur näherungsweisen Bestimmung der Zahlen dienen können, welche ausdrücken, wieviele Mal die Ereignisse E und F in einer neuen, sehr langen Reihe von Versuchen stattfinden werden; so muss es gewiss, oder wenigstens höchst wahrscheinlich sein, dass die mittleren Wahrscheinlichkeiten von E und F für diese zweite Versuchsreihe genau, oder sehr nahe dieselben sind, als für die erste. Dieses findet nun aber vermöge des folgenden andern allgemeinen Satzes in der That auch statt.

Wir wollen annehmen, dass das bei jedem Versuche stattfindende Ereigniss E oder F vermöge seiner Natur von einer der sich gegenseitig ausschließenden ν Ursachen C_1, C_2, C_3, ... C_ν, welche wir zunächst als gleich möglich betrachten wollen, herrühren kann. Es sei c_i die einer beliebigen Ursache C_i entsprechende Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden des Ereignisses E, so dass bei einem bestimmten Versuche, z. B. bei dem ersten, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E gleich c_1 ist, wenn die Ursache C_1 vorhanden ist, gleich c_2, wenn es die Ursache C_2 ist, u. s. f. Wenn es nur eine einzige mögliche Ursache gäbe, so wäre die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E bei allen Versuchen nothwendig dieselbe; aber bei unserer Voraussetzung kann sie bei jedem Versuche ν gleich wahrscheinliche Werthe haben, und ändert sich also von einem Versuche zum andern. Setzt man nun:

$$\gamma = \frac{1}{\nu}(c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\nu),$$

so ist der Quotient aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass das Ereigniss E in einer sehr großen Anzahl bereits gemachter Versuche stattgefunden hat, oder in einer langen Reihe künftiger Versuche stattfinden wird, und aus ihrer Anzahl sehr nahe und höchst wahrscheinlich dem Bruche γ, dessen Größe von dieser Anzahl unabhängig ist, gleich. Man kann also die mittlere Wahrscheinlichkeit p' des Ereignisses E für zwei oder mehrere Versuchsreihen, wovon jede aus einer sehr großen Anzahl von Versuchen besteht, als gleich ansehen.

Verbindet man diesen zweiten allgemeinen Satz mit dem ersten, so ergibt sich daraus, dass, wenn m die Zahl ist, welche ausdrückt, wie vielmal das Ereigniss E in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen stattfinden wird, oder stattgefunden hat, und m' dieselbe Zahl für

eine andere sehr große Anzahl μ' von Versuchen, sehr nahe und höchst wahrscheinlich die Gleichung:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m'}{\mu'}$$

stattfindet. Diese beiden Verhältnisse würden in aller Strenge unter sich und der unbekannten Größe γ gleich sein, wenn die Zahlen μ und μ' unendlich groß werden könnten. Wenn ihre durch die Beobachtung gegebenen Werthe merklich von einander verschieden sind, so hat man Grund, zu glauben, dass in der Zwischenzeit der beiden Versuchsreihen einige der Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ unmöglich und andere möglich geworden sind, wodurch die Wahrscheinlichkeiten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ und folglich der Werth von γ verändert werden. Diese Veränderung ist jedoch nicht gewiss, und wir werden in der Folge den Ausdruck ihrer Wahrscheinlichkeit als Function des beobachteten Unterschiedes $\frac{m'}{\mu'} - \frac{m}{\mu}$ und der Anzahlen μ und μ' der Versuche angeben.

Diese Folgerung aus den beiden vorhergehenden Sätzen wird auf den Lehrsatz von Jacob Bernoulli zurückgeführt, wenn man bemerkt, dass in der Voraussetzung, worauf der zweite beruht, der Bruch γ die unbekannte, aber während der beiden Versuchsreihen constante Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E ist. Denn dieses Ereigniss kann bei jedem Versuche vermöge jeder der Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$, welche alle dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\nu}$ haben, stattfinden. Die Wahrscheinlichkeit seines Stattfindens vermöge der beliebigen Ursache C_i wird nach der Regel in §. 5. durch das Product $\frac{1}{\nu} c_i$ und seine vollständige Wahrscheinlichlichkeit nach der Regel in §. 10. durch die Summe der Producte $\frac{1}{\nu} c_1, \frac{1}{\nu} c_2, \frac{1}{\nu} c_3, \ldots$, welche $= \gamma$ ist, ausgedrückt.

Der Einfachheit wegen haben wir alle die Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ als gleich möglich betrachtet; allein man kann auch annehmen, dass jede derselben in der Gesammtzahl ν der Ursachen mehrere Male vorkommt, wodurch sie ungleich wahrscheinlich gemacht werden. Alsdann bezeichne $\nu\gamma_i$ die Zahl, welche angibt, wie vielmal die beliebige Ursache C_i unter dieser Anzahl ν von Ursachen vorkommt, so drückt der Bruch γ_i die Wahrscheinlichkeit dieser Ursache aus, und der Ausdruck von γ verwandelt sich in:

$$\gamma = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu.$$

Zu gleicher Zeit hat man:

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots+\gamma_\nu=1,$$

weil eine der Ursachen, worauf sich diese Wahrscheinlichkeiten beziehen, bei jedem Versuche nothwendig stattfinden muss. Wenn die Anzahl der möglichen Ursachen unendlich groß ist, so wird die Wahrscheinlichkeit jeder derselben unendlich klein. Bezeichnet man in diesem Falle eine der Wahrscheinlichkeiten $c_1, c_2, c_3, \ldots c_\nu$ mit x, deren Werth sich von $x=0$ bis $x=1$ erstrecken kann, und die Wahrscheinlichkeit der Ursache, welche dem Ereignisse E diese Wahrscheinlichkeit x ertheilt, mit $Y dx$; so hat man, wie in §. 45:

$$\gamma=\int_0^1 Y x\,dx, \int_0^1 Y\,dx=1.$$

§. 53. Wir wollen nun annehmen, dass es statt zwei möglicher Ereignisse E und F deren eine bestimmte Anzahl λ gebe, wo eins bei jedem Versuche stattfinden muss. Dieses ist der Fall, wenn man eine Größe A von einer beliebigen Natur betrachtet, welche λ bekannte oder unbekannte Werthe haben kann, die wir mit $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\lambda$ bezeichnen wollen, und wovon bei jedem Versuche einer stattfinden muss, so dass der, welcher stattgefunden hat oder stattfinden wird, das beobachtete oder künftige Ereigniss ist. Ferner sei $c_{i,i'}$ die Wahrscheinlichkeit, welche die Ursache C_i, wenn sie gewiss wäre, dem Werthe $a_{i'}$ von A ertheilen würde. Die Werthe von $c_{i,i'}$ für die verschiedene Indices i und i' von $i=1$ bis $i=\nu$ und von $i'=1$ bis $i'=\lambda$ sind bekannt oder unbekannt. Allein für jeden Index i' muss:

$$c_{i,1}+c_{i,2}+c_{i,3}+\ldots+c_{i,\lambda}=1$$

sein. Denn wenn die Ursache C_i gewiss wäre, so würde einer der Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\lambda$ vermöge dieser Ursache zuverlässig stattfinden. Ferner wollen wir mit $\alpha_{i'}$ den Quotienten aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten von $a_{i'}$, welche in einer sehr großen Anzahl μ successiver Versuche stattgefunden haben, oder stattfinden werden, und aus dieser Anzahl, d. h. die mittlere Wahrscheinlichkeit dieses Werthes $a_{i'}$ von A in dieser Reihe von Versuchen bezeichnen. Betrachtet man $a_{i'}$ als ein Ereigniss E und alle übrigen $\lambda-1$ Werthe von A zusammengenommen als das entgegengesetzte Ereigniss F, so kann man nach dem zweiten allgemeinen Satze im vorhergehenden §:

$$a_{i'}=\gamma_1 c_{1,i'}+\gamma_2 c_{2,i'}+\gamma_3 c_{3,i'}+\ldots+\gamma_\nu c_{\nu,i'}$$

nehmen, wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\nu$ wieder die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ursachen sind, welche die Ereignisse während der Reihe der Versuche herbeiführen oder die Werthe von A, welche man beobachtet hat, oder beobachten wird, hervorbringen können. Nun besteht der dritte noch anzuführende allgemeine Satz darin: dass der Quotient aus der Summe dieser μ Werthe von A und ihrer Anzahl oder der **mittlere** Werth dieser Größe höchst wahrscheinlich sehr wenig von der Summe der Producte aus ihren möglichen Werthen und deren resp. mittlern Wahrscheinlichkeiten verschieden ist. Bezeichnet man also die Summe der wirklichen Werthe von A mit s, so hat man sehr nahe und mit einer großen Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{s}{\mu} = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + \ldots + a_\lambda \alpha_\lambda,$$

so dass man, wenn δ einen beliebig kleinen Bruch bezeichnet, die Anzahl μ der Versuche immer groß genug annehmen kann, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied zwischen den beiden Theilen dieser Gleichung kleiner ist, als δ, beliebig wenig von der Einheit verschieden ist. Ferner wollen wir bemerken, dass der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung vermöge des vorhergehenden Ausdruckes von α_i, und der sich daraus ergebenden Werthe von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ von der Zahl μ unabhängig ist. Wenn also diese Zahl sehr groß ist, so ist die Summe s ihr fast proportional, und wenn man folglich die Summe der Werthe von A in einer andern Reihe von einer sehr großen Anzahl μ' von Versuchen mit s' bezeichnet; so ist der Unterschied der Verhältnisse $\frac{s}{\mu}$ und $\frac{s'}{\mu'}$ höchst wahrscheinlich sehr klein, und wenn man denselben vernachlässigt, so hat man:

$$\frac{s}{\mu} = \frac{s'}{\mu'}.$$

Bei den meisten Untersuchungen ist die Zahl λ der möglichen Werthe von A unendlich groß; sie wachsen nach unendlich kleinen Incrementen, sind zwischen gegebene Grenzen eingeschlossen und die irgend einer Ursache C_i entsprechende Wahrscheinlichkeit jedes dieser Werthe wird folglich unendlich klein. Bezeichnet man diese Grenzen mit l und l' und die der Ursache C_i entsprechende Wahrscheinlichkeit irgend eines dieser Werthe z, welcher sich von $z=l$ bis $z=l'$ erstrecken kann, mit $Z_i dz$; so hat man:

$$\int_l^{l'} Z_i dz = 1.$$

Die totale Wahrscheinlichkeit des Werthes z oder seine mittlere Wahrscheinlichkeit während der Versuchsreihe ist $=Zdz$, wenn man der Kürze wegen

$$\gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 + \ldots + \gamma_\nu Z_\nu = Z$$

setzt, und hieraus ergibt sich:

$$\frac{s}{\mu} = \int_l^{l'} Zz\,dz.$$

Die Größe Z ist eine bekannte oder unbekannte Function von z; aber da die Summe der Brüche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, so wie jedes der Integrale $\int_l^{l'} Z_1\,dz$, $\int_l^{l'} Z_2\,dz$, $\int_l^{l'} Z_3\,dz$, *etc.* der Einheit gleich ist, so ist immer:

$$\int_l^{l'} Z\,dz = 1,$$

die Anzahl ν der möglichen Ursachen sei endlich oder unendlich.

§. 54. Das Gesetz der großen Zahlen liegt in den beiden Gleichungen:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m'}{\mu'}, \quad \frac{s}{\mu} = \frac{s'}{\mu'},$$

welche auf alle ungewisse Ereignisse der physischen und moralischen Welt anwendbar sind. Es hat zwei verschiedene Bedeutungen, wovon jede einer dieser Gleichungen entspricht und welche sich beide beständig bestätigen, wie aus den verschiedenen, in der Einleitung angeführten Beispielen erhellet. Diese Beispiele jeglicher Art können hinsichtlich der Allgemeinheit und Richtigkeit des Gesetzes der großen Zahlen keinen Zweifel übrig lassen; aber wegen der Wichtigkeit dieses Gesetzes war es zweckmäßig, dasselbe a priori zu beweisen; denn er bildet die nothwendige Grundlage der Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche uns am meisten interessiren, und außerdem hat der auf den Sätzen in den beiden vorhergehenden §§. beruhende Beweis desselben den Vortheil, den Grund seines Stattfindens selbst anzugeben.

Nach der ersten Gleichung kann die Zahl m, welche ausdrückt, wie vielmal das Ereigniß E von beliebiger Natur in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen stattfindet, als dieser Zahl μ proportional betrachtet werden. Das Verhältniß $\frac{m}{\mu}$ hat für jede besondere Art von Erscheinungen einen besondern Werth γ, welchen es in aller Strenge

erreichen würde, wenn μ unendlich groß werden könnte, und die Theorie der Wahrscheinlichkeiten lehrt uns, dass dieser Werth erhalten wird, wenn man die Summe der Producte aus den möglichen Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses E bei jedem Versuche und den resp. Wahrscheinlichkeiten der ihnen entsprechenden Ursachen bildet. Die Gesammtheit dieser Ursachen wird besonders durch die Relation charakterisirt, welche für jede derselben zwischen ihrer Wahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeit, welche sie dem Stattfinden des Ereignisses E ertheilen würde, wenn sie gewiss wäre, stattfindet. Wir finden, dass sich das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ in den verschiedenen aus sehr vielen Versuchen bestehenden Versuchsreihen nicht ändert, so lange dieses Gesetz der Wahrscheinlichkeit ungeändert bleibt. Wenn sich dagegen dieses Gesetz für zwei Versuchsreihen geändert hat, und daraus eine merkliche Veränderung der mittleren Wahrscheinlichkeit γ entstanden ist, so wird dieses durch eine entsprechende Veränderung des Werthes von $\frac{m}{\mu}$ angezeigt. Wenn in der Zwischenzeit der beiden Beobachtungsreihen irgend welche Umstände die physischen oder moralischen Ursachen, welche dem Stattfinden von E die größten Wahrscheinlichkeiten ertheilen, wahrscheinlicher gemacht haben, so nimmt der Werth von γ innerhalb dieses Intervalles zu und das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ ist in der zweiten Reihe größer, als es in der ersten war, während das Gegentheil stattfindet, wenn die erwähnten Umstände die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen vergrößert haben, bei welchem das Stattfinden von E die kleinsten Wahrscheinlichkeiten hat. Wenn alle diese möglichen Ursachen vermöge der Natur dieses Ereignisses gleich wahrscheinlich sind, so ist $\mathrm{Y}=1$ und $\gamma=\frac{1}{2}$, und die Zahl, welche ausdrückt, wie vielmal das Ereigniss E in einer langen Reihe von Versuchen stattfindet, ist höchst wahrscheinlich sehr wenig von der Hälfte der Anzahl der Versuche verschieden. Desgleichen, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen des Ereignisses E den Wahrscheinlichkeiten proportional sind, welche diese Ursachen dem Stattfinden von E ertheilen, und die Anzahl derselben ist unendlich groß, so ist $\mathrm{Y}=ax$, und wenn das Integral $\int_0^1 \mathrm{Y}\,dx=1$ sein soll, so muss $a=2$ sein, woraus sich also $\gamma=\frac{2}{3}$ ergibt. In einer sehr langen Reihe von Versuchen nähert sich also die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E doppelt so viele Male stattfindet, als das entgegengesetzte Ereigniss, der Gewissheit sehr. Aber bei den meisten Untersuchungen ist uns das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen unbekannt, die mittlere Wahr=

scheinlichkeit γ kann nicht a priori berechnet werden und nur durch die Erfahrung lässt sich ein sehr wahrscheinlicher Näherungswerth erhalten, wenn man die Reihe der Versuche weit genug fortsetzt, damit das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ fast unveränderlich wird, und alsdann dieses Verhältniss für diesen Werth nimmt.

Die fast vollkommene Unveränderlichkeit dieses Verhältnisses $\frac{m}{\mu}$ für jede Art von Ereignissen ist ein sehr bemerkenswerthes Factum, wenn man alle Veränderungen der Wahrscheinlichkeiten während einer langen Reihe von Versuchen in Betracht zieht. Man könnte geneigt sein, sie einer geheimen Ursache zuzuschreiben, welche von den physischen oder moralischen Ursachen der Erscheinungen verschieden ist; allein die Theorie der Wahrscheinlichkeiten zeigt uns, dass diese Unveränderlichkeit nothwendig stattfindet, so lange das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen für jede Art von Erscheinungen sich nicht ändert, so dass man sie in jedem Falle als den Normalzustand der Dinge, welcher von selbst und ohne Hülfe irgend einer fremden Ursache stattfindet, und im Gegentheil zu einer merklichen Veränderung eine solche Ursache erforderlich wäre, betrachten muss. Man kann diesen natürlichen oder Normalzustand mit dem Ruhezustande der Körper vergleichen, welcher vermöge der bloßen Trägheit der Materie so lange stattfindet, als er von keiner fremden Ursache aufgehoben wird.

§. 55. Ehe wir die zweite der beiden vorhergehenden Gleichungen betrachten, wird es zweckmäßig sein, einige Erläuterungsbeispiele der erstern anzuführen.

Gesetzt, man hätte ν Urnen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_\nu$ mit weißen und schwarzen Kugeln, und es sei c_n die Wahrscheinlichkeit, aus irgend einer dieser Urnen C_n eine weiße Kugel zu ziehen, welche Wahrscheinlichkeit für mehrere dieser Urnen dieselbe sein kann. Nun nimmt man zufällig eine dieser Urnen hinweg, wofür man eine gleiche an die Stelle setzt, hierauf eine zweite, u. s. f., so dass das System der Urnen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ immer dasselbe bleibt und eine unbegrenzte Reihe von Urnen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ gebildet wird, welche nur die gegebenen Urnen $C_1, C_2, C_3, \ldots$, mehr oder weniger wiederholt, enthält. Es seien $b_1, b_2, b_3, \ldots$ resp. die Wahrscheinlichkeiten, aus den Urnen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine weiße Kugel zu ziehen, so dass die unbegrenzte Reihe $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ebenfalls nur die gegebenen Wahrscheinlichkeiten $c_1, c_2, c_3, \ldots$, welche darin wiederholt vorkommen können, enthält. Alsdann zieht man aus jeder der Urnen $B_1, B_2, B_3, \ldots B_\mu$ incluf. eine Kugel. Bezeichnet man nun die mittlere Wahrscheinlichkeit

des Zuges einer weißen Kugel in diesen μ successiven Ziehungen mit $\mathfrak{s}$, so hat man:

$$\mathfrak{s}=\frac{1}{\mu}(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_\mu).$$

Die Urnen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ stellen hier die ν möglichen Ursachen des Treffens einer weißen Kugel bei jedem Versuche dar. Wenn also μ eine sehr große Zahl ist, und man setzt, wie weiter oben:

$$\gamma=\frac{1}{\nu}(c_1+c_3+c_2+\ldots+c_\nu),$$

und bezeichnet die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln mit m, so ist nach dem Vorhergehenden sehr nahe und mit einer großen Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{m}{\mu}=\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}=\gamma,\ m=\mu\gamma.$$

Die Zahl m ändert sich also nicht merklich, wenn man die Ziehungen aus denselben Urnen $B_1, B_2, B_3, \ldots B_\mu$ oder aus einer Anzahl μ anderer auf einander folgender Urnen wiederholt, und wenn diese Ziehungen aus einer andern sehr großen Anzahl μ' von Urnen geschieht; so ist der genäherte und sehr wahrscheinliche Werth der Anzahl der gezogenen weißen Kugeln $=\frac{\mu' m}{\mu}$.

Wenn man aus dem Systeme der Urnen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ μmal hintereinander ganz zufällig eine Kugel zieht, indem man die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne legt, woraus sie gezogen ist, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei allen Versuchen dieselbe und nach der Regel in §. **10.** gleich γ. Wenn die Anzahl der Versuche sehr groß ist, so ist die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln nach der Regel in §. **49.** sehr nahe und höchst wahrscheinlich dem Producte $\mu\gamma$ gleich, wie in dem vorhergehenden Beispiele; allein diese beiden Beispiele sind wesentlich verschieden, und die beiden Resultate stimmen nur dann überein, wenn μ eine sehr große Zahl ist. Wenn dieses nicht der Fall ist, so hängt die Wahrscheinlichkeit der Ziehung einer gegebenen Anzahl m weißer Kugeln in dem ersten Beispiele nicht blos von dem Systeme der gegebenen Urnen $C_1, C_2, C_3, \ldots$, sondern auch von dem Systeme der Urnen $B_1, B_2, B_3, \ldots$, welches aus jenem zufällig gebildet ist, ab. Wir wollen z. B. die Anzahl der gegebenen Urnen auf die drei C_1, C_2, C_3, reduciren

und $\mu = 2$, $m = 1$ setzen, so dass es darauf ankommt, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, aus einer der beiden Urnen B_1 und B_2, eine weiße und aus der andern eine schwarze Kugel zu ziehen. Alsdann können für diese beiden Urnen die folgenden 9 verschiedenen Combinationen stattfinden:

$B_1 = B_2 = C_1$, $B_2 = B_1 = C_2$, $B_1 = B_2 = C_3$,
$B_1 = C_1$ und $B_2 = C_2$, $B_1 = C_1$ und $B_2 = C_3$, $B_1 = C_2$ und $B_2 = C_3$,
$B_1 = C_2$ und $B_2 = C_1$, $B_1 = C_3$ und $B_2 = C_1$, $B_1 = C_3$ und $B_2 = C_2$.

Für jede dieser 9 Combinationen hat die gesuchte Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Werth, nämlich für die drei ersten resp. die Werthe:

$$2\,c_1(1-c_1),\ 2\,c_2(1-c_2),\ 2\,c_3(1-c_3)$$

und für die drei mittleren, so wie für die drei letztern, die Werthe:

$$c_1(1-c_2)+c_2(1-c_1),\ c_1(1-c_3)+c_3(1-c_1),\ c_2(1-c_3)+c_3(1-c_2).$$

Es ist leicht einzusehen, dass der mittlere Werth dieser 9 Wahrscheinlichkeiten oder der Quotient aus ihrer Summe und der Zahl 9 die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen und einer schwarzen Kugel sein muss, wenn der Zug das erste Mal ganz zufällig aus den Urnen C_1, C_2, C_3 geschieht, und das zweite Mal, nachdem die erste gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt ist, woraus sie gezogen war; und in der That wäre diese Wahrscheinlichkeit dem doppelten Producte aus $\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)$ und $1-\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)$ gleich, welches ein Neuntel der Summe der 9 vorhergehenden Wahrscheinlichkeiten ist. Ehe das System der Urnen B_1, B_2, B_3, ... aus dem Systeme der gegebenen Urnen gebildet und hinweggenommen ist, hätten wir keinen Grund zu der Annahme, dass die $n$te Urne B_n eher eine als die andere der Urnen C_1, C_2, C_3, ... sei, und für uns wäre folglich die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel bei dem $n$ten Versuche der Quotient aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten c_1, c_2, c_3 und ihre Anzahl, d. h. die Größe γ. Aber obgleich sie für alle Ziehungen dieselbe und ihre Anzahl μ beliebig groß ist, so sind wir blos vermöge der Regel in §. 49. doch nicht zu dem Schlusse berechtigt, dass die Anzahl m der Ziehungen weißer Kugeln aus den Urnen B_1, B_2, B_3, ... sehr wahrscheinlich sehr wenig von dem Producte $\mu\gamma$ verschieden sein muss. Denn man muss nicht vergessen, dass sich diese Regel auf die eigenthümliche, abstracte Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses

und nicht auf seine subjective Wahrscheinlichkeit oder den Grund, welchen wir für die Annahme seines Stattfindens haben, gründet.

§. 56. Als zweites Beispiel wollen wir annehmen, dass man eine sehr große Anzahl von Thalerstücken, welche wir mit $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bezeichnen wollen, hätte, und wovon jedes eine seiner beiden Flächen nach oben kehrt, wenn es, nachdem es in die Luft geworfen war, zu Boden gefallen ist. Für irgend eins dieser Thalerstücke A_i wollen wir die abstracte Wahrscheinlichkeit, dass der Kopf oder das Bildniss getroffen wird oder oben liegt, und welche von der physischen Constitution dieses Münzstückes abhängig ist, mit a_i bezeichnen. Der Werth von a_i ist a priori unbekannt; man bestimmt ihn daher durch Versuche, indem man das Münzstück A_i eine sehr große Anzahl m von Malen in die Luft wirft, und da diese abstracte Wahrscheinlichkeit während dieser Reihe von Versuchen constant bleibt, so kann man, wenn das Bildniss n_i mal oben liegt, nach der Regel in §. **49**:

$$a_i = \frac{n_i}{m}$$

für ihren genäherten und sehr wahrscheinlichen Werth nehmen. Dieses Werthes bedient man sich alsdann zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen künftigen Ereignisse bei den Würfen desselben Münzstückes A_i, und man kann m gegen $m - n_i$ wetten, dass das Bildniss bei einem neuen Versuche getroffen wird, m^2 gegen $m - n_i^2$, dass es bei zwei neuen successiven Versuchen zweimal oben liegt, $2 n_i \times (m - n_i)$ gegen $m^2 - 2 n_i (m - n_i)$, dass es in diesen beiden Versuchen nur einmal oben liegt, und so fort. In einer neuen Versuchsreihe von einer sehr großen Anzahl m' von Versuchen ist die Zahl n'_i, welche angibt, wie viele Male das Bildniss oben gelegen hat, wieder nach der Regel in §. **49**. sehr nahe und mit einer großen Wahrscheinlichkeit dem Producte $m' a_i$ gleich. Die beiden Verhältnisse $\frac{n_i}{m}$ und $\frac{n'_i}{m'}$ müssen folglich sehr wenig von einander verschieden sein; aber da der durch Versuche bestimmte Werth von a_i blos sehr wahrscheinlich und nicht gewiss ist, so ist die Wahrscheinlichkeit des geringen Unterschiedes dieser beiden Verhältnisse, wie wir in der Folge sehen werden, nicht so groß, als wenn der Werth dieser Wahrscheinlichkeit a_i gewiss und a priori gegeben wäre.

Wir wollen nun annehmen, daſſ man, ſtatt daſſelbe Münzſtück eine ſehr große Anzahl von Malen in die Luft zu werfen, eine ſehr große Anzahl μ von Thalerſtücken anwendet, die man ganz zufällig unter den in derſelben Münze verfertigten Thalerſtücken nimmt, und n ſei die Zahl, welche angibt, wie vielmal das Bildniſſ oben gelegen hat. Vermöge der beiden allgemeinen Sätze in §. 52. haben wir ſehr nahe und höchſt wahrſcheinlich:

$$\alpha = \frac{n}{\mu},$$

wie wenn die unbekannten Wahrſcheinlichkeiten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ alle einander gleich wären, und wenn α die mittlere Wahrſcheinlichkeit für das Treffen des Bildniſſes nicht blos für alle Thalerſtücke, wovon man Gebrauch gemacht hat, iſt, ſondern für alle Thalerſtücke derſelben Art und welche auf dieſelbe Weiſe verfertigt ſind.

Jenachdem man $\frac{n}{\mu} > \frac{1}{2}$ oder $\frac{n}{\mu} < \frac{1}{2}$ findet, iſt alſo bei den auf dieſelbe Weiſe verfertigten Thalerſtücken die Wahrſcheinlichkeit für das Treffen des Bildniſſes im Allgemeinen größer oder kleiner, als die für das Treffen der andern Fläche des Münzſtückes. Da die Wahrſcheinlichkeit a_i für ein einzelnes Münzſtück A_i von α verſchieden iſt, ſo kann es geſchehen, daſſ zu gleicher Zeit $\frac{n_i}{\mu} < \frac{1}{2}$ und $\frac{n}{m} > \frac{1}{2}$ oder $\frac{n_i}{m} > \frac{1}{2}$ und $\frac{n}{\mu} < \frac{1}{2}$ iſt.

Wenn man abermals dieſelben Thalerſtücke, oder allgemeiner eine ſehr große Anzahl μ' anderer Thalerſtücke aus derſelben Münze und mit demſelben Bildniſſ ſucceſſive in die Luft wirft, ſo ändert ſich die Größe α nicht, und wenn folglich n' die Zahl iſt, welche angibt, wie vielmal das Bildniſſ in dieſer neuen Verſuchsreihe getroffen iſt, ſo muſſ man für daſſelbe Münzſtück A_i in den beiden verſchiedenen Verſuchsreihen ſowohl

$$\frac{n'}{\mu'} = \frac{n}{\mu}, \text{ als } \frac{n_i}{m} = \frac{n'_i}{m'}$$

haben. Aber dieſe beiden Verhältniſſe $\frac{n}{\mu}$ und $\frac{n'}{\mu'}$ ſind im Allgemeinen verſchieden, wenn die in den beiden Verſuchsreihen angewandten Münzſtücke nicht von derſelben Art ſind, oder aus derſelben Münze herrüh-

ren, und ebenso ist das Verhältniss $\frac{n_i}{m}$ für die einzelnen Münzstücke verschieden.

§. 57. Obgleich die constanten und die mittlern abstracten Wahrscheinlichkeiten ungewisser Ereignisse auf dieselbe Weise und mit derselben Wahrscheinlichkeit durch Versuche bestimmt werden, so sind sie bei den Anwendungen, welche man davon machen kann, doch wesentlich verschieden. Die mittlere, wie die constante abstracte Wahrscheinlichkeit gibt unmittelbar die Wahrscheinlichkeit an, dass das betrachtete Ereigniss bei einem einzelnen neuen Versuche stattfinden wird; allein dieses ist nicht immer der Fall, wenn von dem Stattfinden eines aus diesem Ereignisse zusammengesetzten Ereignisses die Rede ist.

Wir wollen z. B. für das zusammengesetzte Ereigniss die Uebereinstimmung der Resultate zwei successiver Würfe mit einem Thalerstücke nehmen, so sind alsdann zwei verschiedene Fälle zu untersuchen. Denn man kann annehmen, dass diese beiden Versuche mit zwei unter den λ Thalerstücken $A_1, A_2, A_3, \ldots$, welche auf dieselbe Weise verfertigt sind, zufällig gewählten verschiedenen oder nicht verschiedenen Münzstücken, oder mit demselben ebenfalls zufällig gewählten Thalerstücke angestellt sind. In dem ersten Falle hängt die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der Resultate beider Versuche nur von der im vorhergehenden §. angeführten Größe α ab, und ist dieselbe, als wenn von constanten Wahrscheinlichkeiten die Rede wäre; aber im zweiten Falle hängt sie auch noch von einer andern unbekannten Größe ab, durch welche sie sich von ihrem Werthe bei constanten Wahrscheinlichkeiten unterscheidet.

Um dieses zu zeigen, wollen wir bemerken, dass die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der Resultate bei zwei successiven Versuchen und für zwei beliebige Thalerstücke A_i und $A_{i'}$ durch:

$$a_i a_{i'} + (1 - a_i)(1 - a_{i'})$$

ausgedrückt wird. Da in dem ersten der beiden Fälle, welche wir betrachten wollen, jedes der Münzstücke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mit sich selbst und mit jedem der übrigen verbunden werden kann, so wird die Anzahl dieser gleich möglichen Verbindungen durch das Quadrat von λ ausgedrückt, und wenn man die vollständige Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der Resultate beider Versuche mit s bezeichnet; so ist nach der Regel in §. **10**:

$$s = \frac{1}{\lambda^2}\left[\Sigma a_i \Sigma a_{i'} + \Sigma(1 - a_i)\Sigma'(1 - a_{i'})\right],$$

wo sich die Summen Σ von $i=1$ und $i'=1$ bis $i=\lambda$ und $i'=\lambda$ erstrecken. Wir wollen

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(1+k),\ a_i=\tfrac{1}{2}(1+k+\delta_i),\ a_{i'}=\tfrac{1}{2}(1+k+\delta_{i'})$$

setzen, wo k, δ_i, $\delta_{i'}$, $k+\delta_i$, $k+\delta_{i'}$ positive oder negative Brüche bezeichnen, wovon sich der erste aus dem durch die Beobachtung gegebenen Verhältnisse $\frac{n}{\mu}$ im vorhergehenden §. ergibt und die übrigen sich von einem Münzstücke zum andern ändern, so dass man hat:

$$\Sigma\delta_i=0,\ \Sigma\delta_{i'}=0.$$

Zu gleicher Zeit hat man:

$$1-a_i=\tfrac{1}{2}(1-k-\delta_i),\ 1-a_i=\tfrac{1}{2}(1-k-\delta_{i'}),$$

und die in dem Ausdrucke von s vorkommenden Summen Σ reduciren sich vermöge der vorhergehenden Gleichungen auf:

$$\Sigma a_i=\tfrac{1}{2}\lambda(1+k),\ \Sigma a_{i'}=\tfrac{1}{2}\lambda(1+k),$$
$$\Sigma(1-a_i)=\tfrac{1}{2}\lambda(1-k),$$
$$\Sigma(1-a_{i'})=\tfrac{1}{2}\lambda(1-k).$$

Folglich ist:

$$s=\tfrac{1}{2}(1+k^2)$$

und diese Größe hängt nur von k oder von der mittlern Wahrscheinlichkeit α des Treffens des Bildes und nicht von den Unterschieden der Wahrscheinlichkeiten δ_1, δ_2, δ_3, ... ab.

Wenn man den Wurf der beiden zufällig genommenen Thalerstücke eine sehr große Anzahl a von Malen wiederholt, so ist s auch die mittlere Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der beiden getroffenen Flächen der Münzstücke bei dieser Reihe doppelter Versuche, und wenn b angibt, wie vielmal beide Flächen übereinstimmen, so hat man folglich nach §. 52. annähernd:

$$b=as,$$

was sich durch Versuche bestätigen lässt.

Im zweiten Falle, wo jedes Paar von Versuchen mit demselben Thalerstücke gemacht werden muss, wird die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der Resultate jedes Paares für ein beliebiges Münzstück A_i durch:

$$a_i^2 + (1 - a_i)^2$$

ausgedrückt, und wenn man die vollständige Wahrscheinlichkeit dieser Uebereinstimmung mit s' bezeichnet, so ergibt sich:

$$s' = \frac{1}{\lambda} \Sigma a_i^2 + \frac{1}{\lambda} \Sigma (1 - a_i)^2,$$

und diese Gleichung reducirt sich auf:

$$s' = \tfrac{1}{2}(1 + k^2 + h^2),$$

wenn man den Ausdruck von a_i berücksichtigt und der Kürze wegen:

$$\frac{1}{\lambda} \Sigma \delta_i^2 = h^2$$

setzt. Nun sieht man aber, dass diese Wahrscheinlichkeit s' die Wahrscheinlichkeit s, welche im ersten Falle stattfand, übertrifft, und dass sie von einer neuen Ubekannten h abhängt, welche selbst von den Unterschieden $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ abhängig ist.

Wenn man den zweimaligen Wurf desselben, zufällig gewählten Münzstückes eine sehr große Anzahl a' von Malen wiederholt, so drückt s' die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung beider Würfe in dieser Reihe doppelter Versuche aus, und wenn b' die Zahl ist, welche angibt, wie vielmal diese Uebereinstimmung stattfindet, so ist folglich sehr nahe:

$$b' = a's',$$

welche Gleichung zur Bestimmung des Werthes von h dient, wenn der von k bereits bekannt ist.

§. 58. Ferner wollen wir bemerken, dass, wenn man dasselbe zufällig unter den Thalerstücken $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gewählte Stück dreimal hintereinander in die Luft wirft, sich die Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der drei Resultate vermittelst der vorhergehenden Wahrscheinlichkeit s' ausdrücken lässt, und folglich bekannt ist, ohne dass man nöthig hat, neue Versuche anzustellen. Denn für ein beliebiges Thalerstück A_i ist diese Wahrscheinlichkeit:

$$a_i^3 + (1 - a_i)^3,$$

und wenn man ihren vollständigen Werth mit s'' bezeichnet, so hat man folglich:

$$s'' = \frac{1}{\lambda} \Sigma a_i^3 + \frac{1}{\lambda} \Sigma (1 - a_i)^3$$

und nach den vorhergehenden Bezeichnungen ergibt sich hieraus:

$$s'' = \frac{1}{4}[1 + 3(k^2 + h^2)],$$

oder was dasselbe ist:

$$s'' = \frac{1}{2}(3s' - 1).$$

Diese Größe s'' ist auch die mittlere Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung der in einer sehr langen Reihe dreifacher Versuche erhaltenen Resultate. Wenn man also mit a'' ihre Anzahl und mit b'' die Anzahl der Versuche, worin diese Uebereinstimmung stattfand, bezeichnet, so hat man:

$$b'' = a'' s'',$$

und wenn man $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b''}{a''}$ statt s' und s'' in die vorhergehende Gleichung setzt, so ergibt sich daraus zwischen den Zahlen a', a'', b', b'' die Relation:

$$a' a'' = 3 b' a'' - 2 b'' a',$$

welche desto genauer und um so wahrscheinlicher ist, je größer diese Zahlen sind.

Da sie von dem Gesetze der Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unabhängig ist, so findet sie auch noch statt, wenn diese alle einander gleich sind, d. h. wenn man, statt bei jedem doppelten und dreifachen Versuche ein anderes Münzstück zu nehmen, immer dasselbe anwendet. Wenn man also dasselbe Münzstück eine sehr große Anzahl von Malen, welche wir mit $6c$ bezeichnen wollen, in die Luft wirft, und man theilt diese Reihe einfacher Versuche in doppelte Versuche, welche aus dem ersten und zweiten, dem dritten und vierten, u. s. f. einfachen Versuche bestehen, dann in dreifache Versuche, welche aus dem ersten, zweiten und dritten, dem vierten, fünften und sechsten, u. s. f. einfachen Versuche bestehen, und man wendet die vorhergehende Gleichung auf diese beiden Reihen doppelter und dreifacher Versuche an; so erhält man:

$$a' = 3c, \; a'' = 2c,$$

wodurch sich diese Gleichung auf folgende:

$$c = b' - b''$$

reducirt, d. h. der Unterschied zwischen der Anzahl der übereinstimmenden doppelten Versuche und der der übereinstimmenden dreifachen Ver-

suche ist gleich dem sechsten Theile der Anzahl aller einfachen Versuche.

Aehnliche Relationen würde man zwischen den Anzahlen dieser Uebereinstimmungen und derer, welche aus mehr als zwei oder drei einfachen Versuchen bestehen, erhalten.

§. 59. Diese Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf die Bestimmung des Verhältnisses der männlichen und weiblichen Geburten anwenden. Zu diesem Zwecke braucht man für die Münzstücke A_1, A_2, A_3, ... nur eben so viele verschiedene Ehen zu setzen und für a_i die Wahrscheinlichkeit der Geburt eines Knaben in einer beliebigen mit A_i bezeichneten Ehe zu nehmen.

In Frankreich beträgt die jährliche Anzahl der Geburten beider Geschlechter ungefähr eine Million, und die Erfahrung lehrt, dass bei dieser Gesammtzahl von Geburten das Verhältniss der Anzahl der männlichen zu der der weiblichen die Einheit ungefähr um $\frac{1}{15}$ übersteigt. Während der **10** Jahre von **1817** bis **1826** betrug der mittlere Werth dieses Verhältnisses **1,0656** und die Grenzwerthe desselben sind kaum um ein halbes Hundertel größer oder kleiner gewesen. Auf die Beobachtungen während dieses Zeitabschnittes gründen sich die in unserer Abhandlung »über das Verhältniss der männlichen und weiblichen Geburten« angegebenen Resultate.*) Von **1817** bis **1833** incl. war der mittlere Werth dieses Verhältnisses $=$ **1,0619**, welcher auch nicht mehr als ein halbes Hundertel von seinem Werthe während der **10** ersten dieser **17** Jahre verschieden ist.

Die Ursache der größern Anzahl männlicher Geburten ist uns unbekannt; es sind Gründe vorhanden, wornach man annehmen muss, dass sie von einer Ehe zur andern sehr veränderlich ist, und dass die Wahrscheinlichkeiten a_1, a_2, a_3, ... sehr ungleich sind, so dass viele derselben ohne Zweifel unter $\frac{1}{2}$ herabsinken; aber dessenungeachtet hat sich das Verhältniss der jährlichen männlichen und weiblichen Geburten während eines Zeitraumes von **17** Jahren, wie man sieht, nur wenig geändert, welches eine sehr merkwürdige Bestätigung des Gesetzes der großen Zahlen darbietet.

Wenn man $\frac{16}{31}$ für das Verhältniss einer großen Anzahl männlicher Geburten zu der entsprechenden Anzahl der Geburten beider Geschlechter nimmt, so drückt dieses Verhältniss auch die mittlere Wahrscheinlichkeit der Geburt eines Knabens aus, und für den Werth der Größe k in §. **57.** erhält man $\frac{1}{31}$. Es ist unbekannt, ob die Wahrscheinlichkeit einer männlichen Geburt für jedes aus derselben Ehe her-

*) Mémoires de l'Académie des Sciences, tome IX.

vorgehende Kind dieselbe bleibt, oder sich verändert, wie sie sich z. B. von einer Ehe zur andern ändert. Im zweiten Falle ist die mittlere Wahrscheinlichkeit der Uebereinstimmung des Geschlechtes der beiden ersten Geburten $= \frac{1}{2}(1+k^2)$ und übersteigt den Werth $\frac{1}{2}$ kaum um ein halbes Tausendtel. Folglich ist die Anzahl der Fälle, wo diese Uebereinstimmung in einer sehr großen Anzahl von Paaren von Erstgeburten stattfindet, um ein halbes Tausendtel größer, als die Hälfte dieser letzten Anzahl. Im ersten Falle kann die erste dieser beiden Zahlen wegen der alsdann in dem Ausdrucke $\frac{1}{2}(1+k^2+h^2)$ der mittleren Wahrscheinlichkeit der Geschlechtsübereinstimmung vorkommenden unbekannten Größe h weit größer sein, als die Hälfte der zweiten Zahl. Die Relation im vorhergehenden §. findet immer zwischen den Anzahlen der Geschlechtsübereinstimmungen der zwei und drei Erstgeburten bei einer sehr großen Anzahl von Ehen statt.

§. 60. Wenn A irgend eine Größe ist, welche bei jedem Versuche verschiedene Werthe haben kann, so ist die Summe dieser Werthe, welche man in einer langen Reihe von Versuchen beobachtet, vermöge der zweiten Gleichung in §. 54. sehr nahe und höchst wahrscheinlich ihrer Anzahl proportional. Das Verhältniß dieser Summe zu dieser Anzahl convergirt für eine bestimmte Größe A ohne Ende gegen einen speciellen, von dem Wahrscheinlichkeitsgesetze der verschiedenen möglichen Werthe von A abhängigen Werth, je mehr diese Anzahl noch zunimmt, und welchen es erreichen würde, wenn diese Anzahl unendlich groß werden könnte. Ueber dieses Verhältniß lassen sich ähnliche Bemerkungen machen, wie die bei der Betrachtung der ersten Gleichung in §. 54. gemachten.

Von der zweiten Gleichung, oder vielmehr von folgender:

$$\frac{s}{\mu} = \int_{l}^{l'} Zz\,dz$$

lassen sich, wie von der ersten, viele und nützliche Anwendungen machen.

Wir wollen z. B. annehmen, α wäre ein Winkel, welchen man messen wollte. Dieser Winkel existirt, er hat eine einzige und bestimmte Größe; aber der Winkel, welchen man bei jeder Operation misst, kann wegen der unvermeidlichen und veränderlichen Beobachtungsfehler unendlich viele verschiedene Werthe haben. Wir wollen diesen Winkel, welcher successive eine sehr große Anzahl von Malen gemessen ist, für die Größe A nehmen, so dass Zdz die von der Construction des Instrumentes und der Geschicklichkeit des Beobachters abhängige Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Werthes z von A ist. Es sei k die Abscisse des Schwerpunktes der von einer ebenen Curve, deren Abscisse

und Ordinate z und Z ist, eingeschlossenen Fläche, welche sich von $z=l$ bis $z=l'$ erstreckt, indem l und l', wie in §. 53., die Grenzen der möglichen Werthe von A bezeichnen. Wir wollen

$$z=k+x,\ l=k+h,\ l'=k+h'$$

setzen und durch X den Werth von Z bezeichnen, wenn man in Z $k+x$ statt z setzt; so haben wir vermöge der angeführten Gleichung:

$$\int_l^{l'} Z\,dz=\int_h^{h'} X\,dx=1,\ \int_h^{h'} Xx\,dx=0,$$

und folglich sehr nahe:

$$\frac{s}{\mu}=k,$$

wo s die Summe der Werthe von A ist, welche man in einer großen Anzahl μ von Versuchen erhält. Gegen die Constante k convergirt also der mittlere Werth $\frac{s}{\mu}$ von A um so mehr, je mehr μ noch zunimmt. Aber selbst dann, wenn dieses Verhältniss fast constant geworden ist, d. h. wenn es für mehrere sehr lange Beobachtungsreihen fast dasselbe bleibt, kann es zuweilen geschehen, dass dieser mittlere Werth sehr von dem Winkel α, welchen man bestimmen will, verschieden ist, und es ist immer der Näherungswerth der Constante γ, welche von diesem Winkel verschieden sein kann.

Denn es sei:

$$z=\alpha+u,\ l=\alpha+g,\ l'=\alpha+g'$$

und U der Werth von Z, wenn man darin $\alpha+u$ statt z setzt; so ist:

$$\int_l^{l'} Z\,dz=\int_g^{g'} U\,du=1,\ k=\alpha+\int_g^{g'} Uu\,du.$$

Der Unterschied u zwischen dem Winkel α und einem möglichen Werthe z des gemessenen Winkels A ist einer der möglichen Fehler des Instrumentes und des Beobachters; er kann positiv oder negativ sein und sich von $u=g$ bis $u=g'$ erstrecken, und seine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit ist gleich $U\,du$. Wenn nun in der Construction des Instrumentes kein Grund liegt, wodurch die positiven Fehler größere Wahrscheinlichkeiten bekommen, als die negativen, oder umgekehrt, und wenn dasselbe in Beziehung auf die Beobachtungsart des Beobachters der Fall ist; so sind die Grenzen g und g' gleich und von entgegen=

gesetztem Zeichen, die Function U ist für gleiche und entgegengesetzte Werthe der Veränderlichen u dieselbe und es ergibt sich:

$$\int_{g}^{g'} U u du = 0, \; k = \alpha.$$

In diesem Falle, welcher gewöhnlich stattfindet, ist folglich das Verhältniss $\frac{s}{\mu}$ der Näherungswerth von α. Aber wenn wegen der Construction des Instrumentes, oder der Beobachtungsart des Beobachters die Wahrscheinlichkeiten der positiven Fehler oder die der negativen ein gewisses Uebergewicht bekommen, so ist das vorhergehende Integral nicht mehr $= 0$, die Constanten α und k sind von einander verschieden und das Verhältniss $\frac{s}{\mu}$ entfernt sich im Allgemeinen merklich von dem wahren Werthe von α. Von dem Stattfinden dieses Umstandes kann man sich nur dadurch überzeugen, dass derselbe Winkel mit andern Instrumenten oder von andern Beobachtern gemessen wird. Wir beschränken uns hier auf die bloße Anführung dieser Anwendnng der Wahrscheinlichkeitsrechnung und verweisen hinsichtlich der Beobachtungsfehler und der Rechnungsmethoden, wodurch man ihren Einfluss vermindern und schätzen kann, auf die Théorie analytique des probabilités und auf unsere Abhandlungen über diesen Gegenstand in der Connaissance des tems von den Jahren 1827 und 1832.*)

§. 61. Als zweites Anwendungsbeispiel der im Anfange des vorhergehenden §. angeführten Gleichung wollen wir annehmen, dass die mit $C_1, C_2, C_3, \ldots$ bezeichneten Ursachen alle die Ursachen sind, welche die Wahrscheinlichkeiten der Dauer des menschlichen Lebens in einem bestimmten Lande und zu einer bestimmten Zeit bestimmen. Diese Ursachen sind unter andern die verschiedenen physischen Constitutionen der neu geborenen Kinder, die Vermögensumstände der Einwohner, die Krankheiten, welche diese Lebensdauer verkürzen und ohne Zweifel auch einige Ursachen, welche aus dem Leben selbst entspringen und verhindern, dass es über gewisse Grenzen, welche seine Dauer niemals überschritten hat, hinausdauert. Denn es sind Gründe zu der Annahme vorhanden, dass, wenn die Krankheiten die alleinigen Ursachen des Todes und so zu sagen nur zufällig wären, einige unter der enormen Anzahl von Menschen, welche gelebt haben, diesen Gefahren während mehr, als zwei Jahrhunderten würden entgangen sein, was man aber niemals beobachtet hat. Die Größe A ist alsdann die Zeit, welche

*) Vergl. Anhang III.

ein ebengeborenes Kind leben wird, z drückt einen möglichen Werth von A aus und Zdz die Wahrscheinlichkeit von z, welche aus allen Ursachen entspringt, wodurch sie nicht für ein einzelnes besonderes Kind, sondern für die ganze Menschheit an dem betrachteten Orte und zu der betrachteten Zeit bestimmt wird. Wir wollen uns also ein ebengeborenes Kind von einer gewissen physischen Constitution denken, für welches die Wahrscheinlichkeit, genau eine Zeit $= z$ zu leben, $= Z' dz$ ist, ein zweites Kind, für welches die Wahrscheinlichkeit, daß es vermöge seiner physischen Constitution dasselbe Alter erreicht, $= Z'' dz$ ist, u. s. f., und außerdem seien ζ', ζ'', ... die Wahrscheinlichkeiten dieser verschiedenen Constitutionen; so ist die Function Z wegen dieser Ursachen die Summe $\zeta' Z' + \zeta'' Z'' + \ldots$ auf alle möglichen Constitutionen erstreckt, und wenn ihre Anzahl unendlich groß ist; so verwandelt sich Z in ein bestimmtes Integral, welches einen unbekannten, aber bestimmten Werth hat. In dem Lande, wo die Menschen am stärksten geboren werden, oder die beste Constitution haben, hat dieses Integral ohne Zweifel den größten Werth; er kann in jedem Lande für beide Geschlechter nicht derselbe sein, und ohne Zweifel sind auch die Werthe von Z', Z'', Z''', ... überdies von den möglichen Krankheiten und dem Wohlstande der Einwohner abhängig. Die Function Z, und folglich auch das Integral von $Zzdz$ ist für zwei von einander entfernte Zeitpunkte verschieden, wenn innerhalb des zwischen ihnen liegenden Zeitraumes irgend eine Krankheit verschwunden ist, oder sich der Wohlstand des Volkes durch den Fortschritt der Cultur vergrößert hat. Man kann, wenn man will, 0 und ∞ für die Grenzen l und l' dieses Integrales nehmen, indem man Z als eine Function betrachtet, welche verschwindet, wenn z einen gewissen Werth, welcher sowohl als die Function Z unbekannt ist, überschreitet. Alsdann sind die beobachteten Werthe von A die Alter, in welchen eine sehr große Anzahl μ in demselben Lande und zu derselben Zeit geborener Individuen gestorben sind, und wenn man die Summe dieser Alter mit s bezeichnet, so hat man sehr nahe und höchst wahrscheinlich:

$$\frac{s}{\mu} = \int_0^\infty Zz\,dz,$$

und folglich bleibt dieses Verhältniß $\frac{s}{\mu}$ oder die sogenannte mittlere Lebensdauer für jedes Land constant, so lange keine der bekannten oder unbekannten Ursachen C_1, C_2, C_3, ... eine merkliche Veränderung erfährt.

Für Frankreich nimmt man für die mittlere Lebensdauer 29 Jahr

an; allein diese Bestimmung gründet sich auf Beobachtungen, welche vor der Einimpfung der Blattern angestellt und sehr alt sind; sie muss gegenwärtig merklich länger sein, und es wäre zu wünschen, dass man sie für das männliche und weibliche Geschlecht, für verschiedene Zustände und verschiedene Theile des Königreiches von neuem besonders bestimmte. Man betrachtet auch die mittlere Lebensdauer von einem gegebenen Alter an gerechnet, und s ist alsdann die Anzahl der Jahre, um welche eine sehr große Anzahl μ von Individuen dieses Alter überlebt haben. Das Verhältniss $\frac{s}{\mu}$ ist alsdann die mittlere Lebensdauer für dieses Alter, womit sie sich ändert, und für dasselbe Alter constant bleibt. Man nimmt an, dass sie zwischen den Altern von 4 und 5 Jahren ihr Maximum erreicht und alsdann auf 43 Jahr steigt. Die Sterblichkeitstafeln haben einen andern Zweck und geben von einer sehr großen Anzahl μ in demselben Lande und zu derselben Zeit geborener Individuen die Anzahlen derer an, welche nach Verlauf von 1, 2, 3, ... Jahren noch leben. Wenn man mit m die Anzahl der Lebenden von einem gegebenen Alter bezeichnet, so ist das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ vermöge der ersten Gleichung in §. 54. fast unveränderlich, wenigstens wenn dieses Alter kein sehr hohes und m keine sehr kleine Zahl ist. Gegen das Alter von 100 Jahren z. B. besteht diese Unveränderlichkeit darin, dass das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ immer ein sehr kleiner Bruch ist.

Wenn man in dem Integrale:

$$\int_0^\infty Zz\,dz$$

die Veränderliche z, statt nach unendlich kleinen Intervallen, nach sehr kleinen Intervallen wachsen lässt, und nimmt jedes derselben, um die Begriffe zu fixiren, zur Zeiteinheit, bezeichnet mit h_1, h_2, h_3, ... die Werthe von z und durch H_1, H_2, H_3, ... die correspondirenden Werthe von Z; so ist die Summe der Producte $A_1 a_1$, $A_2 a_2$, $A_3 a_3$, ... bekanntlich der Näherungswerth dieses Integrales. Bezeichnet man die mittlere Lebensdauer, von der Geburt angerechnet, mit v, so hat man folglich auch:

$$v = H_1 h_1 + H_2 h_2 + H_3 h_3 + \dots$$

Da nun H_n hier die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, in einem Alter h_n zu sterben, so folgt, dass man hinsichtlich der Dauer des menschlichen Lebens die mittlere Lebensdauer v als die mathematische Hoffnung

(§. 23.) eines eben geborenen Kindes, dessen physische Constitution uns unbekannt ist, betrachten kann; aber nach den Sterblichkeitstafeln sterben von einer sehr großen Anzahl von Kindern mehr, als die Hälfte, ehe sie dieses Alter v erreicht haben.

§. 62. Als ein letztes Beispiel wollen wir annehmen, daſſ man für einen gegebenen Ort und für einen ebenfalls gegebenen Tag des Jahres den Unterschied zwischen der größten und kleinsten Höhe der Gewässer des Meeres, welche vermöge der gleichzeitigen Wirkungen der Sonne und des Mondes stattfinden würde, berechnet habe, und für die Größe A wollen wir die Differenz zwischen diesem berechneten Ueberschusse und dem an demselben Orte und zu derselben Zeit jedes Jahres beobachteten nehmen. Die Werthe von A ändern sich von einem Jahre zum andern wegen der Winde, welche an diesem Orte und zu dieser Zeit wehen können, und die Wahrscheinlichkeiten dieser verschiedenen Werthe bestimmen. Wenn man nun alle möglichen Richtungen und Intensitäten dieser Winde in Betracht zieht, so wie ihre resp. Wahrscheinlichkeiten und die diesen Ursachen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten eines beliebigen Werthes z von A; so hat das Integral $\int_l^{l'} Z z\,dz$ einen unbekannten, aber bestimmten Werth, welcher constant bleibt, so lange das Wahrscheinlichkeitsgesetz jedes möglichen Windes sich nicht ändert. Das Verhältniſſ $\frac{s}{\mu}$ ist folglich auch fast unveränderlich, wenn s die Summe der während einer langen Reihe von Jahren beobachteten Werthe von A ist.

A priori wissen wir nicht, ob das Verhältniſſ $\frac{s}{\mu}$ Null oder ein Bruch ist, welchen man unberücksichtigt lassen kann, d. h. ob der Einfluſſ der Winde auf die allgemeinen Gesetze der Ebbe und Fluth unmerklich ist. Nur die Erfahrung kann uns den Werth dieses Verhältnisses kennen lehren und zeigen, ob es sich für die verschiedenen Zeitpunkte des Jahres und für die verschiedenen Beobachtungsörter an den Küsten, in den Häfen und auf offenem Meere ändert. Um den Einfluſſ dieses oder jenes Windes besonders kennen zu lernen, müſſte man nur die unter diesem Einflusse beobachteten Werthe von A anwenden, und um nicht eine sehr große Anzahl von Jahren Beobachtungen anstellen zu müssen, so könnten diese Werthe mehrern auf einander folgenden Tagen entsprechen, während welcher sich die Richtung des Windes wenig geändert hat. Es beschäftigen sich gegenwärtig mehrere Gelehrte mit dieser Untersuchung, wozu eine weitläufige Arbeit erfordert wird, und es kann nicht fehlen, daſſ sie zu interessanten Resultaten führen wird.

§. 63. Da wir die Auseinandersetzung der Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der allgemeinen Folgerungen daraus in diesem und dem vorhergehenden Kapitel nun vollständig mitgetheilt haben, so kommen wir wieder auf den Begriff der Ursache und Wirkung, welcher in §. 27. blos kurz angedeutet ist, zurück.

Die Ursache C einer Erscheinung oder eines Ereignisses E ist, wie in dem angeführten §. bemerkt worden, dasjenige, welches die Fähigkeit oder das Vermögen besitzt, die Erscheinung oder das Ereigniss E nothwendig hervorzubringen, von welcher Beschaffenheit übrigens die Natur dieser Kraft und die Art ihrer Wirkung auch sein mag. So ist z. B. die Anziehung der Erde ein gewisses Etwas, welches die Fähigkeit oder Kraft besitzt, zu bewirken, dass alle Körper, welche nicht unterstützt sind, auf die Oberfläche der Erde fallen, und eben so liegt in unserm Willen eine Kraft, welche vermittelst der Muskeln und Nerven einen Theil der Bewegungen hervorbringen kann, die man deswegen freiwillige oder willkürliche Bewegungen nennt. Zuweilen hat das Ereigniss oder die Erscheinung E in der Natur nur eine einzige Ursache C, wodurch es hervorgebracht wird, so dass die Beobachtung von E immer das Stattfinden von C voraussetzt, und in andern Fällen kann diese Erscheinung mehrern verschiedenen Ursachen zugeschrieben werden, welche entweder vereint wirken, oder sich gegenseitig ausschließen, so dass eine derselben das Ereigniss oder die Erscheinung E hat hervorbringen müssen.

Dieses sind hinsichtlich des Prinzipes der Causalität die einfachsten Vorstellungen, und wovon wir glauben, dass sie allgemein angenommen werden. Jedoch hat der berühmte englische Historiker über diesen Punkt der Metaphysik eine andere Meinung ausgesprochen, welche näher untersucht zu werden verdient und durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung in das hellste Licht gesetzt werden kann.

Nach Hume sollen wir nämlich von der Causalität keine andere Vorstellung als die des Zusammentreffens oder unmittelbaren Aufeinanderfolgens der Ursache und Wirkung, aber nicht eines nothwendigen Zusammenhanges zwischen beiden haben, und dieses Zusammentreffen oder Aufeinanderfolgen soll für uns nur eine starke Präsumtion sein, welche daraus entspringt, dass wir dieses Zusammentreffen oder Aufeinanderfolgen sehr viele Male beobachtet haben, und wenn wir es nur eine geringe Anzahl von Malen beobachtet hätten; so nähmen wir an, dass es in Zukunft nicht mehr stattfinden würde. Andere haben dieselbe Meinung getheilt und sie auf die Regeln der Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse nach der Beobachtung

vergangener Ereignisse gestützt. Allein Hume geht weiter und nimmt, ohne von diesen Wahrscheinlichkeitsgesetzen zu reden, an, dass die Gewohnheit, die Wirkung auf die Ursache folgen zu sehen, in unserm Geiste eine Art von Ideenassociation hervorbringt, welche bewirkt, dass wir glauben, dass die Wirkung sogleich stattfinden wird, wenn die Ursache da ist, was in der That für die meisten Menschen, welche das Prinzip ihres Glaubens und seinen Grad der Wahrscheinlichkeit nicht untersuchen, der Fall ist. Für solche Personen muss diese Ideenassociation mit der verglichen werden, welche in unserm Geiste zwischen dem Namen eines Dinges und dem Dinge selbst stattfindet und so beschaffen ist, dass uns der Name unabhängig von unserer Ueberlegung und unserm Willen an das Ding erinnert.

Eines der Beispiele, welches Hume zur Erklärung seiner Meinung anführt, ist der Stoß eines in Bewegung befindlichen Körpers gegen einen freien ruhenden Körper und die Bewegung des letztern nach seinem Zusammentreffen mit dem erstern. Dieses Zugleichstattfinden des Stoßens und der Bewegung des gestoßenen Körpers ist in der That ein Ereigniss, welches wir eine große Anzahl von Malen beobachtet haben, ohne dass sich das entgegengesetzte Ereigniss jemals gezeigt hätte, welches, abgesehen von jeder andern Betrachtung, schon hinreicht, mit vielem Grunde oder mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit annehmen zu können, dass das in Rede stehende Zugleichstattfinden der beiden erwähnten Erscheinungen auch in Zukunft der Fall sein wird. Dasselbe gilt von allen Zusammenstattfinden der Ursachen und Wirkungen, welche wir täglich und ohne Ausnahme beobachten; ihre Wahrscheinlichkeit wird so zu sagen durch diese fortwährende Erfahrung erhalten und der Verstand oder die Rechnung gibt uns in Uebereinstimmung mit der Erfahrung eine große Sicherheit, dass die Wirkungen immer auf ihre Ursachen folgen. Aber bei einem Ereignisse, welches wir nur eine sehr geringe Anzahl von Malen auf die Ursache, der wir es zuschreiben, haben folgen sehen, würde nach den frühern Regeln für das künftige Zusammentreffen oder Aufeinanderfolgen dieser Ursache und Wirkung eben keine sehr große Wahrscheinlichkeit vorhanden sein. Aber dessenungeachtet geschieht es oft, dass wir die Wiederholung dieses Ereignisses nicht bezweifeln, wenn die Ursache desselben von neuem stattfindet.

Diese Zuverlässigkeit setzt aber eben voraus, dass unser Geist der Ursache irgend eine Kraft oder Fähigkeit zuschreibt, ihre Wirkung hervorzubringen, und dass er zwischen beiden einen nothwendigen Zusammenhang annimmt, welcher von der größern oder geringern An=

zahl ihres beobachteten Zusammentreffens oder Aufeinanderfolgens unabhängig ist.

Als z. B. Oersted die Entdeckung machte, dass, wenn man die beiden Pole einer Voltaschen Säule mittelst eines Metalldrahtes in Verbindung setzt, eine in der Nähe des Voltaschen Schließungskreises frei aufgehangene Magnetnadel aus ihrer natürlichen Richtung abgelenkt wurde, war dieser berühmte Physiker ohne Zweifel schon, nachdem er diesen Versuch auch nur eine kleine Anzahl von Malen angestellt hatte, überzeugt, dass diese Erscheinung auch in Zukunft immer stattfinden werde. Wenn aber unser Grund zu der Annahme dieser Wiederholung der Erscheinung einzig und allein auf dem Zusammentreffen eines Voltaschen Schließungskreises und der z. B. zehnmal beobachteten Ablenkung der Magnetnadel beruhte, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass die Erscheinung auch bei einem neuen Versuche stattfinden wird, nur $=\frac{11}{12}$ (§. 46.). In einer neuen Reihe von 10 Versuchen könnte man 11 gegen 10 oder ungefähr 1 gegen 1 wetten, dass dasselbe Ereigniss ununterbrochen stattfinden wird und in einer längern Reihe künstiger Versuche würde es vernünftiger sein, anzunehmen, dass die Erscheinung nicht bei allen Versuchen stattfinden wird.

Als ein anderes Beispiel wollen wir noch die glückliche Anwendung anführen, welche Biot neuerlich von der progressiven Polarisation des Lichtes in einem bestimmten Sinne, deren Existenz er seit langer Zeit für die homogenen und nicht krystallisirten Mittel dargethan hatte, gemacht hat. Wenn man bei einer geringen Anzahl sorgfältig angestellter Beobachtungen gefunden hat, dass eine gegebene Substanz den polarisirten Lichtstrahl gegen die Rechte des Beobachters abgelenkt hat, und die beobachteten Ablenkungen hinreichend groß gewesen sind, damit über den Sinn, in welchem sie stattgefunden haben, kein Zweifel übrig bleibt; so ist dieses für uns schon hinreichend, um, wie bei einer Sache, die Niemand bezweifelt, überzeugt zu sein, dass dieselbe Substanz zukünftig das Licht immer wieder gegen die Rechte ablenken wird, und dessenungeachtet würde sich aus dem Zusammentreffen dieser Substanz und einer Ablenkung des Lichtes gegen die Rechte, wenn sie nicht eine sehr große Anzahl von Malen beobachtet ist, nur eine geringe Wahrscheinlichkeit, welche sogar kleiner ist, als $\frac{1}{2}$, dafür ergeben, dass in einer gleich großen oder etwas größern Anzahl neuer Versuche keine Ablenkung des Lichtes gegen die Linke stattfinden wird.

Diese und andere Beispiele, welche sich leicht anführen lassen, zeigen, wie uns es scheint, dass das Zutrauen unseres Geistes auf das Folgen der Wirkungen auf ihre Ursachen nicht allein in der mehr-

oder weniger Male wiederholten Beobachtung dieser Aufeinanderfolge seinen Grund haben kann. Wir werden in der That sogleich sehen, daſſ, unabhängig von jeder Gewohnheit unseres Geistes, die bloße Möglichkeit, daſſ die Ursache zur nothwendigen Hervorbringung ihrer Wirkung geeignet ist, den Grund zur Annahme dieser Wiederkehr bedeutend vermehrt, und ihre Wahrscheinlichkeit der Gewiſſheit sehr nähern kann, obgleich der frühern Beobachtungen nur sehr wenige sind.

§. 64. Ehe ein Ereigniſſ P beobachtet ist, und man weiß, ob es in einer ganzen Reihe anzustellender Versuche stattfinden wird, oder nicht, nehmen wir also an, daſſ die Existenz einer Ursache C, welche es nothwendig hervorbringen kann, nicht unmöglich ist. Auch nehmen wir an, daſſ vor diesen Versuchen die Existenz einer solchen Ursache eine gewiſſe Wahrscheinlichkeit hatte, welche aus gewiſſen besondern Betrachtungen entspringt, wodurch sie mehr oder weniger wahrscheinlich gemacht wurde, und wir wollen diese Wahrscheinlichkeit mit p bezeichnen. Ferner wollen wir annehmen, daſſ die Erscheinung oder das Ereigniſſ P bei allen diesen Versuchen, deren Anzahl wir mit n bezeichnen wollen, beobachtet sei, aber nach dieser Beobachtung hat sich die Wahrscheinlichkeit der Existenz der Ursache C geändert, und es kommt darauf an, diese Wahrscheinlichkeit, welche wir mit ϖ bezeichnen wollen, zu bestimmen.

Welche Sorgfalt man auch angewandt haben mag, den Einfluſſ anderer Ursachen, als C, welche das Ereigniſſ P bei jedem Versuche hervorbringen können, wenn die Ursache C nicht existirte, zu vermindern; so kann man doch annehmen, daſſ dieser Einfluſſ nicht ganz auf Null reducirt ist. Wir wollen also annehmen, daſſ es gewiſſe bekannte oder unbekannte Ursachen $B_1, B_2, \ldots B_n$ gebe, welche in Verbindung mit dem Zufalle (§. 27.) und wenn die Ursache C nicht existirt, diese Erscheinung haben hervorbringen können, nämlich die Ursache B_1 in dem ersten Versuche, die B_2 in dem zweiten, ... und die Ursache B_n in dem letzten. Es sei im Allgemeinen r_i die Wahrscheinlichkeit der Existenz der Ursache B_i, multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit des Stattfindens von P, wenn diese Ursache gewiſſ wäre, und wir wollen der Kürze wegen

$$r_1 . r_2 . r_3 \ldots r_n = \varrho$$

setzen; so drückte dieses Product die Wahrscheinlichkeit des Stattfindens dieses Ereigniſſes in allen n Versuchen aus, welche sich aus allen Ursachen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ergibt, wenn die Ursache C nicht existirte, und da $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit der Nichtexistenz der Ursache C

ist, so folgt, daß die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses, welches hier das beständige Stattfinden von P ist, in der Voraussetzung, daß die Ursache C nicht existirt, durch $(1-p)\varrho$ ausgedrückt wird. In der entgegengesetzten Voraussetzung ist diese Wahrscheinlichkeit $=p$, d. h. sie ist nichts anders, als die Wahrscheinlichkeit der Existenz der Ursache C vor der Beobachtung, weil diese Ursache das Ereigniß P bei allen Versuchen nothwendig hervorbringen würde. Folglich wird die Wahrscheinlichkeit dieser zweiten Hypothese nach der Beobachtung oder das Stattfinden der Ursache C durch:

$$\varpi = \frac{p}{p+(1-p)\varrho}$$

und die ihres Nichtstattfindens durch:

$$1-\varpi = \frac{(1-p)\varrho}{p+(1-p)\varrho}$$

ausgedrückt.

Zu diesem Resultate gelangt man auch, wenn man die n Versuche successive in Betracht zieht, statt, wie wir es eben gethan haben, sie alle zugleich in Betracht zu ziehen. Denn da die Wahrscheinlichkeit der Existenz der Ursache C nach der Voraussetzung vor dem ersten Versuche durch p ausgedrückt wird, so wollen wir sie nach dem ersten und vor dem zweiten Versuche mit p', nach dem zweiten und vor dem dritten Versuche mit p'', u. s. f. bezeichnen, und alsdann haben wir:

$$p' = \frac{p}{p+(1-p)r_1}, \quad 1-p' = \frac{(1-p)r_1}{p+(1-p)r_1},$$

$$p'' = \frac{p'}{p'+(1-p')r_2}, \quad 1-p'' = \frac{(1-p')r_2}{p'+(1-p')r_2},$$

etc.

Eliminirt man zuvörderst p' und $1-p'$ aus den Werthen von p'' und $1-p''$, dann p'' und $1-p''$ aus den Werthen von p''' und $1-p'''$, u. s. f., so erhält man die vorhergehenden Ausdrücke von ϖ und $1-\varpi$ für die Wahrscheinlichkeiten der Existenz und der Nichtexistenz der Ursache C nach dem $n$ten Versuche.

Nun sei ϖ' die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß P in einer neuen Reihe von n' Versuchen ununterbrochen stattfinden wird. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieses vermöge der Ursache C, wenn sie gewiß wäre, geschieht, ist die aus den n ersten Versuchen abgeleitete Wahr=

scheinlichkeit ϖ der Existenz der Ursache C, was die Zahl n' auch sein mag. Wenn diese Ursache nicht existirt, so kann das Stattfinden von P auch von andern Ursachen $B'_1, B'_2, B'_3, \ldots B'_{n'}$ herrühren, welche den vorhin mit $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ bezeichneten ähnlich sind und deren Einfluss man nicht ganz beseitigen kann. In Beziehung auf diese künftigen Ursachen wollen wir die frühern Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ mit $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots r'_{n'}$ bezeichnen, so dass r'_i in Beziehung auf B'_i das ist, was r_i in Beziehung auf B_i war. Ferner wollen wir

$$r'_1 . r'_2 . r'_3 \ldots r'_{n'} = \varrho'$$

setzen, so wird die Wahrscheinlichkeit des Stattfindens von P bei den n' künftigen Versuchen durch $(1-\varpi)\varrho'$ ausgedrückt, wenn die Ursache C nicht existirt, und hieraus ergibt sich folglich:

$$\varpi' = \varpi + (1-\varpi)\varrho'$$

als der vollständige Ausdruck von ϖ', oder wenn man für die Größen ϖ und $1-\varpi$ ihre frühern Werthe setzt:

$$\varpi' = \frac{p+(1-p)\varrho\varrho'}{p+(1-p)\varrho}.$$

Diese Ausdrücke von ϖ und ϖ' zeigen nun, wie die Wahrscheinlichkeit der Existenz der Ursache C, welche vor der Beobachtung von P sehr gering sein konnte, nachdem diese Erscheinung eine geringe Anzahl von Malen beobachtet ist, sehr groß hat werden und dem beständigen Stattfinden dieser Erscheinuug bei den künftigen Versuchen eine der Gewissheit sich sehr nähernde Wahrscheinlichkeit ertheilen können. Wir wollen z. B. annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit der Ursache C aus irgend welchen Gründen, und wenn man will, wegen eines Vorurtheiles unseres Geistes, a priori nur $=\frac{1}{100000}$ gewesen ist und dass der Einfluss der zufälligen Ursachen, ungeachtet der zu seiner Beseitigung angewandten Vorsichtsmaßregeln, noch hat so beschaffen sein können, dass jede der Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ dem Bruche $\frac{1}{10}$ oder einem kleinern Bruche gleich ist; so hat man, wenn das Ereigniss P nur 10 mal ununterbrochen beobachtet ist:

$$p = 0{,}00001\,,\ \varrho < p\,(0{,}00001)$$

und zu gleicher Zeit:

$$\varpi > \frac{1}{1+(1-p)(0{,}00001)}.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit der Existenz der Ursche C nach der Beobachtung um weniger als $\frac{1}{1000000}$ von der Gewissheit verschieden und die Nichtexistenz dieser Ursache wäre weniger wahrscheinlich geworden, als ihre Existenz vor der Beobachtung. Die Wahrscheinlichkeit ϖ', dass P in einer Reihe von n' künftiger Versuche beständig stattfinden wird, wäre also auch größer, als die der Existenz von C, oder könnte nicht kleiner sein, welchen Werth n' auch haben mag.

§. 65. Bei dieser Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Ursache C auf eine abstracte Weise, d. h. unabhängig von jeder Theorie, wodurch die Erscheinung P auf allgemeinere Gesetze zurückgeführt und nach der Ursache, welcher man sie zuschreibt, genau erklärt und folglich auch die Wahrscheinlichkeit der Existenz dieser Ursache vergrößert würde, betrachtet. Wir betrachten diese Erscheinung P als ununterbrochen stattfindend und es war der Zweck der vorhergehenden Rechnung, zu zeigen, dass unsere Annahme seiner künftigen Wiederholung, wenn es nur eine kleine Anzahl von Malen beobachtet ist, nur auf der Vorstellung beruhen kann, welche wir von einer Ursache haben, die eine Erscheinung dieser Art nothwendig hervorzubringen im Stande ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann übrigens weder lehren, welches diese wirksame Ursache ist, noch bestimmen, welche unter den verschiedenen Ursachen, die das Ereigniss nothwendig hervorbringen können, wenn es deren mehrere gibt, welchen man es zuschreiben könnte, die wahrscheinlichste ist.

Wenn das Ereigniss P in einem oder mehrern Versuchen nicht stattfindet und man dennoch gewiss ist, dass die Ursache C, welche es nothwendig hervorzubringen vermag, wenn sie gewiss wäre, in allen diesen Versuchen hätte wirken müssen; so ist klar, dass weder diese, noch irgend eine Ursache derselben Art existirt. Aber außer den Ursachen dieser Art gibt es noch andere, welche bei allen Versuchen wirken und dem Stattfinden eines Ereignisses P nur eine gewisse Wahrscheinlichkeit ertheilen können, indem sie sich mit dem Zufalle, oder mit veränderlichen Ursachen, welche bald wirken und bald nicht, verbinden (§. 27). Diese veränderlichen und unregelmäßigen Ursachen, welche man durchaus nicht mit dem Zufalle verwechseln muss, können auf die mittlere Wahrscheinlichkeit des Stattfindens des Ereignisses P in einer langen Versuchsreihe und folglich auf den Quotienten aus der Zahl, welche angibt, wie vielmal das Ereigniss P stattgefunden hat oder stattfinden wird, und der Gesammtanzahl der Versuche, Einfluss haben. Aber wenn man dafür Sorge getragen hat, den Einfluss dieser zufälligen Ursachen so viel als möglich zu vermindern, so dass man denselben fast als Null betrachten kann, und wenn das Ereigniss P

in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen m mal beobachtet ist; so ist eine sehr große Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass eine dem Stattfinden dieses Ereignisses günstige oder entgegengesetzte permanente Ursache existirt, jenachdem m merklich größer oder kleiner als die Hälfte von μ ist.

Betrachtet man z. B. den Fall, wo ein Körper mit zwei Flächen eine sehr große Anzahl von Malen in die Luft geworfen wird, so kann das Vorhandensein einer dem Treffen einer bestimmten Fläche günstigen oder ungünstigen Ursache als höchst wahrscheinlich betrachtet werden, wenn die beiden Zahlen, welche angeben, wie vielmal jede der beiden Flächen getroffen ist, wie in dem weiter oben (§. **50.**) angeführten Büffonschen Versuche, merklich von einander verschieden sind. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann uns nur die Nothwendigkeit dieser Ursache, aber nicht ihre Natur kennen lehren, sondern die Gesetze der Mechanik sind es, welche uns zeigen, dass sie in dem größern Gewichte eines der Theile des in die Luft geworfenen Körpers bestehen muss, ohne dass sie uns jedoch wegen der Zusammengesetztheit des Problemes die Wirkungen einer solchen Ursache und die Wahrscheinlichkeit, welche daraus für das Treffen jeder der beiden Flächen entspringt, und nur durch die Erfahrung gefunden werden kann, bestimmen lehrten.

Durch ein solches Verfahren könnte man, wie bereits Laplace in Vorschlag gebracht hat,*) die Existenz oder Nichtexistenz gewisser geheimer Ursachen, welche a priori nicht absolut unmöglich, und auch nicht vermögend sind, die Erscheinungen, worauf sie sich beziehen, nothwendig hervorzubringen, nachweisen. Zu dem Zwecke wären lange Reihen von Versuchen erforderlich, indem man den Einfluss der zufälligen Ursachen so viel als möglich beseitigte, und die Anzahl der Fälle, in welchen das Ereigniss beobachtet ist, so wie die Anzahl der Fälle, worin es nicht stattgehabt hat, genau in Rechnung brächte. Wenn alsdann das Verhältniss der ersten dieser beiden Zahlen zur zweiten die Einheit merklich überstiege, so wäre die Existenz irgend einer Ursache und die Wahrscheinlichkeit, welche daraus für das Stattfinden dieser Erscheinung entspringt, höchst wahrscheinlich.

Wenn zwei Spieler A und B eine sehr große Anzahl μ von Partien mit einander gespielt haben, wovon der Spieler A, m Partien gewonnen hat, und das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ übersteigt $\frac{1}{2}$ um einen nicht sehr kleinen Bruch, so kann die Existenz einer dem Spieler A günsti-

*) Essai philosophique sur les probabilités, page **133**.

gen Ursache fast als gewiss angenommen werden. Wenn keiner der beiden Spieler dem andern einen Vortheil gestattet hat, so ist diese Ursache die Ueberlegenheit des Spielers A über den Spieler B, wofür das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ so zu sagen das Maß ausdrückt. Bei einem Kartenspiele, z. B. bei dem Piquetspiele, kann das Resultat jeder Partie nur von der ungleichen Fertigkeit der beiden Spieler und von der Vertheilung der Karten unter sie abhängen. Wenn keiner von beiden betrügt, so ist diese Vertheilung die Wirkung des Zufalles und sie kann auf das Verhältniss der Anzahlen der von den beiden Spielern gewonnenen Partien Einfluss haben, wenn diese Zahlen wenig beträchtlich sind. Dieses kann man das Glück oder Unglück nennen, wofern man diese Ausdrücke nicht auf den einen oder andern Spieler selbst bezieht. Denn es würde ungereimt sein, wenn man zwischen diesen Spielern und den ihnen durch den bloßen Zufall ertheilten Karten irgend eine Beziehung annehmen wollte, weil die bei jedem Wurfe dem einen Spieler zugefallenen Karten hätten ebensowohl dem andern zu Theil werden können. Aber in einer hinreichend langen Reihe von Partien kann nur noch die ungleiche Fertigkeit der Spieler auf die Wahrscheinlichkeiten des Spieles Einfluss haben, so dass mit der Länge der Zeit die geübtesten Spieler auch das meiste Glück haben, und umgekehrt. Wenn A und B von neuem eine sehr große Anzahl μ' von Partien spielen, so ist eine große Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass die Anzahl der Partien, welche A gewinnt, sehr wenig von dem Producte $\mu' . \frac{m}{\mu}$ verschieden ist, und wenn sich dieses nicht bestätigte, so müsste man annehmen, dass während der beiden Reihen von Partien die Ueberlegenheit von A über B zu- oder abgenommen hätte.

Drittes Kapitel.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, welche von sehr großen Zahlen abhängen.

§. **66.** Wenn man das Verhältniss sehr hoher Potenzen zwei gegebener Zahlen berechnen will, so kann dieses immer leicht mit Hülfe der logarithmischen Tafeln geschehen, indem man nöthigenfalls Logarithmen mit mehr Decimalen als gewöhnlich anwendet. Wenn a und b diese beiden Zahlen, und m und n ihre Exponenten sind, so hat man:

$$\log \frac{a^m}{b^n} = m.\log a - n.\log b.$$

Die Producte $m.\log a$, $n.\log b$ und ihr Unterschied werden leicht erhalten, und da dieser Unterschied der Logarithmus des gesuchten Verhältnisses ist; so findet man dieses Verhältniss selbst alsdann in den Tafeln. Allein dieses ist nicht mehr der Fall, wenn es darauf ankommt, das Verhältniss zweier Producte zu bestimmen, wovon jedes aus einer sehr großen Anzahl ungleicher Factoren besteht, wie z. B. das Verhältniss:

$$\frac{a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_m}{b_1 . b_2 . b_2 \ldots b_n}.$$

Denn wenn die beiden Zahlen m und n sehr groß sind, so wird die Addition der Logarithmen von a_1, a_2, a_3, ... und der von b_1, b_2, b_3, ... sehr beschwerlich. Alsdann muss man sich der Näherungsmethoden bedienen, welche Stirling zuerst angewandt hat, und welche die sehr merkwürdige Eigenschaft haben, dass sie in die Näherungswerthe der betrachteten Verhältnisse das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser und andere transcendente Größen einführen, obgleich ihre genauen Werthe ganze Zahlen, oder Brüche sind, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind.

Diese Verhältnisse der Producte aus einer sehr großen Anzahl von Factoren und die Summen sehr großer Anzahlen solcher Verhältnisse, kommen in den meisten der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor, und die in den beiden vorhergehenden Kapiteln aufgestellten Regeln, obgleich sie an sich vollständig sind, bleiben ohne Hülfe von Formeln, vermittelst welcher man ihre Zahlenwerthe mit einer hinreichenden Annäherung berechnen kann, fast ganz nutzlos und unbrauchbar, weswegen wir uns nun mit der Ableitung dieser Formeln beschäftigen wollen.

§. 67. Wir wollen zuerst das Product $1.2.3\ldots n$ der n ersten natürlichen Zahlen betrachten.

Der Buchstabe e soll jetzt und in dem ganzen gegenwärtigen Kapitel zur Bezeichnung der Basis der Neperschen Logarithmen angewandt werden. Durch das Verfahren der theilweisen Integration findet man:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = 1.2.3\ldots n. \qquad (1)$$

Der Coefficient $e^{-x}x^n$ von dx unter dem Integralzeichen verschwindet für $x=0$ und $x=\infty$, zwischen diesen beiden Grenzen wird er niemals unendlich und er geht nur durch ein einziges Maximum, welches man bestimmt, wenn man sein Differenzial $=0$ setzt. Be-

zeichnet man seinen größten Werth mit H und den zugehörigen Werth von x mit h, so hat man:

$$h=x,\ H=e^{-h}h^n.$$

Demnach kann man setzen:

$$e^{-x}x^n=He^{-t^2},$$

wo t eine neue Veränderliche bezeichnet, welche man von $t=-\infty$ bis $t=\infty$ wachsen läßt, und wovon die besondern Werthe $t=-\infty$, $t=0$, $t=\infty$ resp. $x=0$, $x=h$, $x=\infty$ entsprechen. Betrachten wir x als eine Function von t, so haben wir:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx=H\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\frac{dx}{dt}dt.$$

Auch ist:

$$\log e^{-x}x^n=\log H-t^2,$$

und wenn man

$$x=h+x'$$

setzt und nach den Potenzen von x' entwickelt, so ergibt sich:

$$t^2+\tfrac{1}{2}\frac{d^2.\log H}{dh^2}x'^2+\frac{1}{2.3}\frac{d^3.\log H}{dh^3}x'^3+etc.=0,$$

indem man bemerkt, daß das erste Differenzial von $\log H=0$ und nach der Differenziation $h=n$ gesetzt ist. Der Werth von x', welcher sich aus dieser Gleichung ableiten läßt, kann durch eine Reihe von folgender Form ausgedrückt werden:

$$x'=h't+h''t^2+h'''t^3+\ldots,$$

wo die Coefficienten $h', h'', h''', \ldots$ von t unabhängig sind und durch einander bestimmt werden, wenn man diesen Werth in diese Gleichung substituirt und dann die Summe der Coefficienten jeder Potenz von t in dem ersten Theile $=0$ setzt. Auf diese Weise erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\tfrac{1}{2}\dfrac{d^2.\log H}{dh^2}h'^2=0, \\ \dfrac{d^2.\log H}{dh^2}h''+\tfrac{1}{6}\dfrac{d^3.\log H}{dh^3}h'^2=0, \\ etc. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wenn i eine ganze und positive Zahl bezeichnet, so hat man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2i+1} dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2i} dt = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2^i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-{}^2} dt,$$

und bekanntlich ist auch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

wo π immer das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Wegen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = h' + 2h''t + 3h'''t^2 + etc.,$$

haben wir also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} x^n dx =$$

$$H\sqrt{\pi}(h' + \frac{1.3}{2} h''' + \frac{1.3.5}{4} h^{V} + \frac{1.3.5.7}{8} h^{VII} + etc.),$$

und wir brauchen folglich nur die Coefficienten h', h''', h^{V}, ... von ungeradem Range zu bestimmen. Vermittelst der Gleichungen (2) ergibt sich aber:

$$h' = \sqrt{2n},\ h''' = \frac{\sqrt{2n}}{18n},\ h^{V}\ \frac{\sqrt{2n}}{1080n^2},\ etc.$$

und folglich erhält man endlich, wenn man die Gleichung (1) und den Werth von H berücksichtigt:

$$1\,2.3\ldots n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + etc.) \quad (3)$$

§. 68. Die zwischen den Parenthesen stehende Reihe ist in ihren ersten Gliedern desto convergenter, je größer die Zahl n ist. Sie gehört jedoch zu der Gattung von Reihen, welche zuletzt divergent werden, wenn man sie hinreichend weit entwickelt. Aber wenn man diese Reihe auf ihren convergirenden Theil reducirt, so kann man sich der Formel (3) immer zur Berechnung eines Näherungswerthes des Productes der n ersten natürlichen Zahlen bedienen, und es ist sogar nicht

einmal nöthig, daß n eine sehr große Zahl ist, wenn die Annäherung sehr groß sein soll. Nimmt man z. B. $n=10$, so gibt die auf ihre drei ersten Glieder reducirte Formel den Werth **3628800** wenigstens bis auf eine Einheit genau, und diese ganze Zahl ist auch genau der Werth des Productes der zehn ersten natürlichen Zahlen.

Wenn man $2n$ statt n in die Formel (3) substituirt, so kommt:

$$1.2.3\ldots(2n-1)2n = 2(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{\pi n}\left(1+\frac{1}{24n}+\frac{1}{1152n^2}+etc.\right);$$

Es ist aber identisch:

$$1.2.3\ldots(2n-1).2n = 2^n.1.2.3\ldots n.1.3.5\ldots(2n-1),$$

und folglich:

$$1.2.3\ldots n.1.3.5\ldots(2n-1) = 2^{n+1}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{\pi n}\left(1+\frac{1}{24n}+etc.\right),$$

und wenn man diese Gleichung durch die Gleichung (3) dividirt, so ergibt sich:

$$1.3.5\ldots(2n-1) = (2n)^n e^{-n}\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{24n}+\frac{1}{1152n^2}+etc.,\right) \quad (4)$$

so daß der Reihenausdruck des Productes der ungeraden Zahlen die Größe $\sqrt{\pi}$, welche in dem Ausdrucke des Productes der geraden und ungeraden Zahlen vorkommt, nicht mehr enthält.

Wenn man in dieser Gleichung und in der Gleichung (3) $n=1$ setzt, so ergibt sich daraus:

$$\frac{e}{2\sqrt{2}} = 1-\frac{1}{24}+\frac{1}{1152}+etc.,$$

$$\frac{e}{\sqrt{2\pi}} = 1+\frac{1}{12}+\frac{1}{288}+etc.$$

Durch directe Rechnung erhält man:

$$\frac{e}{2\sqrt{2}} = 0{,}96105\ldots, \quad \frac{e}{\sqrt{2\pi}} = 1{,}08444\ldots,$$

und wenn diese Reihen auf ihre drei ersten Glieder reducirt werden, so geben sie resp. **0,95920** und **1,08680**, was sehr wenig von den genauen Werthen verschieden ist. Diese Zahlenbeispiele nebst dem vor=

hergehenden zeigen, welchen Grad von Annäherung man vermittelst dieser Formeln, wovon wir in diesem Kapitel beständig Gebrauch machen werden, erreichen kann.

Multiplicirt man die beiden Theile der Gleichung (3) mit 2^n, erhebt sie dann zum Quadrate und dividirt sie hierauf durch $2n$; so kommt:

$$2.2.4.4.6.6\ldots 2n-2.2n-2.2n$$
$$=\pi(2n)^{2n}e^{-2n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+etc.\right)^2.$$

Erhebt man die beiden Theile der Gleichung (4) zum Quadrate und läßt in dem ersten einen der Einheit gleichen Factor hinweg, so hat man auch:

$$1.3.3.5.5\ldots 2n-1.2n-1$$
$$=2(2n)^{2n}e^{-2n}\left(1+\frac{1}{24n}+\frac{1}{1152n^2}+etc.\right)^2.$$

Hiernach besteht also der erste Theil jeder dieser beiden Gleichungen aus $2n-1$ Factoren, und wenn man die correspondirenden Theile dieser Gleichungen in einander dividirt, so ergibt sich das Resultat:

$$\tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1}{12n}+etc.\right)=\frac{2.2.4.4.6.6\ldots 2n-2.2n-2.2n}{1.3.3.5.5..2n-3.2n-1.2n-1},$$

welches für $n=\infty$ mit der bekannten Wallisschen Formel:

$$\tfrac{1}{2}\pi=\frac{2.2.4.4.6.6.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots}$$

übereinstimmt.

Die Methode, welche wir eben angewandt haben, die Integrale in Reihen zu verwandeln, deren erste Glieder convergiren, und welche zur Berechnung der Näherungswerthe dieser Integrale dienen können, wenn die unter dem Integrationszeichen stehenden Größen sehr große Exponenten haben, verdankt die Analysis Laplace. In der Folge werden wir eine andere Anwendung derselben kennen lernen.

§. 69. Nun seien E und F zwei entgegengesetzte Ereignisse von einer beliebigen Natur und wovon bei jedem Versuche eins stattfindet. Ihre Wahrscheinlichkeiten, welche wir als constant annehmen, wollen wir mit p und q bezeichnen und die Wahrscheinlichkeit, daß E bei

μ Versuchen m mal und F, n mal sittfindet, U nennen; so haben wir (§. 14.):

$$U=\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}p^m q^n, \qquad (5)$$

wo:

$$m+n=\mu \text{ und } p+q=1$$

sein muss. Wenn nun μ, m, n sehr große Zahlen sind, so muss man sich zur Berechnung des Zahlenwerthes von U der Formel (3) bedienen. Nehmen wir an, dass jede dieser drei Zahlen hinreichend groß ist, um die erwähnte Formel auf ihr erstes Glied reduciren zu können, so haben wir:

$$1.2.3\ldots\mu=\mu^\mu\sqrt{2\pi\mu},$$
$$1.2.3\ldots m=m^m\sqrt{2\pi m},$$
$$1.2.3\ldots n=n^n\sqrt{2\pi n},$$

und folglich für den Näherungswerth von U:

$$U=\left(\frac{\mu p}{m}\right)^m\left(\frac{\mu q}{n}\right)^n\sqrt{\frac{\mu}{2\pi m n}}. \qquad (6)$$

Es ist leicht einzusehen, dass das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniss, oder das, für welches dieser Werth von U am größten ist, dem Falle entspricht, wo sich das Verhältniss der Zahlen m und n dem Verhältnisse der beiden Wahrscheinlichkeiten p und q am meisten nähert. Denn wenn man im Gegentheil m und n als gegebene Zahlen und p und q als veränderliche Größen betrachtet, deren Summe die Einheit ist, aber welche von Null bis zu der Einheit stetig zunehmen können; so findet man nach dem gewöhnlichen Verfahren, dass das Maximum von U, $p=\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ entspricht. Aber wegen der großen Anzahl anderer zusammengesetzter, weniger wahrscheinlicher Ereignisse, als das in Rede stehende, ist die Wahrscheinlichkeit desselben dennoch sehr gering und nimmt um so mehr ab, je mehr die als sehr groß vorausgesetzte Zahl μ der Versuche noch fernerweit zunimmt. Wenn z. B. $p=q=\frac{1}{2}$ und μ eine gerade Zahl ist, so entspricht das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniss $m=n=\frac{\mu}{2}$, und seine Wahrscheinlichkeit U hat nach der Formel (6) den Werth:

$$U=\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}},$$

welcher, wie man sieht, im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Zahl μ abnimmt. Nimmt man $\mu=100$, so hat man:

$$U=0{,}07979\,,\ 1-U=0{,}92021,$$

so dass man etwas mehr, als **92** gegen **8** wetten kann, dass bei **100** Versuchen die beiden gleichwahrscheinlichen, entgegengesetzten Ereignisse E und F nicht dieselbe Anzahl von Malen stattfinden. Wenn man das zweite Glied der Formel (3) beibehalten hätte, so würde dieser letzte Ausdruck von U mit $1-\frac{1}{4\mu}$ multiplicirt, wodurch U für $\mu=100$ um $\frac{1}{400}$ seines Werthes vermindert würde.

§. **70.** Das zusammengesetzte Ereigniss, für welches sich das Verhältniss der Zahlen m und n dem Verhältnisse der Brüche p und q am meisten nähert, ist nicht blos immer das wahrscheinlichste, sondern die Wahrscheinlichkeiten der übrigen zusammengesetzten Ereignisse fangen erst dann an, schnell abzunehmen, wenn das Verhältniss $\frac{m}{n}$ um mehr, als um eine gewisse Größe, welche im umgekehrten Verhältnisse von $\sqrt{\mu}$ steht, größer oder kleiner, als das Verhältniss $\frac{p}{q}$ ist, wenn die gegebene Anzahl μ von Versuchen als sehr groß angenommen wird.

Denn wir wollen z. B. wieder den Fall von $p=q=\frac{1}{2}$ betrachten, und es sei g eine gegebene positive oder negative Größe, welche ihrem absoluten Werthe nach kleiner, als $\sqrt{\mu}$ ist. Wenn wir in der Formel (6):

$$m=\tfrac{1}{2}\mu\left(1+\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right),\ n=\tfrac{1}{2}\mu\left(1-\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)$$

setzen, so ergibt sich daraus:

$$U=\left(1-\frac{g^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}\mu}\left(1-\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}}\left(1+\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}}\times\sqrt{\frac{2}{\pi(\mu-g^2)}}.$$

Wenn nun g ein Bruch odrr eine gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Zahl ist, so ergibt sich vermittelst des binomischen Lehrsatzes, dass sehr nahe

$$\left(1-\frac{g^2}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}\mu}=e^{\frac{1}{2}g^2},$$

$$\left(1-\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}}=\left(1+\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}}=e^{-\frac{1}{2}g^2}$$

ist (§. 8.), und wenn man unter dem Wurzelzeichen μ statt $\mu-g^2$ nimmt, so erhält man:

$$U=\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\,e^{-\frac{1}{2}g^2}$$

für das Gesetz der Abnahme der Wahrscheinlichkeit U innerhalb einer kleinen Ausdehnung zu beiden Seiten ihres Maximums. Setzt man z. B.

$$\mu=200,\ g=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

so ergibt sich, daß bei 200 Versuchen die Wahrscheinlichkeit, daß von den beiden entgegengesetzten, aber gleich wahrscheinlichen Ereignissen E und F das erste 105 und das zweite 95 mal stattfindet, sich zu der Wahrscheinlichkeit, daß jedes 100 mal stattfindet, wie $e^{-\frac{1}{4}}$ zu 1 oder ungefähr wie 3 zu 4 verhält.

Die Formel (6) setzt voraus, daß jede der drei Zahlen μ, m, n sehr groß ist. Wenn diese Bedingung erfüllt wird und das Verhältniß $\frac{m}{n}$ wenig von $\frac{p}{q}$ verschieden ist, so gibt diese Formel für die Wahrscheinlichkeit U einen gegen ihr Maximum sehr kleinen Werth. Aber es ist wohl zu bemerken, daß, wenn man eine andere Näherungsmethode anwändte, der immer sehr kleine Werth von U, welchen man erhielte, wenn die Differenz $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$ ein sehr kleiner Bruch ist, nicht mit dem aus der Formel (6) abgeleiteten übereinstimmen könnte, so daß das Verhältniß des einen dieser Näherungswerthe zu dem andern sehr von der Einheit verschieden sein könnte.

Um dieses zu beweisen, wollen wir bemerken, daß nach einer Formel, welche sich in einer unserer Abhandlungen über die bestimmten Integrale befindet*):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^\mu x\cos(m-n)\,x\,dx=\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{2^\mu}$$

---

*) Journal de l'École Polytechnique, 19. cahier, page 490.

ist. Man hat also für jeden beliebigen Werth der Zahlen m und n und ihrer Summe μ für den Fall von $p=q=\frac{1}{2}$, welchen wir blos zu betrachten brauchen, nach der Gleichung (5):

$$U=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos^\mu x \, cos(m-n)x\,dx.$$

Wenn nun μ eine sehr große Zahl ist und in der Näherungsrechnung als eine unendlich große Zahl behandelt wird, so verschwindet der Factor $cos^\mu x$ von dx unter dem Integrationszeichen, sobald die Veränderliche x eine endliche Größe hat, und da der andere Factor $cos(m-n)x$ immer einen endlichen Werth hat, so folgt, daß man das Integral nur von $x=o$ bis $x=\alpha$, wo α eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, zu nehmen braucht, ohne seinen Werth zu verändern. Zwischen diesen Grenzen hat man:

$$cos\,x=1-\tfrac{1}{2}x^2,\; cos^\mu x=e^{-\frac{1}{2}\mu x^2},$$

und folglich:

$$U=\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2}\mu x^2} cos(m-n)x\,dx.$$

Da nun der Factor $e^{-\frac{1}{2}\mu x^2}$ für jeden endlichen Werth von x verschwindet, so kann man auch dieses neue Integral ohne Veränderung seines Werthes über $x=\alpha$ hinaus, und wenn man will, bis $x=\infty$ erstrecken, und da nach einer bekannten Formel

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\mu x^2} cos\,(m-n)\,x\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\,e^{-\frac{(m-n)^2}{2\mu}}$$

ist, so folgt:

$$U=\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\,e^{-\frac{(m-n)^2}{2\mu}}.$$

Setzt man nun, wie weiter oben:

$$m-n=g\sqrt{\mu},$$

so stimmt der Werth von U mit dem sich aus der Formel (6) ergebenden nur dann überein, wenn g gegen $\sqrt{\mu}$ eine sehr kleine Zahl ist, und für andere Werthe von g ist das Verhältniß dieser beiden Werthe von U beträchtlich von der Einheit verschieden und kann sogar eine sehr große Zahl werden. Nimmt man z. B. $g=\frac{1}{2}\sqrt{\mu}$ und $m-n=\frac{1}{2}\mu$, so gibt die vorhergehende Formel:

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\, e^{-\frac{1}{8}\mu},$$

und aus der Formel (6) folgt:

$$U = \left(1-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}\mu}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}\mu}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}\mu}\sqrt{\frac{8}{3\pi\mu}},$$

oder da der zweite Factor dem dritten fast gleich ist:

$$U = \left(\frac{9}{8}\right)^{-\frac{1}{2}\mu}\sqrt{\frac{8}{3\pi\mu}}.$$

Nun stimmen aber diese beiden Werthe von U insofern überein, daſſ sie beide sehr klein sind, und folglich zeigen, daſſ bei einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen die Wahrscheinlichkeit U, daſſ von den beiden entgegengesetzten und gleich wahrscheinlichen Ereignissen E und F das eine $\frac{3}{4}\mu$ mal und das andere $\frac{1}{4}\mu$ mal, d. h. das eine 3 mal mehr, als das andere stattfindet, sehr klein ist. Aber wenn man den letzten Werth von U durch den vorhergehenden dividirt, so erhält man die Größe:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{64\sqrt{e}}{81}\right)^{\frac{1}{4}\mu},$$

welche mit μ beständig zunimmt und schon für $\mu = 100$ größer als 800 ist.

§. 71. Wir wollen die Wahrscheinlichkeiten von E und F wieder als constant, aber als unbekannt annehmen. Man weiß nur, daſſ in einer sehr großen Anzahl $\mu = m + n$ von Versuchen die Ereignisse E und F resp. m und n mal stattgefunden haben, und man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daſſ E und F bei einer Anzahl $\mu' = m' + n'$ künftiger Versuche resp. m' mal und n' mal stattfinden werden. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit mit U', mit P_i das Product der i ersten natürlichen Zahlen, so daſſ

$$P_i = 1.2.3\ldots i$$

ist, und setzt der Kürze wegen

$$\frac{1.2.3\ldots\mu'}{1.2.3\ldots m'.1.2.3\ldots n'} = H;$$

so hat man (§. 46.):

$$U' = H \frac{P_{m+m'} P_{n+n'} P_{\mu+1}}{P_m P_n P_{\mu+\mu'+1}}.$$

Wenn m und n sehr große Zahlen sind und die Formel (3), wie weiter oben, auf ihr erstes Glied reducirt wird, so hat man für beliebige Werthe von m' und n':

$$P_n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Die Werthe der übrigen Producte $P_{n+n'}$, $P_{\mu+1}$, *etc.* ergeben sich aus dem von P_n, wenn man $n+n'$, $\mu+1$, *etc.* für n setzt und alsdann ergibt sich:

$$U' = HK \frac{(m+m')^{m+m'} (n+n')^{n+n'} (\mu+1)^{\mu}}{m^n n^n (\mu+\mu'+1)^{\mu+\mu'}}$$

für den Näherungswerth von U', worin der Kürze wegen

$$\frac{\mu+1}{\mu+\mu'+1} \sqrt{\frac{(m+m')(n+n')(\pi+1)}{mn(\mu+\mu'+1)}} = K$$

gesetzt ist.

Man kann diesen Ausdruck von U' auch auf eine andere Form bringen; denn da μ eine sehr große Zahl ist, so hat man nach der Binomialformel sehr nahe:

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{\mu+\mu'}\right)^{\mu+\mu'},$$

und da $\mu' = m' + n'$ ist, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} U' = HK \left(1+\frac{m'}{m}\right)^m \left(1+\frac{n'}{n}\right)^n \left(1+\frac{\mu'}{\mu}\right)^{-\mu} \\ \times \left(\frac{m+m'}{\mu+\mu'}\right)^{m'} \left(\frac{n+n'}{\mu+\mu'}\right)^{n'}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wenn m' und n' gegen m und n sehr kleine Zahlen sind, so hat man entweder nach der Binomialformel (§. 8.), oder durch Betrachtung der Logarithmen ebenfalls sehr nahe:

$$\left(1+\frac{m'}{m}\right)^m = e^{m'},\ \left(1+\frac{n'}{n}\right)^{n'} = e^{n'},\ \left(1+\frac{\mu'}{\mu}\right)^{-\mu'} = e^{-\mu'}.$$

Ebenso ist sehr nahe:

$$\left(\frac{m+m'}{\mu+\mu'}\right)^{m'} = \left(\frac{m}{\mu}\right)^{m'},\ \left(\frac{n+n'}{\mu+\mu'}\right) = \left(\frac{n}{\mu}\right)^{n'}$$

und man kann auch für den Factor K die Einheit setzen, wovon er sehr wenig verschieden ist. Folglich hat man:

$$U' = H\left(\frac{m}{\mu}\right)^{m'}\left(\frac{n}{\mu}\right)^{n'},$$

und aus der Formel (5) sieht man, dass dieser Ausdruck von U' mit dem für die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse E und F bei $m'+n'$ Versuchen resp. m'mal und n'mal stattfinden, wenn die Wahrscheinlichkeiten p und q von E und F a priori gegeben sind und die gewissen Werthe $p=\frac{m}{\mu}$ und $q=\frac{n}{\mu}$ haben, übereinstimmt. In dem besondern Falle, wo $m'=1$ und $n'=0$ ist, hat man $H=1$ und $U'=\frac{m}{\mu}$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss E, welches in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen $m$mal stattgefunden hat, bei einem neuen Versuche noch einmal stattfinden wird, das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ zum Näherungswerthe hat, was mit der Regel in §. 49. übereinstimmt.

Aber wenn die Zahlen m' und n' hinsichtlich ihrer Größe mit der von m und n vergleichbar sind, so ist die Wahrscheinlichkeit U' nicht mehr dieselbe, als wenn die Wahrscheinlichkeiten von E und F a priori gegeben und zuverlässig gleich $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ wären. Um dieses an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir mit h eine ganze oder gebrochene Zahl bezeichnen, welche nicht sehr klein ist, und:

$$m' = mh,\ n' = nh,\ \mu' = \mu h$$

setzen; so ist die Größe K alsdann fast gleich $\frac{1}{\sqrt{1+h}}$, und wegen $\mu = m+n$ verwandelt sich die Formel (7) in:

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1+h}} H\left(\frac{m}{\mu}\right)^{m'}\left(\frac{n}{\mu}\right)^{n'}.$$

Vergleicht man sie mit der Formel (5), bezeichnet den Werth dieser letztern, wenn man darin:

$$p = \frac{m}{\mu},\ q = \frac{n}{\mu}$$

setzt, mit $U_{,}$ und setzt m' und n' für m und n; so ergibt sich:

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1+h}} U_{,},$$

woraus folgt, daß U' in dem Verhältnisse von 1 zu $\sqrt{1+h}$ kleiner ist, als $U_{,}$, und daß folglich U' eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit ist, wenn h eine sehr große Zahl ist.

Es findet also zwischen den nach der Voraussetzung gegebenen Wahrscheinlichkeiten p und q der Ereignisse E und F und ihren Wahrscheinlichkeiten $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$, welche aus den Zahlen abgeleitet sind, die angeben, wie vielmal E und F in einer sehr großen Anzahl von Versuchen stattgefunden haben, ein wesentlicher Unterschied statt. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Ereignisse E und F in einer andern Reihe von Versuchen bestimmte Anzahlen von Malen stattfinden werden, ist im zweiten Falle kleiner als im ersten, welcher Unterschied daher rührt, daß die aus der Beobachtung abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten von E und F selbst nur wahrscheinlich sind, wie groß die Zahlen m und n, worauf sie sich gründen, auch sein mögen, während die a priori gegebenen Wahrscheinlichkeiten von E und F gewisse Werthe haben. Wenn man z. B. weiß, daß eine Urne A gleich viel weiße und schwarze Kugeln enthält; so ist, wie wir weiter oben gesehen haben, die Wahrscheinlichkeit, daß in 100 successiven Zügen, wenn die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne gelegt wird, 50 mal eine weiße Kugel gezogen wird, $= 0{,}07979$; aber wenn das Verhältniß der in der Urne A enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln nicht gegeben ist, und man blos weiß, daß bei 100 Versuchen 50 mal eine weiße und 50 mal eine schwarze Kugel gezogen ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe bei 100 neuen Versuchen stattfinden wird, nur noch $= \frac{0{,}07979}{\sqrt{2}} = 0{,}05658$, wenn man in der vorhergehenden Gleichung $h = 1$ setzt.

§. 72. Um für den Fall, wo sich die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und F während der Versuche ändern, ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, eine Urne A enthalte c Kugeln, wovon a weiß und b schwarz sind, man ziehe successive μ Kugeln aus der Urne, ohne sie wieder hineinzulegen, und die Wahrscheinlichkeit, daß in den μ Versuchen in einer beliebigen Ordnung m weiße und n schwarze Kugeln gezogen werden, wollen wir mit V bezeichnen. Bezeichnen alsdann a' und b' die Anzahlen der weißen und schwarzen Kugeln, welche nach den μ Ziehungen noch in der Urne A bleiben und ist ihre Summe $a'+b'=c'$, so daß man:

$$a'=a-m,\ b'=b-n,\ c'=c-\mu$$

hat, setzt der Kürze wegen:

$$\frac{1.2.3\ldots c'}{1.2.3\ldots a'.1.2.3\ldots b'} = H'$$

und behält die Bezeichnung im vorhergehenden §. bei; so hat man nach §. 18:

$$V = H' \frac{P_a P_b P_\mu}{P_m P_n P_c}.$$

Wenn a, b, m, n sehr große Zahlen sind, so werden die Werthe der sechs Producte P_a, P_b, *etc.* durch die Formel (3) gegeben, und wenn man sie auf ihr erstes Glied reducirt, und bemerkt, dass:

$$\mu = m + n,\ c = a + b$$

ist; so ergibt sich daraus für den Näherungswerth von V:

$$V = H' \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{c}\right)^b \left(\frac{m}{\mu}\right)^{-m} \left(\frac{n}{\mu}\right)^{-n} \sqrt{\frac{a\,b\,.\,\mu}{m\,n\,.\,c}},$$

welcher genau der Einheit gleich ist, wenn

$$m = a,\ n = b,\ \mu = c$$

ist, und wo man folglich den Factor $H' = 1$ setzen muss. Die Größe V drückt alsdann die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei c Versuchen die a weißen und die b schwarzen Kugeln, welche die Urne A enthielt, herausgezogen werden, welches die Gewissheit ist.

Wenn sich die Zahlen m und n wie a und b verhalten, so hat man auch:

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{\mu},\ \frac{b}{c} = \frac{n}{\mu},$$

und wenn man:

$$\frac{a}{c} = p',\ \frac{b}{c} = q'$$

setzt, so verwandelt sich der Ausdruck von V in:

$$V = \frac{1.2.3\ldots c'}{1.2.3\ldots a'.1.2.3\ldots b'} p'^{a'} q'^{b'} \sqrt{\frac{c}{\mu}}.$$

Vergleicht man diese letzte Formel mit der Formel (5) und bezeichnet mit V' die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten constant und resp. den Wahrscheinlichkeiten $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$

des Zuges einer weißen und des Zuges einer schwarzen Kugel zu Anfang der Ziehungen gleich sind, bei $c = a + b$ Versuchen resp. a' und b' mal stattfinden; so hat man:

$$V = V' \sqrt{\frac{c}{\mu}},$$

woraus erhellet, dass die Wahrscheinlichkeit V in dem Verhältnisse von $\sqrt{c}$ zu $\sqrt{\mu}$ größer ist, als die Wahrscheinlichkeit V', wie groß die Anzahl c' der nach den Ziehungen in der Urne A noch zurückbleibenden Kugeln auch sein mag, wofern nur die Anzahl μ der gezogenen Kugeln sehr groß ist.

Auch kann man bemerken, dass:

$$a' = p'(c - \mu),\ b' = q'(c - \mu)$$

ist, so dass sich die Anzahlen a' und b' der Kugeln, welche von beiden Farben in der Urne A zurückbleiben, wie die Wahrscheinlichkeiten p' und q' oder wie die Anzahlen a und b der ursprünglich in dieser Urne enthaltenen Kugeln von denselben Farben verhalten. Wenn z. B. $p' = q' = \frac{1}{2}$ und folglich $a' = b' = \frac{1}{2}c'$ ist, so hat man (§. 69.):

$$V' = \sqrt{\frac{2}{\pi c'}},$$

und wegen $c' = c - \mu$ ergibt sich:

$$V = \sqrt{\frac{2c}{\pi \mu (c - \mu)}}.$$

Wenn $\mu = \frac{1}{2}c$ ist, so ist:

$$V = \sqrt{\frac{4}{\pi \mu}} = V' \sqrt{2},$$

woraus folgt, dass, wenn eine Urne A sehr große und gleiche Anzahlen weißer und schwarzer Kugeln enthält, und die Hälfte der Gesammtzahl herausgezogen, aber nicht wieder hineingelegt wird, die Wahrscheinlichkeit, eben so viel weiße, als schwarze Kugeln zu ziehen, in dem Verhältnisse von $\sqrt{2}$ zu 1 größer ist, als die Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses, wenn die herausgezogene Kugel bei jedem Versuche wieder in die Urne gelegt wird.

§. 73. Wir kommen nun wieder auf den Fall zurück, wo die Wahrscheinlichkeiten p und q der Ereignisse E und F constant sind, und wir wollen die Wahrscheinlichkeit betrachten, dass das Ereigniss E

bei $\mu = m + n$ Versuchen wenigstens m mal und das Ereigniss F höchstens n mal stattfindet. Diese Wahrscheinlichkeit ist die Summe der m ersten Glieder der nach den steigenden Potenzen von q geordneten Entwickelung von $(p+q)^\mu$, so dass, wenn man sie mit P bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} P = p^\mu + \mu p^{\mu-1} q + \frac{\mu . \mu - 1}{1 . 2} p^{\mu-2} q^2 + \ldots \\ \qquad + \frac{\mu . \mu - 1 \ldots \mu - n + 1}{1 . 2 . 3 \ldots n} p^{\mu-n} q^n \end{array}\right\} \quad (8)$$

ist (§. 15.); aber unter dieser Form würde es schwierig sein, den Ausdruck von P in ein Integral zu verwandeln, worauf man alsdann die Methode in §. 67. anwenden kann, wenn m und n sehr große Zahlen sind. Wir wollen daher zuerst einen andern, diesem Zwecke besser entsprechenden Ausdruck von P suchen.

Man kann auch sagen, dass das in Rede stehende zusammengesetzte Ereigniss darin besteht, dass das Ereigniss F in den μ Versuchen nicht mehr, als n mal stattfindet und, auf diese Weise betrachtet, wollen wir es mit G bezeichnen. Es kann alsdann in den folgenden $n+1$ Fällen stattfinden:

1) Wenn in den m ersten Versuchen nur das Ereigniss E stattfindet; denn alsdann bleiben nur noch $\mu - m = n$ Versuche übrig, worin das Ereigniss F nicht mehr, als n mal stattfinden kann. Die Wahrscheinlichkeit für diesen ersten Fall ist $= p^m$.

2) Wenn in den $m+1$ ersten Versuchen das Ereigniss E m mal und das Ereigniss F einmal stattfindet, ohne dass F zuletzt stattfindet, welche Bedingung erforderlich ist, damit dieser zweite Fall nicht auf den ersten zurückläuft. Offenbar kann das Ereigniss F bei den $n-1$ folgenden Versuchen höchstens $n-1$ mal stattfinden, so dass dieses Ereigniss bei allen Versuchen nicht mehr, als n mal stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E, m mal und das Ereigniss F, welches einen bestimmten Rang einnimmt, einmal stattfindet, ist $= p^m q$, und da dieser Rang einer von den m ersten sein kann, so folgt, dass die Wahrscheinlichkeit des zweiten, dem Ereignisse G günstigen Falles $= m p^m q$ ist.

3) Wenn bei den $m+2$ ersten Versuchen das Ereigniss E m mal und das Ereigniss F, 2 mal stattfindet, ohne dass letzteres den zweiten Rang einnimmt, was erforderlich und hinreichend ist, damit dieser dritte Fall weder auf den ersten, noch auf den zweiten zurückkommt. Die Wahrscheinlichkeit des m maligen Stattfindens von E und des zweimaligen Stattfindens von F in einer bestimmten Ordnung ist gleich $p^m q^2$, und wenn man je zwei der $m+1$ ersten Versuche

nimmt, worin das Ereigniss F stattgefunden haben kann; so erhält man $\frac{m(m+1)}{1.2}$ verschiedene Combinationen. Die Wahrscheinlichkeit des dritten, dem Ereigniss G günstigen Falles wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{m(m+1)}{1.2}p^m q^2.$$

Schließt man so fort, so gelangt man endlich zu dem $(n+1)$ten Falle, in welchem bei den μ Versuchen das Ereigniss E, m mal und das Ereigniss F, n mal stattfindet, ohne dass F den letzten Rang einnimmt, damit dieser Fall nicht auf einen der frühern zurückkommt, und seine Wahrscheinlichkeit wird ausgedrückt durch:

$$\frac{m.m+1.m+2.....m+n-1}{1.2.3...n}p^m q^n.$$

Da diese $n+1$ Fälle von einander verschieden sind und alle verschiedenen Arten, auf welche das Ereigniss G stattfinden kann, darbieten, so wird die vollständige Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fälle ausgedrückt (§. 10.), und man hat:

$$\left.\begin{array}{l} P=p^m\Big[1+mq+\frac{m.m+1}{1.2}q^2+\frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}q^3+\ldots \\ \qquad\ldots+\frac{m.m+1.m+2...m+n-1}{1.2.3...n}q^n\Big], \end{array}\right\}\quad(9)$$

welcher Ausdruck mit der Formel (8) übereinstimmen muss, aber den Vorzug hat, dass er sich leicht in bestimmte Integrale verwandeln lässt, deren Zahlenwerthe nach der Methode in §. 67. mit desto größerer Annäherung bestimmt werden können, je größer die Zahlen m und n sind.

§. 74. Zur Verrichtung dieser Transformation bemerken wir, dass, wenn man $n+1$ mal hinter einander integrirt und mit C eine willkürliche Constante bezeichnet:

$$\mu\int\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}}=C-\frac{x^n}{(1+x)^\mu}$$
$$-\frac{n}{\mu-1}\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{\mu-1}}-\frac{n.n-1}{\mu-1.\mu-2}\frac{x^{n-2}}{(1+x)^{\mu-2}}\ldots.$$
$$-\frac{n.n-1.n-2...2.1}{\mu-1.\mu-2.\mu-3...\mu-n+1.\mu-n}\frac{1}{(1+x)^{\mu-n}}$$

ist. Da $\mu > n$ ist, so verschwinden alle Glieder dieser Formel mit Ausnahme von C, wenn $x = \infty$ ist. Bezeichnet man also mit α eine beliebige positive Größe, welche auch Null sein kann, so ergibt sich:

$$\mu \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^n\,dx}{(1+x)^{\mu+1}} = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{\mu}}$$

$$+ \frac{n}{\mu-1} \frac{\alpha^{n-1}}{(1+\alpha)^{\mu-1}} + \frac{n.n-1}{\mu-1.\mu-2} \frac{\alpha^{n-2}}{(1+\alpha)^{\mu-2}} \ldots$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2\ldots2.1}{\mu-1.\mu-2.\mu-3\ldots\mu-n+1.\mu-n} \frac{1}{(1+\alpha)^{\mu-n}}.$$

Für $\alpha = 0$ reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\mu \int_{0}^{\infty} \frac{x^n\,dx}{(1+x)^{\mu+1}} = \frac{n.n-1.n-2\ldots2.1}{\mu-1.\mu-2.\mu-3\ldots\mu-n+1.\mu-n},$$

und wenn man die vorhergehende Gleichung durch diese letzte dividirt und der Kürze wegen:

$$\frac{x^n}{(1+x)^{\mu+1}} = X$$

setzt; so erhält man leicht:

$$\frac{\int_{\alpha}^{\infty} X\,dx}{\int_{0}^{\infty} X\,dx} = \frac{1}{(1+\alpha)^m} \left[1 + m \frac{\alpha}{1+2} + \frac{m.m+1}{1.2} \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{m.m+1.m+2\ldots m+n-1}{1.2.3\ldots n} \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^n} \right].$$

Wenn man nun:

$$\alpha = \frac{q}{p}$$

setzt, und bemerkt, daß $p + q = 1$ ist, so stimmt der zweite Theil dieser letzten Gleichung mit der Formel (9) überein, und für diesen Werth von α hat man folglich:

$$P=\frac{\int_\alpha^\infty X\,dx}{\int_0^\infty X\,dx} \qquad (10)$$

Für $n=0$ und $m=\mu$ ist P die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E wenigstens μ mal, d. h. bei allen Versuchen, stattfindet. Folglich muss $P=p^\mu$ sein, und in der That hat man für $n=0$:

$$\int_\alpha^\infty X\,dx=\frac{1}{\mu(1+\alpha)^\mu}=\frac{1}{\mu}\,p^\mu,$$

folglich:

$$\int_0^\infty X\,dx=\frac{1}{\mu} \text{ und } P=p^\mu.$$

Für $n=\mu-1$ und $m=1$ ist P die Wahrscheinlichkeit, dass E wenigstens einmal oder F nicht bei allen Versuchen stattfindet. Es muss also:

$$P=1-q^\mu$$

sein, was sich ebenfalls nachweisen lässt. Zu dem Zwecke wollen wir:

$$x=\frac{1}{y},\ dx=-\frac{dy}{y^2},\ \alpha=\frac{1}{\beta}$$

setzen, so folgt für $n=\mu-1$:

$$\int_\alpha^\infty X\,dx=\int_0^\beta\frac{dy}{(1+y)^{\mu+1}}=\frac{1}{\mu}\left[1-\frac{1}{(1+\beta)^\mu}\right],$$

$$\int_0^\infty X\,dx=\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y)^{\mu+1}}=\frac{1}{\mu},$$

und wegen

$$\beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{p}{q},\ \frac{1}{1+\beta}=q$$

fällt die Formel (10) mit dem vorhergehenden Werthe von P zusammen.

§. 75. Wir wollen die Methode in §. 67. zuerst auf das Integral $\int_0^\infty X\,dx$ anwenden. Wenn man, wie in diesem §. mit h den Werth von x bezeichnet, welcher dem Maximum von X entspricht

und mit H den zugehörigen Werth von X; so ist die zur Bestimmung von h dienende Gleichung $\frac{dX}{dx}=0$ folgende:

$$n(1+h)-(\mu+1)h=0,$$

woraus sich ergibt:

$$h=\frac{1}{m+1},\ H=\frac{n^n(m+1)^{m+1}}{(\mu+1)^{\mu+1}}.$$

Wenn man in den Gleichungen (2):

$$H=\frac{h^n}{(1+h)^{\mu+1}}$$

und nach verrichteten Differenzirungen in Beziehung auf h für diese Größe ihren vorhergehenden Werth setzt, so ergibt sich:

$$h'=\sqrt{\frac{2(\mu+1)n}{(m+1)^3}},$$

$$h''=\frac{2(\mu+1+n)}{3(m+1)^2},$$

etc.

und wenn m, n, μ sehr große Zahlen von derselben Größenordnung sind; so ist leicht einzusehen, dass diese Werthe der Größen h', h'', h''', *etc.* eine sehr schnell abnehmende Reihe bilden, deren erstes Glied h', zweites h'', drittes h''',... resp von derselben Kleinheitsordnung, als der Bruch $\frac{1}{\sqrt{\mu}}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}}, \ldots$ ist.

Demnach haben wir für den Reihenausdruck des Werthes des gegebenen Integrales:

$$\int_0^\infty X\,dx = H\sqrt{\pi}\left(h'+\frac{1.3}{2}h'''+\frac{1.3.5}{4}h^{v}\ etc.\right). \quad (11)$$

§. 76. Der Ausdruck des andern in der Formel (10) vorkommenden Integrales $\int_\alpha^\infty X\,dx$ ist verschieden, je nachdem $\alpha>h$, oder $\alpha<h$ ist, wo h wieder den Werth von x bezeichnet, welcher dem Maximum von X entspricht. Denn die bei der Transformation in §. 67. mit t bezeichnete Veränderliche muss für alle größern Werthe

von x, als h positiv und für alle kleinern Werthe von x, als h negativ sein. Wenn man nun die Werthe, von t und X, welche $x=\alpha$ entsprechen, mit θ und A bezeichnet, so hat man:

$$A=\frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{\mu+1}},\quad A=He^{-\theta^2}.$$

Wegen $\alpha=\frac{q}{p}$ und mit Berücksichtigung des vorhergehenden Werthes von H ergibt sich:

$$e^{-\theta^2}=\left[\frac{q(\mu+1)}{n}\right]^n\left[\frac{p(\mu+1)}{m+1}\right]^{m+1},$$

woraus $\theta=\pm k$ folgt, wenn man der Kürze wegen:

$$k^2=n\log\frac{n}{q(\mu+1)}+(m+1)\log\frac{m+1}{p(\mu+1)} \qquad (12)$$

setzt. Wenn man k als eine positive Größe betrachtet, so muss man folglich $\theta=k$ nehmen, wenn $\frac{q}{p}>h$ ist, und $\theta=-k$, wenn $\frac{q}{p}<h$ ist. Nach der Transformation in dem angeführten §. haben wir folglich im ersten Falle:

$$\int_\alpha^\infty X\,dx=H\int_k^\infty e^{-t^2}\frac{dx'}{dt}\,dt,$$

und im zweiten:

$$\int_\alpha^\infty X\,dx=H\int_{-k}^\infty e^{-t^2}\frac{dx'}{dt}\,dt$$

$$=H\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\frac{dx'}{dt}\,dt-H\int_{-\infty}^{-k}e^{-t^2}\frac{dx'}{dt}\,dt,$$

wenn wir, wie in §. 67:

$$\frac{dx'}{dt}=h'+2h''t+3h'''t^2+\text{etc.}$$

setzen. Ueberdies ist:

$$\int_{-\infty}^{-k}e^{-t^2}t^{2i+1}\,dt=-\int_k^\infty e^{-t^2}t^{2i+1}\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{-k}e^{-t^2}t^{2i}\,dt=\int_k^\infty e^{-t^2}t^{2i}\,dt$$

wo i eine ganze positive Zahl ist, die auch Null sein kann. Wenn man also allgemein:

$$\int_k^\infty e^{-t^2} t^{2i} dt = K_i, \int_k^\infty e^{-t^2} t^{2i+1} dt = K'_i$$

setzt, und bemerkt, daß $H \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dx'}{dt} dt$ der Ausdruck von $\int_0^\infty X dx$ ist, so erhält man für $\frac{q}{p} > h$:

$$\left.\begin{aligned} \int_\alpha^\infty X dx = & H(h' K_0 + 3 h''' K_1 + 5 h^{V} K_2 + etc.) \\ & + H(2 h'' K'_0 + 4 h^{IV} K'_1 + 6 h^{VI} K'_2 + etc.) \end{aligned}\right\} (13)$$

und für $\frac{q}{p} < h$:

$$\left.\begin{aligned} \int_\alpha^\infty X dx = \int_0^\infty X dx - & H(h' K_0 + 3 h''' K_1 + 5 h^{V} K_2 + etc.) \\ & + H(2 h'' K'_0 + 4 h^{IV} K'_1 + 6 h^{VI} K'_2 + etc.). \end{aligned}\right\} (14)$$

Jede der in diesen Formeln vorkommenden Reihen hat im Allgemeinen denselben Grad von Convergenz, als die Reihe (11). Die Werthe der mit K_i bezeichneten Integrale lassen sich nur näherungsweise erhalten, wenn k von 0 verschieden ist. Die mit K'_i bezeichneten Integrale dagegen lassen sich immer unter endlicher Form ausdrücken, und man hat:

$$K'_i = \tfrac{1}{2} e^{-k^2} (k^{2i} + i . k^{2i-2} + i . \overline{i-1}\, k^{2i-4} + \ldots \\ + i . \overline{i-1} \ldots 2 k^2 + i . \overline{i-1} \ldots 2 . 1).$$

Wenn $\alpha = h$ ist, so müssen die Formeln (13) und (14) übereinstimmen. Denn es ist zu gleicher Zeit:

$$\frac{q}{p} = \frac{n}{m+1}, \; q = \frac{n}{\mu+1}, \; p = \frac{m+1}{\mu+1},$$

welches den aus der Gleichung (12) gezogenen Werth von k auf Null reducirt. Hieraus folgt:

$$K_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} K_i = 1 . 3 . 5 \ldots 2i - 1 . \frac{\sqrt{\pi}}{2^{i+1}},$$

$$K' = \tfrac{1}{2}, \; K_i = 1 . 2 . 3 \ldots i . \tfrac{1}{2}$$

und nach der Gleichung (11) reduciren sich die Formeln (13) und (14) beide auf:

$$\int_\alpha^\infty X dx = \frac{H\sqrt{\pi}}{2}\left(h' + \frac{1.3}{2} h''' + \frac{1.3.5}{4} h^{V} + etc.\right)$$
$$+ H(h'' + 1.2.h^{IV} + 1.2.3.h^{VI} + etc.).$$

§. 77. Wir wollen nun die Zahlen m, n, μ so groß annehmen, dass man in diesen verschiedenen Formeln die Glieder mit h''', h^{IV}, etc. unberücksichtigt lassen kann. Nach den weiter oben angegebenen Werthen von h', h'' ist:

$$\frac{h''}{h'} = \frac{(\mu+1+n)\sqrt{2}}{3\sqrt{n(m+1)(\mu+1)}},$$

und vermöge der Gleichung (10) und der Formeln (11), (13), (14) haben wir:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{(\mu+n)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi\mu m n}}\,e^{-k^2}, \\ P &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{(\mu+n)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi\mu m n}}\,e^{-k^2}, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

wo der erste, oder der zweite dieser Werthe von P stattfindet, jenachdem $\frac{q}{p} > h$, oder $\frac{q}{p} < h$ und indem k eine durch die Gleichung (12) gegebene positive Größe ist. In den letzten Gliedern dieser Formeln ist der Einfachheit wegen μ und m statt $\mu+1$ und $m+1$ gesetzt und sie geben die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit P mit einer hinreichenden Genauigkeit.

Wenn μ eine gerade Zahl ist und man $m = n = \frac{1}{2}\mu$, sowie $q > p$ setzt, so hat man:

$$h = \frac{\mu}{\mu+2}, \quad \frac{q}{p} > h.$$

Man muss folglich die erste der Gleichungen (15) anwenden, und diese und die Gleichung (12) verwandeln sich resp. in:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^\infty e^{-t^2}\,dt + \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\,e^{-k^2},$$

$$k^2 = \frac{\mu}{2}\log\frac{\mu}{2q(\mu+1)} + \frac{\mu+2}{2}\log\frac{\mu+2}{2p(\mu+1)},$$

und P drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daß in einer sehr großen geraden Anzahl von Versuchen das wahrscheinlichste Ereigniß F dennoch nicht öfterer stattfindet, als das entgegengesetzte Ereigniß E. Wenn man die Wahrscheinlichkeit, daß sie beide dieselbe Anzahl von Malen stattfinden, mit U bezeichnet, so ist $P-U$ die Wahrscheinlichkeit, daß F nicht so oft, als E stattfindet. In dem Falle, wo $p=q=\frac{1}{2}$ ist, drückt $P-U$ offenbar auch die Wahrscheinlichkeit aus, daß E nicht so oft stattfindet, als F. Wenn man also das Doppelte von $P-U$ zu der Wahrscheinlichkeit U addirt, so erhält man die Gewißheit, oder mit andern Worten, es ist $2P-U=1$, woraus folgt:

$$U=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_k^\infty e^{-t^2}\,dt-1+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\mu}}e^{-k^2},$$

was sich in der That auch leicht nachweisen läßt.

Durch Verwandlung in Reihen erhält man:

$$\mu\log\frac{\mu}{\mu+1}=-\mu\log\left(1+\frac{1}{\mu}\right)=-1+\frac{1}{2\mu}-etc.$$

$$(\mu+2)\log\frac{\mu}{\mu+1}=-(\mu+2)\log\left(1-\frac{1}{\mu+2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2(\mu+2)}+etc.,$$

und folglich:

$$k^2=\frac{1}{4\mu}+\frac{1}{4(\mu+2)}+etc.$$

Behalten wir also blos die Glieder von derselben Kleinheitsordnung, als der Bruch $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ bei, so haben wir:

$$k=\frac{1}{\sqrt{2\mu}},\ e^{-k^2}=1.$$

Zu gleicher Zeit ist:

$$\int_k^\infty e^{-t^2}\,dt=\int_0^\infty e^{-t^2}dt-\int_0^k e^{-t^2}\,dt=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}-\frac{1}{\sqrt{2\mu}},$$

und folglich reducirt sich der vorhergehende Werth von U auf:

$$U=\frac{\sqrt{2}}{\mu\pi},$$

welcher Werth wirklich mit dem für $m = n$ und $p = q$ aus der Formel (6) abgeleiteten übereinstimmt.

Wenn μ eine ungerade Zahl ist, $m = \frac{1}{2}(\mu - 1)$ und wieder $q > p$ gesetzt wird, so hat man auch $\frac{q}{p} > h$, und die erste der Formeln (15) und die Gleichung (12) verwandeln sich resp. in:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-t^2} dt + \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}} e^{-k^2},$$

$$k^2 = \frac{\mu - 1}{2} \log \frac{\mu - 1}{2q(\mu + 1)} + \frac{\mu + 3}{2} \log \frac{\mu + 3}{2q(\mu + 1)},$$

und P ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen das wahrscheinlichste Ereigniss dennoch nicht so oft stattfindet, als das entgegengesetzte. Denn da μ eine ungerade Zahl ist, so können die Ereignisse E und F nicht gleich viel Male stattfinden. Für $p = q = \frac{1}{2}$ muss diese Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{2}$ sein, was wir auch sogleich nachweisen wollen.

Es ist:

$$(\mu - 1) \log \frac{\mu - 1}{\mu + 1} = -(\mu - 1) \log \left(1 + \frac{2}{\mu - 1}\right)$$

$$= -2 + \frac{2}{\mu - 1} - etc.,$$

$$(\mu + 3) \log \frac{\mu + 3}{\mu + 1} = -(\mu + 3) \log \left(1 - \frac{2}{\mu + 3}\right)$$

$$= 2 + \frac{2}{\mu + 3} + etc.$$

und folglich:

$$k^2 = \frac{1}{\mu - 1} + \frac{1}{\mu + 3} + etc.,$$

und wenn man, wie weiter oben, das Glied von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\mu}$ vernachlässigt; so ergibt sich:

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\mu},\ e^{-k^2} = 1,\ \int_k^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{\mu},$$

wodurch der vorhergehende Werth von P auf $\frac{1}{2}$ reducirt wird.

§. 78. Wir wollen nun annehmen, daſſ die Zahl m von dem Producte $(\mu+1)q$ um eine positive oder negative, aber gegen dieses Product sehr kleine Größe ϱ verschieden sei, so ist wegen $p+q=1$ und $m+n=\mu$ zu gleicher Zeit:

$$n=(\mu+1)q-\varrho, \quad m+1=(\mu+1)p+\varrho.$$

Der correspondirende Werth von h ist:

$$h=\frac{(\mu+1)q-\varrho}{(\mu+1)p+\varrho},$$

und folglich kleiner, als $\frac{q}{p}$, wenn man ϱ zuerst als eine positive Größe betrachtet. Entwickelt man den zweiten Theil der Gleichung (12) nach den Potenzen von ϱ, so findet man:

$$k^2=\frac{\varrho^2}{2(\mu+1)pq}\left[1+\frac{(p-q)\varrho}{3(\mu+1)pq}+etc.\right],$$

und wenn man, indem r eine positive Größe ist:

$$\varrho=r\sqrt{2(\mu+1)pq}$$

setzt, so ergibt sich:

$$k=r\left[1+\frac{(p-q)r}{3\sqrt{2(\mu+1)pq}}+etc.\right].$$

Wenn man den Fall ausnimmt, wo einer der beiden Brüche p und q sehr klein ist, so ist die zwischen den Parenthesen stehende Reihe sehr convergent, weil sie nach den Potenzen von $\frac{r}{\sqrt{\mu+1}}$ oder $\frac{\varrho}{\mu+1}$ fortschreitet. Behält man blos die beiden ersten Glieder bei und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{(p-q)r^2}{3\sqrt{2(\mu+1)pq}}=\delta,$$

so hat man $k=r+\delta$.

Zu gleicher Zeit hat man:

$$n=(\mu+1)q-r\sqrt{2(\mu+1)pq}.$$

Aber in dem zweiten Gliede der ersten der Formeln (15) braucht man nur $k=r$ und resp. $p\mu$, $q\mu$ statt m, n zu setzen, und sie verwandelt sich alsdann in:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{r+\delta}^{\infty} e^{-t^2}\, dt + \frac{(1+q)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi \mu p q}} e^{-r^2}.$$

Betrachten wir nun ϱ als eine negative Größe, in welchem Falle $h > \frac{q}{p}$ ist. Wenn r' eine positive Größe bezeichnet und $-r'\sqrt{2(\mu+1)pq}$ für den Werth von ϱ genommen wird, so ist der Werth von n:

$$n = (\mu+1)q + r'\sqrt{2(\mu+1)pq};$$

da aber der aus der Gleichung (12) gezogene Werth von k immer positiv sein muss, so ist $k = r' - \delta'$, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{(p-q)\,r'^2}{3\sqrt{2(\mu+1)pq}} = \delta'$$

setzt, und die zweite der Formeln (15), welche man anwenden muss verwandelt sich in:

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{r'-\delta'}^{\infty} e^{-t^2}\, dt + \frac{(1+q)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi \mu p q}} e^{-r'^2}.$$

Wenn man diesen von dem vorhergehenden Werthe von P abzieht und den Unterschied R nennt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} R = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{r+\delta}^{\infty} e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{r'-\delta'}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \\ + \frac{(1+q)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi \mu p q}} \left(e^{-r'^2} - e^{-r^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

und nach der Bedeutung dieser beiden Wahrscheinlichkeiten P ist leicht einzusehen, dass R die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Ereigniss F in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen eine Anzahl von Malen stattfindet, welche den zweiten Werth von n nicht und den ersten wenigstens um eine Einheit überschreitet.

§. 79. Zur Vereinfachung dieses Resultates sei N die größte in μq enthaltene ganze Zahl, f der Ueberschuss von μq über N und durch u wollen wir eine Größe von solcher Beschaffenheit bezeichnen, dass $u\sqrt{2(\mu+1)pq}$ eine gegen N sehr kleine ganze Zahl ist, und dann

$$q + f - r\sqrt{2(\mu+1)pq} = -u\sqrt{2(\mu+1)pq} - 1,$$
$$q + f + r'\sqrt{2(\mu+1)pq} = u\sqrt{2(\mu+1)pq}$$

setzen. Die Grenzen der Werthe von n, auf welche sich die Wahrscheinlichkeit R bezieht, werden:

$$n = N - u\sqrt{2(\mu+1)pq} - 1,$$
$$n = N + u\sqrt{2(\mu+1)pq},$$

und folglich drückt die Formel (16) alsdann die Wahrscheinlichkeit aus, daß n diese erste Grenze wenigstens um eine Einheit, aber die zweite nicht überschreitet, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß diese Zahl zwischen den Grenzen:

$$N \mp u\sqrt{2\mu pq}$$

liegt, welche gleichweit von N entfernt sind, und worin μ statt $\mu+1$ gesetzt ist, oder einer derselben gleich ist.

Nach den eben angesetzten Gleichungen und den Ausdrücken von δ und δ' hat man:

$$r + \delta = u + \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2(\mu+1)pq}}, \quad r' - \delta' = u - \varepsilon,$$

wo ε eine Größe von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ist. Bezeichnet man nun mit v irgend eine Größe dieser Ordnung, deren Quadrat vernachlässigt wird, so hat man:

$$\int_{u+v}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_{u}^{\infty} e^{-t^2}\,dt - v e^{-u^2}.$$

Wenn man also diese Gleichung auf die beiden in der Formel (16) vorkommenden Integrale anwendet und in den unter dem Integrationszeichen $\int$ stehenden, bereits durch $\sqrt{\mu}$ dividirten Gliedern $r' = r$ setzt; so ergibt sich:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-u^2}, \qquad (17)$$

wo in dem letzten Gliede ebenfalls μ statt $\mu+1$ gesetzt ist.

Wenn das Intervall der Werthe der Zahl n, deren Wahrscheinlichkeit R ist, seine untere Grenze nicht mit in sich begreifen sollte, so hätte man den kleinsten der beiden vorhergehenden Werthe von n um eine Einheit vermehren müssen, wodurch das letzte Glied $\frac{1}{\sqrt{2(\mu+1)pq}}$ des Werthes von $r+\delta$ und folglich das letzte Glied der Formel (17)

verschwunden wäre. Desgleichen, wenn dieses Intervall seine obere Grenze nicht mit in sich begreifen sollte, so hätte man den größten der beiden Werthe von n um eine Einheit vermindern müssen, wodurch der Werth von $r'-\delta'$ um $\frac{1}{\sqrt{2(\mu+1)pq}}$ vermindert und das letzte Glied der Formel (17) wieder verschwunden wäre. Endlich müsste man das Zeichen dieses Gliedes verändern, wenn das betrachtete Intervall der Werthe von n weder die eine, noch die andere seiner beiden Grenzen enthalten sollte. Hieraus folgt, dass das letzte Glied der Formel (17) die Wahrscheinichkeit sein muss, dass genau:

$$n = N + u\sqrt{2\mu pq}$$

ist, wo u eine positive oder negative Größe von solcher Beschaffenheit ist, dass das zweite Glied von n gegen das erste sehr klein ist, was auch aus der Formel (6) folgt. Denn wenn man die Größen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\mu}$ vernachlässigt, so hat man:

$$\frac{n}{\mu} = q + u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}, \quad \frac{m}{\mu} = p - u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}},$$

woraus folgt:

$$log\left(\frac{\mu q}{n}\right)^n \left(\frac{\mu p}{\mu}\right)^m = -n\,log\left(1+\frac{\mu}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)$$
$$-m\,log\left(1-\frac{u}{p}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$log\left(\frac{\mu q}{n}\right)^n \left(\frac{\mu p}{m}\right)^m = -\mu q\,log\left(1+\frac{u}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)$$
$$-\mu p\,log\left(1-\frac{u}{p}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)$$
$$-u\sqrt{2\mu pq}\left[log\left(1+\frac{u}{q}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)\right.$$
$$\left.-log\left(1-\frac{u}{p}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\right)\right].$$

Entwickelt man nun diese Logarithmen und lässt wieder die Glie-

der von der Kleinheitordnung von $\frac{1}{\mu}$ hinweg, so findet man $-u^2$ für den Werth des zweiten Theiles dieser Gleichung, und folglich hat man:

$$\left(\frac{\mu q}{n}\right)^n \left(\frac{\mu p}{m}\right)^m = e^{-u^2}$$

und da man nach den vorhergehenden Gleichungen auch:

$$\frac{mn}{\mu} = \mu p q$$

hat; so verwandelt sich die Formel (6) in:

$$U = \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}},$$

was bewiesen werden sollte.

Da der erste Werth von P im vorhergehenden §. die Wahrscheinlichkeit ist, daſſ die Zahl n die Grenze $\mu q - r\sqrt{2\mu p q}$, worin wir μ statt $\mu + 1$ gesetzt haben, nicht überschreitet, so folgt, daſſ, wenn man in dem Werthe von U, $u = r$ setzt, und denselben dann von dem Werthe von P abzieht, die Differenz $P - U$ die Wahrscheinlichkeit ist, daſſ die Zahl n diese Grenze nicht erreicht. Desgleichen, wenn man in dem Werthe von U, $u = r'$ setzt, und denselben dann von dem zweiten Werthe von P im vorhergehenden §. abzieht; so ist die Differenz $P - U$ die Wahrscheinlichkeit, daſſ die Zahl n die Grenze $\mu q + r'\sqrt{2\mu p q}$ nicht erreicht. Bezeichnet man diese Differenzen mit Q und Q', so findet man:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{r+\delta}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{q-p}{3\sqrt{2\pi\mu p q}}\,e^{-r^2}, \\ Q' &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{r'-\delta'}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{q-p}{3\sqrt{2\pi\mu p q}}\,e^{-r'^2} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Man muſſ sich erinnern, daſſ in diesen Formeln die Größen r und r' positiv und gegen $\sqrt{\mu}$ sehr klein sind, so daſſ die Grenzen von n, worauf sich diese Wahrscheinlichkeiten Q und Q' beziehen, sehr wenig von dem Producte μq verschieden sind, und zwar die eine etwas größer und die andere etwas kleiner. Auch sind die Werthe der Größen δ δ', welche sie enthalten, gegen r und r' sehr klein, und wenn man darin μ statt $\mu + 1$ setzt, so erhält man:

$$\delta = \frac{(p-q)r^2}{3\sqrt{2\mu pq}}, \quad \delta' = \frac{(p-q)r'^2}{3\sqrt{2\mu pq}}.$$

§. 80. Wenn man die Grenzen von n, auf welche sich die Formel (17) bezieht, durch μ dividirt, und den Werth von U berücksichtigt, so erhält man $q - \frac{f}{\mu} \mp \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ für die Grenzen des Verhältnisses $\frac{n}{\mu}$, wovon die Wahrscheinlichkeit R ist. Wenn man also den Bruch $\frac{f}{\mu}$ vernachlässigt, so folgt, daß diese durch die Formel (13) bestimmte Größe R die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Differenz $\frac{n}{\mu} - q$ zwischen den beiden Grenzen:

$$\mp u \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$$

liegt, welche, wenn man ihre Zeichen verwandelt, auch mit derselben Wahrscheinlichkeit die der Differenz $\frac{m}{\mu} - p$ sind, weil die Summe $\frac{m+n}{\mu} - p - q$ dieser beiden Differenzen gleich Null ist.

Man kann u immer groß genug nehmen, daß die Wahrscheinlichkeit R beliebig wenig von der Gewißheit verschieden ist. Es ist sogar nicht einmal nöthig, für u einen sehr großen Werth zu nehmen, um die Differenz $1 - R$ sehr klein zu machen, sondern es ist z. B. hinreichend, $u = 4$ oder $= 5$ zu nehmen, damit die Exponentialgröße e^{-u^2}, das Integral $\int_u^\infty e^{-t^2} dt$ und folglich der Werth von $1 - R$ fast verschwinden. Wenn die Größe u einen solchen Werth erhalten hat und dann constant bleibt, so ziehen sich die Grenzen der Differenz $\frac{m}{\mu} - p$ desto mehr zusammen, je mehr die schon als sehr groß vorausgesetzte Zahl μ noch fernerweit zunimmt. Das Verhältniß $\frac{m}{\mu}$ der Zahl m, welche ausdrückt, wie vielmal das Ereigniß E stattfindet, zu der Gesammtzahl μ der Versuche, differirt also immer weniger von der Wahrscheinlichkeit p dieses Ereignisses, und man kann die Anzahl μ der Versuche immer hinreichend vervielfältigen, damit die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz $\frac{m}{\mu} - p$ beliebig klein wird, $= R$ ist. Umgekehrt, wenn man die Zahl μ fortwährend vergrößert und man nimmt für

jede der vorhergehenden Grenzen eine constante und gegebene Größe l, d. h. wenn man u in demselben Verhältnisse, als $\sqrt{\mu}$ wachsen lässt; so nähert sich der Werth von R ohne Ende der Einheit, so dass man die Anzahl μ der Versuche immer hinreichend vergrößern kann, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz $\frac{m}{\mu}-p$ zwischen die gegebenen Grenzen $\pm l$ fällt, beliebig wenig von der Gewissheit verschieden ist. Hierin besteht der in §. 49. ausgesprochene Lehrsatz von Jacob Bernoulli.

§. 81. In der vorhergehenden Rechnung haben wir den Fall ausgeschlossen, wo die eine der beiden Wahrscheinlichkeiten p und q sehr klein ist (§. 78.), und wir müssen daher diesen Fall besonders betrachten.

Wir wollen annehmen, dass q ein sehr kleiner Bruch sei, oder dass das Ereigniss F eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit habe, so ist bei einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen das Verhältniss $\frac{n}{\mu}$ der Anzahl n der Fälle, worin das Ereigniss F stattfindet, zu der Gesammtzahl μ der Versuche ebenfalls ein sehr kleiner Bruch. Setzt man in der Formel (9), $\mu-n$ für m,

$$q\mu=\omega,\ q=\frac{\omega}{\mu}$$

und vernachlässigt dann den Bruch $\frac{n}{\mu}$; so verwandelt sich die in dieser Formel zwischen den Klammern stehende Größe in:

$$1+\omega+\frac{\omega^2}{2.2}+\frac{\omega^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n},$$

und zu gleicher Zeit hat man:

$$p=1-\frac{\omega}{\mu},\ p^m=\left(1-\frac{\omega}{\mu}\right)^{\mu}\left(1-\frac{\omega}{\mu}\right)^{-n}.$$

Für den ersten Factor dieses Werthes von p^m kann man die Exponentialgröße $e^{-\omega}$ setzen und den zweiten auf die Einheit reduciren. Folglich haben wir nach der Gleichung (9) sehr nahe:

$$P=\left(1+\omega+\frac{\omega^2}{1.2}+\frac{\omega^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n}\right)e^{-\omega}$$

als die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit bei jedem Versuche der sehr kleine Bruch $\frac{\omega}{\mu}$ ist, nicht mehr, als n mal in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen stattfindet.

Für $n = o$ reducirt sich dieser Werth von P auf $e^{-\omega}$. Folglich drückt $e^{-\omega}$ die Wahrscheinlichkeit aus, dass das in Rede stehende Ereigniss bei μ Versuchen nicht ein einziges Mal stattfindet, und mithin ist $1 - e^{-\omega}$ die Wahrscheinlichkeit, dass es wenigstens einmal stattfindet, was mit dem in §. 8. Gesagten übereinstimmt. Sobald n nicht mehr eine sehr kleine Zahl ist, ist der Werth von P sehr wenig von der Einheit verschieden, was erhellet, wenn man bemerkt, dass der vorhergehende Ausdruck von P auf die Form:

$$P = 1 - \frac{\omega^{n+1} e^{-\omega}}{1.2.3\ldots n+1}\left(+\frac{\omega}{n+2} + \frac{\omega^2}{n+2.n+3} + etc.\right)$$

gebracht werden kann. Wenn man z. B. $\omega = 1$ und $n = 10$ setzt, so beträgt die Differenz $1 - P$ ungefähr ein Hundertmilliontel, so dass es fast gewiss ist, dass ein Ereigniss, dessen sehr kleine Wahrscheinlichkeit bei jedem Versuche $\frac{1}{\mu}$ ist, in den μ Versuchen nicht mehr, als 10 mal stattfindet.

§. 82. Das in der Formel (17) vorkommende Integral wird im Allgemeinen nach der Methode der Quadraturen berechnet. Am Ende der Analyse des réfractions astronomiques von **Kramp** findet man eine Tafel seiner Werthe, welche sich von $u = 0$ bis $u = 3$ erstreckt und wornach man:

$$\int_u^\infty e^{-t^2}\, dt = 0{,}00001957729\ldots$$

für $u = 3$ hat. Vermittelst der partiellen Integration findet man:

$$\int_u^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{e^{-u^2}}{2u}\left(1 - \frac{1}{2u^2} + \frac{1.3}{2^2 u^4} - \frac{1.3.5}{2^3 u^6} + etc.\right).$$

Für $u > 3$ ist die zwischen den Klammern stehende Reihe hinreichend convergent, wenigstens in ihren ersten Gliedern, und diese Formel kann zur Berechnung der Werthe des Integrales dienen. Auch hat man:

$$\int_u^\infty e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^u e^{-t^2}\, dt,$$

und wenn man die Exponentialgröße e^{-t^2} nach den Potenzen von t^2 entwickelt, so erhält man die Reihe:

$$\int_0^u e^{-t^2}\, dt = u - \frac{u^3}{1.3} + \frac{u^5}{1.2.5} - \frac{u^7}{1.2.3.7} + etc.,$$

welche für kleinere Werthe von u, als die Einheit sehr convergent ist.

Wenn man den Werth von u berechnen will, für welchen $R=\frac{1}{2}$ ist, so bedient man sich dieser letztern Reihe, und nach der Gleichung (17) hat man:

$$u-\frac{u_3}{1.3}+\frac{u^5}{1.2.5}-\frac{u^7}{1.2.3.7}+etc.=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}-\frac{e^{-u^2}}{2\sqrt{2\mu pq}}.$$

Bezeichnen wir mit a den Werth von u, welcher dieser Gleichung, abgesehen von dem zweiten Gliede ihres zweiten Theiles, Genüge leistet, so haben wir bis auf Größen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\mu}$ genau:

$$u=a-\frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}}.$$

Nach einigen Versuchen findet man den Näherungswerth von $a=0,4765$, woraus folgt, daß es eben so wahrscheinlich ist, daß die Differenz $\frac{m}{\mu}-p$ zwischen die Grenzen:

$$\pm\left(0,4765.\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}-\frac{1}{2\mu}\right)$$

fällt, als nicht.

Für einen beliebigen Werth von u ist R die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz der beiden Größen $\frac{m}{\mu}-p$, $\frac{n}{\mu}-q$ das Doppelte von $\pm n\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ zur Grenze hat. Wenn also $p=q=\frac{1}{2}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Größe $\frac{m-n}{\mu}$ zwischen den Grenzen:

$$\pm\left(\frac{1,6739}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{\mu}\right)$$

liegt, $=\frac{1}{2}$. Wenn also die Ereignisse E und F dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, so ist es gleich wahrscheinlich, daß die Differenz $m-n$ zwischen den Zahlen, welche ausdrücken, wie vielmal jedes Ereigniß stattfindet, ihrem absoluten Werthe nach größer oder kleiner ist, als $0,6739\sqrt{\mu}-1$.

Wenn also zwei Spieler A und B ein gleiches Spiel eine sehr große Anzahl von Malen z. B. eine Million Partien spielen, so kann man 1 gegen 1 wetten, dass einer derselben, ohne anzugeben welcher, 674 Partien mehr gewonnen haben wird, als der andere. In diesem Unterschiede, welcher für beide Spieler gleich günstig sein kann, besteht der Einfluss des Zufalles. Aber wenn bei jeder Partie die Wahrscheinlichkeit p des Gewinnens von A die Wahrscheinlichkeit q des Gewinnens von B übertrifft, so nimmt die Wahrscheinlichkeit R, dass A $\mu(p-q) \mp 2u\sqrt{2\mu p q}$ Partien mehr gewinnt, als B, mit der Zahl μ fortwährend zu, und da das Glied $\mu(p-q)$, welches von der ungleichen Geschicklichkeit beider Spieler herrührt, der Gesammtzahl der gespielten Partien proportional zunimmt, während das mit dem doppelten Zeichen behaftete Glied nur in dem Verhältnisse der Quadratwurzel aus dieser Zahl zunimmt; so folgt, dass der geschickteste Spieler, oder für welchen die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens bei jeder Partie am größesten ist, zuletzt immer mehr Partien gewonnen haben wird, als der andere, wie klein die Differenz $p-q$ auch sein mag.

§. 83. In dem Vorhergehenden haben wir die Wahrscheinlichkeiten p und q der Ereignisse E und F als bekannt vorausgesetzt und die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit und Annäherung bestimmt, wenn die Zahl μ der Versuche sehr groß ist. Umgekehrt, wenn diese Wahrscheinlichkeiten nicht a priori gegeben, aber die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ durch Beobachtung bestimmt sind, so geben die Formeln, welche wir gefunden haben, die sehr wahrscheinlichen und sehr genäherten Werthe der Unbekannten p und q. So gibt z. B. die Formel (17) die Wahrscheinlichkeit R, dass die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses E zwischen den Grenzen $\frac{m}{\mu} \pm u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ liegt. Wenn die Wahrscheinlichkeit R sehr wenig von der Einheit verschieden ist, so sind die Brüche p, q sehr wahrscheinlich resp. fast gleich $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$. Setzt man also $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ für p und q in das Glied dieser Grenzen mit dem doppelten Zeichen und in das letzte Glied der Formel (17), welche $\sqrt{\mu}$ bereits zum Divisor haben; so ergibt sich:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \sqrt{\frac{\mu}{2\pi m n}}\,e^{-u^2}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daſſ die Wahrscheinlichkeit p von E zwischen den Grenzen:

$$\frac{m}{\mu} \pm \frac{u}{\mu} \sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$$

liegt.

Wenn m, n, μ sehr große Zahlen sind, so kann man sich im Allgemeinen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines zukünftigen, aus E und F zusammengesetzten Ereignisses der Näherungswerthe $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ von p und q bedienen, und z. B. die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daſſ die Ereignisse E und F bei $\mu' = m' + n'$ neuen Versuchen resp. m' mal und n' mal stattfinden, wofern μ' gegen μ sehr klein ist, und wenn μ' eine sehr große Zahl ist, so kann man die Formel (17) anwenden, wenn man $\mu', \frac{m}{\mu}, \frac{n}{\mu}$ für μ, p, q in diese Formel und in die Grenzen, worauf sie sich bezieht, setzt. Alsdann hat man:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\mu' mn}} e^{-u^2}, \qquad (20)$$

und sie drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ die Zahl n' zwischen den Grenzen:

$$\frac{\mu' n}{\mu} \mp \frac{u}{\mu} \sqrt{2\mu' mn}$$

liegt, worin $\frac{\mu' n}{\mu}$ für die größte in diesem Verhältnisse enthaltene ganze Zahl gesetzt ist. Wie sehr genähert diese Werthe $\frac{m'}{\mu}$ und $\frac{n'}{\mu}$ von p und q auch sein mögen, so kann man, wie wir im Vorhergehenden (§. 71.) gesehen haben, von denselben doch keinen Gebrauch mehr machen, wenn die Zahl μ' der künftigen Versuche hinsichtlich ihrer Größe mit der Zahl μ vergleichbar ist, weil diese Näherungswerthe nur wahrscheinlich und nicht gewiſſ sind. Aus diesem Grunde wollen wir die aus der Beobachtung abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten p und q der Ereignisse E und F, welche wir dann auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse anwandten, noch auf eine andere Art betrachten.

§. 84. Es wird wieder vorausgesetzt, daſſ das beobachtete Ereigniſſ darin besteht, daſſ in einer sehr großen Anzahl $\mu = m + n$ von Versuchen die Ereignisse E und F resp. m und n mal stattfinden und daſſ sich die Wahrscheinlichkeiten p und q von E und F während der Versuche nicht geändert haben. Nach dem Vorhergehenden findet alsdann eine sehr große Wahrscheinlichkeit statt, daſſ diese unbekannten Wahrscheinlichkeiten sehr wenig von den Verhältnissen $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ verschieden sind, welche man folglich für die Näherungswerthe von p und q nehmen kann. Da diese Wahrscheinlichkeiten unendlich viele um unendlich kleine Größen wachsende Werthe haben können, so ist die Wahrscheinlichkeit eines genauen Werthes von p und des zugehörigen Werthes von q eine unendlich kleine Größe, um deren Bestimmung es sich handelt, wenigstens für jeden der Werthe von p und q, welche sich wenig von $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ entfernen, und welche wir allein zu kennen brauchen.

Da die durch die erste der Formeln (18) bestimmte Größe Q die Wahrscheinlichkeit ist, daſſ die Zahl n kleiner ist, als $\mu q - r\sqrt{2\mu p q}$, so ist sie auch die Wahrscheinlichkeit, daſſ die unbekannte Wahrscheinlichkeit q des bei μ Versuchen n mal stattgehabten Ereignisses F größer, als $\frac{n}{\mu} + r\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ oder größer, als $\frac{n}{\mu} + \frac{r}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$ ist, wenn man in dem zweiten Gliede dieser Grenze für p und q ihre Näherungswerthe $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ setzt. Wenn man in dieser Formel $r - dr$ statt r setzt, und nur die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung beibehält, so drückt $Q - \frac{dQ}{dr}dr$ folglich auch die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ q größer ist, als $\frac{n}{\mu} + \frac{r}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}} - \sqrt{\frac{2mn}{\mu}}.\frac{dr}{\mu}$ Folglich drückt $-\frac{dQ}{dr}dr$ die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit aus, daſſ für alle positiven und gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleinen Werthe von r genau:

$$q = \frac{n}{\mu} + \frac{r}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$$

ist. Ebenso drückt die zweite der Formeln (18) die Wahrscheinlichkeit Q' aus, daſſ die Wahrscheinlichkeit q größer ist, als $\frac{n}{\mu} + \frac{r'}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$.

Setzt man $r'+dr'$ für r', so erhält man folglich $Q'+\frac{dQ'}{dr'}dr'$ für die Wahrscheinlichkeit, daß der Werth von Q größer ist, als $\frac{n}{\mu}-\frac{r'}{\mu}\times\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}-\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}\cdot\frac{dr'}{\mu}$. Folglich ist $\frac{dQ'}{dr'}dr'$ die Wahrscheinlichkeit, daß q größer ist, als die zweite Grenze, aber nicht größer, als die erste, oder daß man genau:

$$q=\frac{n}{\mu}-\frac{r'}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$$

hat, wo r' ebenfalls eine gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine positive Größe ist. Aber nach den bekannten Regeln des Differenzirens unter dem Integralzeichen $\int$ und wenn $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ für p und q in die letzten Glieder der Formeln (18) gesetzt werden, hat man:

$$-\frac{dQ}{dr}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{d.\delta}{dr}\right)e^{-(r+\delta)^2}+\frac{2(n-m)r}{3\sqrt{2\pi\mu mn}}e^{-r^2},$$

$$\frac{dQ'}{dr'}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{d.\delta'}{dr'}\right)e^{-(r'-\delta')^2}+\frac{2(n-m)r'}{3\sqrt{2\pi\mu mn}}e^{-r'^2}.$$

Vermöge der Werthe von δ und δ' und derselben Substitutionen ist auch:

$$\frac{d.\delta}{dr}=\frac{2(m-n)r}{3\sqrt{2\mu mn}},\quad \frac{d.\delta'}{dr'}=\frac{2(m-n)r'}{3\sqrt{2\mu mn}}.$$

Bleibt man ferner, wie im Vorhergehenden, bei den Gliedern von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ stehen und vernachlässigt folglich diejenigen, worin μ als Divisor vorkommt, so hat man:

$$e^{-(r+\delta)^2}=(1-2r\delta)e^{-r^2}=\left[1-\frac{2(m-n)r^3}{3\sqrt{2\mu mn}}\right]e^{-r^2},$$

$$e^{-(r'-\delta')^2}=(1+2r'\delta')e^{-r'^2}=\left[1+\frac{2(m-n)r^3}{3\sqrt{2\mu mn}}\right]e^{-r'^2},$$

und aus diesen verschiedenen Werthen ergibt sich:

$$-\frac{dQ}{dr}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r^2}-\frac{2(m-n)r^3}{3\sqrt{2\pi\mu mn}}e^{-r^2},$$
$$\frac{dQ'}{dr'}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r'^2}+\frac{2(m-n)r'^3}{3\sqrt{2\pi\mu mn}}e^{-r'^2}.$$

Da nun diese beiden Ausdrücke dieselbe Form haben, und sich gegenseitig in einander verwandeln, wenn man r in $-r'$ verwandelt, so folgt, dass, wenn man mit v eine positive oder negative, aber gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Veränderliche bezeichnet und:

$$V=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}-\frac{2(m-n)v^3}{3\sqrt{2\pi\mu mn}}e^{-v^2} \tag{21}$$

setzt, Vdv die Wahrscheinlichkeit des Werthes:

$$q=\frac{n}{\mu}+\frac{v}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$$

ist, und wegen $p=1-q$, $m=\mu-n$ ist diese unendlich kleine Wahrscheinlichkeit zugleich die des Werthes:

$$p=\frac{m}{\mu}-\frac{v}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}.$$

Diese Größe V nimmt, wie wir sehen, sehr schnell ab, je mehr v zunimmt, und ehe diese letzte Veränderliche einen mit $\sqrt{\mu}$ vergleichbaren Werth bekommen hat, kann der Werth von V wegen des Factors e^{-v^2} außerordentlich klein werden. Wenn man auf dieselbe Weise vermittelst dieser Veränderlichen die von $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ sehr verschiedenen Werthe von p und q ausdrückt und mit $V'dv$ ihre Wahrscheinlichkeit bezeichnet; so ist V' eine von V verschiedene Function von v, deren Zahlenwerthe noch weit kleiner sind, als die von V, welche der Grenze entsprechen, bis zu welcher die Formel (21) erstreckt werden kann. Man kann also diese Werthe von V' als ganz unmerklich klein betrachten, und wir brauchen daher den Ausdruck dieser Größe V' als Function von v nicht zu suchen.

Nun sei E' ein aus E und F zusammengesetztes zukünftiges Ereigniss. Die Wahrscheinlichkeit von E', welche stattfände, wenn die Wahrscheinlichkeiten von E und F bestimmte Werthe hätten, wollen wir mit Π bezeichnen, so dass Π eine gegebene Function von p und q ist, und mit Π' wollen wir die wirkliche Wahrscheinlichkeit von E' bezeichnen

indem die Wahrscheinlichkeiten der beliebigen Werthe von p und q, welche in Π substituirt werden, in Betracht gezogen werden. Multiplicirt man Π durch diese unendlich kleine Wahrscheinlichkeit von p und q und integrirt dann das Product von $p=o$ und $q=1$ bis $p=1$ und $q=o$, so erhält man den Ausdruck für Π'. Aber nach dem eben Gesagten kann man den Theil dieses Integrales vernachlässigen, welcher sich auf die beträchtlich von $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ verschiedenen Werthe von p und q bezieht. Wenn man also in Π die vorhergehenden Werthe von p und q setzt, so hat man blos:

$$\Pi' = \int \Pi V dv, \qquad (22)$$

indem man das Integral auf die gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleinen positiven oder negativen Werthe von v erstreckt.

Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches im zweiten §. unserer Abhandlung über das Verhältniss der männlichen und weiblichen Geburten auf eine directere Weise erhalten ist.

§. 85. Um ein Anwendungsbeispiel der Formeln (21) und (22) zu geben, wollen wir annehmen, Π' sei die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse E und F in einer sehr großen Anzahl $\mu' = m' + n'$ neuer Versuche resp. m' und n' mal stattfinden, und dass sich die Zahlen m' und n' sehr nahe wie die Zahlen m und n verhalten, welche ausdrücken, wie viele Male die Ereignisse E und F bei μ bereits angestellten Versuchen stattgefunden haben, oder mit andern Worten die Wahrscheinlichkeit, dass

$$m' = mh - \alpha\sqrt{\mu'},\; n' = nh + \alpha\sqrt{\mu'},\; \mu' = \mu h$$

sein muss, wo h und α gegebene Größen sind, wovon die zweite positiv oder negativ sein kann, aber gegen $\sqrt{\mu'}$ sehr klein ist.

Wenn man:

$$U' = \sqrt{\frac{\mu'}{2\pi m' n'}}$$

setzt, so ist nach der Formel (6):

$$\Pi = U' \left(\frac{\mu' p}{m'}\right)^{m'} \left(\frac{\mu' q}{n'}\right)^{n'},$$

woraus schon erhellet, dass U' die Wahrscheinlichkeit des betrachteten

Ereignisses E' sein würde, wenn $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ die genauen und gewissen Werthe der Wahrscheinlichkeiten p und q der Ereignisse E und F wären und man $\alpha = 0$ hätte.

Wegen

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{m}{\mu} - \frac{\alpha}{\sqrt{\mu'}}, \quad \frac{n'}{\mu'} = \frac{n}{\mu} + \frac{\alpha}{\sqrt{\mu'}},$$

und wenn man:

$$\frac{v}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\mu'}} = v,$$

setzt, können die Werthe von p und q im vorhergehenden §. auf die Form:

$$p = \frac{m'}{\mu'} - v_{,}, \quad q = \frac{n'}{\mu'} + v_{,}$$

gebracht werden, und wenn man sie in den Werth von Π substituirt; so erhält man:

$$\Pi = U'\left(1 - \frac{\mu' v_{,}}{m'}\right)^{m'}\left(1 + \frac{\mu' v_{,}}{n'}\right)^{n'}.$$

Da die Größen $\frac{\mu' v_{,}}{m'}, \frac{\mu' v_{,}}{n'}$ von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{\mu'}}$ sind, so hat man in sehr convergirenden Reihen:

$$log\left(1 - \frac{\mu' v_{,}}{m'}\right) = -\frac{\mu' v_{,}}{m'} - \frac{\mu'^2 v_{,}^2}{2m'^2} - \frac{\mu'^3 v_{,}^3}{3m'^3} - etc.,$$

$$log\left(1 + \frac{\mu' v_{,}}{n'}\right) = \frac{\mu' v'}{n'} - \frac{\mu'^2 v_{,}^2}{2n'^2} + \frac{\mu'^3 v_{,}^3}{3n'^3} - etc.$$

woraus folgt:

$$\left(1 - \frac{\mu' v_{,}}{m'}\right)^{m'} = e^{-\mu' v_{,}} e^{-\frac{\mu'^2 v_{,}^2}{2m'}} e^{-\frac{\mu'^3 v_{,}^3}{3m'^2}} \; etc.,$$

$$\left(1 + \frac{\mu' v_{,}}{n'}\right)^{n'} = e^{\mu' v_{,}} e^{-\frac{\mu'^2 v_{,}^2}{2n'}} e^{\frac{\mu'^3 v_{,}^3}{3n'^2}} \; etc.$$

Aber wegen des Factors U' von Π, welcher schon von der Klein=

heitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu'}}$ ist, kann man die Größen von dieser Ordnung in den beiden andern Factoren vernachlässigen, d. h. alle Exponentialgrößen von der dritten an in jedem dieser beiden Producte auf die Einheit reduciren. Bei diesem Grade von Annäherung hat man also:

$$\Pi = U' e^{-\frac{\mu'^3 v_,^2}{2 m' n'}}.$$

Aus demselben Grunde kann man das zweite Glied der Formel (21) vernachlässigen, wodurch sich die Formel (22) in:

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} U' \int e^{-v^2 - \frac{\mu'^3 v_,^2}{2 m' n'}} dv$$

verwandelt.

Obgleich dieses Integral nur auf solche Werthe von v erstreckt werden muss, welche gegen $\sqrt{\mu}$ sehr klein sind, so kann man es doch, ohne seinen Werth merklich zu verändern, auf Werthe von v ausdehnen, welche mit $\sqrt{\mu}$ vergleichbar sind, und, wie wir es wirklich gethan haben, dasselbe von $v = -\infty$ bis $v = \infty$ erstrecken, weil der Coefficient von dr unter dem Integralzeichen $\int$ für solche Werthe von v ganz unmerklich wird. Setzt man nun mh und nh statt m' und n' in den Werth von $v_,$, so hat man:

$$v^2 + \frac{\mu'^3 v_,^2}{2 m' n'} = v^2 (1 + h) - \frac{2 v \alpha \mu' \sqrt{h}}{\sqrt{2 m' n'}} + \frac{\alpha^2 \mu'^2}{2 m' n'},$$

und wenn man:

$$v \sqrt{1+h} - \frac{\alpha \mu' \sqrt{h}}{\sqrt{2 m' n' (1+h)}} = x,$$

also:

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{1+h}}$$

setzt, so sind die Grenzen der Integration in Beziehung auf die neue Veränderliche x noch $\pm\infty$, und man erhält für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{1+h}} U' e^{-\frac{\alpha^2 \mu'^2}{2 m' n' (1+h)}}. \qquad (23)$$

Für $\alpha = o$ hat man blos:

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{1+h}} U',$$

welches nach dem Werthe von U' mit dem in §. 71. erhaltenen Resultate übereinstimmt.

§. 86. Als ein zweites Anwendungsbeispiel der Formeln (21) und (22) wollen wir annehmen, Π' sei die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz $\frac{n'}{\mu'} - \frac{n}{\mu}$ die Größe $\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}$ nicht überschreitet, welche sie in dem vorhergehenden Beispiele erreichen musste.

Die Größe Π drückt die Wahrscheinlichkeit als Function der Wahrscheinlichkeiten p und q von E und F aus, dass das Ereigniss F bei μ' künftigen Versuchen nicht mehr, als $n' = \left(\frac{n\mu'}{\mu} + \alpha\sqrt{\mu'}\right)$ mal und das Ereigniss E wenigstens $m' = \left(\frac{m\mu'}{\mu} - \alpha\sqrt{\mu},\right)$ mal stattfindet. Der Werth dieser Wahrscheinlichkeit wird also durch die eine, oder die andere der Formeln (15) bestimmt, wenn man darin μ', m', n' statt μ, m, n setzt. Für diese Grenzwerthe von m' und n' hat man:

$$\frac{n'}{m'+1} = \frac{n}{m}\left(1 + \frac{\alpha\mu^2}{mn\sqrt{\mu'}}\right),$$

wenn man wieder bei den Größen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{\mu'}}$ stehen bleibt. Nach den Werthen von p und q im vorhergehenden §. hat man zu gleicher Zeit:

$$\frac{q}{p} = \frac{n}{m}\left(1 + v\sqrt{\frac{2\mu}{mn}}\right).$$

Wenn man also die Veränderliche v so begrenzt, dass, abgesehen vom Zeichen:

$$v < \frac{\alpha\ \mu^2}{\sqrt{2\mu\mu' mn}}$$

ist, so ist $\frac{q}{p} < \frac{n'}{m'+1}$, oder $\frac{q}{p} > \frac{n'}{m'+1}$, jenachdem die Constante α positiv oder negativ ist. Folglich haben wir im ersten Falle vermöge der zweiten der Gleichungen (15):

$$\Pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{2(\mu'+n')}{3\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\,e^{-k^2}$$

und im zweiten Falle vermöge der ersten dieser Gleichungen:

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{2(\mu'+n')}{3\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\,e^{-k^2},$$

wo k eine durch die Gleichung (12) bestimmte positive Größe ist, deren Quadrat:

$$k^2 = n' \log \frac{n'}{q(\mu'+1)} + (m'+1)\log \frac{m'+1}{p(\mu'+1)}$$

ist.

Aus den Grenzwerthen von m' und n' und von p, q, welche in diesen Formeln angewandt werden müssen, ergibt sich:

$$q = \frac{n'}{\mu'+1} - \upsilon',\ p = \frac{m'+1}{\mu'+1} + \upsilon'$$

wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\mu'}} - \frac{\upsilon\sqrt{2mn}}{\mu\sqrt{\mu}} - \frac{n'}{\mu'(\mu'+1)} = \upsilon'$$

setzt. Diese Größe υ' ist von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$; man hat folglich in sehr convergirenden Reihen:

$$\log q = \log \frac{n'}{\mu'+1} - \frac{(\mu'+1)\upsilon'}{n'} - \frac{1}{2}\frac{(m'+1)^2\upsilon'^2}{n'^2}$$
$$- \frac{1}{3}\frac{(\mu'+1)^3\upsilon'^3}{n'^3} - etc.$$

$$\log p = \log \frac{m'+1}{\mu'+1} + \frac{(\mu'+1)\upsilon'}{m'+1} - \frac{1}{2}\frac{(\mu'+1)^2\upsilon'^2}{(m'+1)^2}$$
$$- \frac{1}{3}\frac{(\mu'+1)^3\upsilon'^3}{(m'+1)^3} - etc.,$$

woraus bis zu dem Grade von Annäherung, wobei wir stehen bleiben:

$$k^2 = \frac{\mu'^3\upsilon'^2}{2m'n'} - \frac{(m'-n')\mu'^4\upsilon'^3}{3m'^2n'^2},$$

und folglich:

$$k = \pm k'\left[1 - \frac{2(m'-n')k'}{3\sqrt{2\mu' m' n'}}\right]$$

folgt, wenn man den Werth von v' berücksichtigt und der Kürze wegen:

$$\frac{\alpha\mu'}{\sqrt{2m'n'}} - \frac{v\mu'\sqrt{\mu' m n}}{\mu\sqrt{\mu m' n'}} = k'$$

setzt. Wegen der der Größe v angewiesenen Grenze ist die Größe k' von demselben Zeichen, als α. Soll also der Werth von k positiv sein, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem α eine positive oder negative Größe ist. Das zweite Glied dieses Werthes von k ist auch von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{\mu'}}$, und folglich haben wir:

$$\int_k^\infty e^{-t^2}\,dt = \int_{\pm k'}^\infty e^{-t^2}\,dt \pm \frac{2(m'-n')k'^2}{3\sqrt{2\mu' m' n'}}\,e^{-k'^2}.$$

Zu gleicher Zeit verwandeln sich die vorhergehenden Werthe von Π in:

$$\Pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{k'}^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{2n'}{\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\,e^{-k'^2},$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-k'}^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{2n'}{\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\,e^{-k'^2},$$

und vermöge der Formeln (21) und (22) sind die correspondirenden Werthe von Π':

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-v^2}\,dv - \frac{1}{\pi}\int_{k'}^\infty\int e^{-t^2-v^2}\,dt\,dv$$
$$+ \frac{2n'}{\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\int e^{-k'^2-v^2}\,dv$$
$$- \frac{2(m-n)}{3\sqrt{2\pi\mu m n}}\left(\int e^{-v^2}v^3\,dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{k'}^\infty\int e^{t^2-v^2}\,v^3\,dt\,dv\right),$$

$$\Pi' = \frac{1}{\pi}\int_{-k'}^\infty\int e^{-t^2-v^2}\,dt\,dv + \frac{2n'}{\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\int e^{-k'^2-v^2}\,dv$$
$$- \frac{2(m-n)}{3\pi\sqrt{2\mu m n}}\int_{-k'}^\infty\int e^{-t^2-v^2}\,v^3\,dt.\,dv.$$

Da die Coefficienten von dv unter den Integralzeichen $\int$ wegen der Exponentialgrößen e^{-v^2}, $e^{-t^2-v^2}$, $e^{-k'^2-v^2}$ für Werthe von v, welche außerhalb der dieser Größe angewiesenen Grenze liegen, unmerklich werden, so folgt, daß man die Integrale in Beziehung auf diese Veränderliche ohne merkliche Veränderung ihres Werthes, wie weiter oben, von $v = -\infty$ bis $v = \infty$ erstrecken kann. Ferner sei:

$$\frac{\alpha\mu'}{\sqrt{2m'n'}} = \pm 6, \quad \frac{\mu'\sqrt{\mu' m n}}{\mu\sqrt{\mu m' n'}} = \gamma, \quad t = \theta \mp \gamma v; \text{ also } dt = d\theta,$$

wo 6 eine positive Größe ist, und die obern oder untern Zeichen gelten, jenachdem α eine positive oder negative Größe ist. In dem ersten Ausdrucke von Π', welcher α als positiv voraussetzt, nimmt man folglich:

$$k' = 6 - \gamma v, \quad t = \theta - \gamma v$$

und die Integrationsgrenzen in Beziehung auf die neue Veränderliche θ sind $\theta = 6$ und $\theta = \infty$. In dem zweiten Ausdrucke von Π', welcher sich auf den Fall bezieht, wo α negativ ist, muß man:

$$k' = -6 - \gamma v, \quad t = \theta + \gamma v$$

nehmen, und die Grenzen dieses Integrales sind wieder $\theta = 6$ und $\theta = \infty$. Auf diese Weise erhält man:

$$\Pi' = 1 - \frac{1}{\pi}\int_6^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2+2\gamma\theta v-(1+\gamma^2)v^2}\, d\theta\, dv$$
$$+ \frac{2n'}{\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-6^2+2\gamma 6 v-(1+\gamma^2)v^2}\, dv$$
$$+ \frac{2(m-n)}{3\pi\sqrt{2\mu m n}}\int_6^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2+2\gamma\theta v-(1+\gamma^2)v^2}\, v^3\, d\theta\, dv,$$

$$\Pi' = \frac{1}{\pi}\int_6^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2-2\gamma\theta v-(1+\gamma^2)v^2}\, d\theta\, dv$$
$$+ \frac{2n'}{\sqrt{2\pi\mu' m' n'}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-6^2-2\gamma 6 v-(1+\gamma^2)v^2}\, dv$$
$$\frac{2(m-n)}{3\pi\sqrt{2\mu m n}}\int_6^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2-2\gamma\theta v-(1+\gamma^2)v^2}\, v^3\, d\theta\, dv.$$

Die Integrationen in Beziehung auf v lassen sich leicht verrichten, so daß die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit Π' nur noch ein einfaches Integral in Beziehung auf θ enthält. Wegen:

$$\alpha = \pm \frac{6\sqrt{2m'n'}}{\mu'}$$

ist der erste Werth von Π' die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl n' nicht größer ist, als die Größe $\frac{n\mu'}{\mu} + 6\sqrt{\frac{2m'n'}{\mu'}}$, welche die Größe $\frac{n\mu'}{\mu}$ sehr wenig übertrifft, und der zweite Werth von Π' drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daß die Zahl n' die Größe $\frac{n\mu'}{\mu} - 6\sqrt{\frac{2m'n'}{\mu'}}$, welche etwas kleiner ist, als $\frac{n\mu'}{\mu}$, nicht überschreitet.

§. 87. Bemerken kann man, daß die beiden ersten Integrale wegen der Grenzen $\pm\infty$ in Beziehung auf v in den beiden Werthen von Π' dieselben sind und das dritte bis auf das Zeichen ebenfalls dasselbe ist. Wenn man den Ueberschuß des ersten Werthes über den zweiten mit φ bezeichnet, so hat man folglich:

$$\varphi = 1 - \frac{2}{\pi}\int_6^\infty\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2 + 2\gamma\theta v - (1+\gamma^2)v^2}\, d\theta\, dv,$$

und diese Größe φ ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl n' die Größe $\frac{n\mu'}{\mu} - 6\sqrt{\frac{2m'n'}{\mu'}}$ übertrifft, aber die Größe $\frac{n\mu'}{\mu} + 6\sqrt{\frac{2m'n'}{\mu'}}$ nicht.

Wenn wir:

$$v\sqrt{1+\gamma^2} - \frac{\gamma\theta}{\sqrt{1+\gamma^2}} = z;$$

also:

$$dv = \frac{dz}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

setzen, so sind die Grenzen in Beziehung auf diese neue Veränderliche z wieder $\pm\infty$, und wir haben:

$$\varphi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi(1+\gamma^2)}}\int_6^\infty e^{-\frac{\theta^2}{1+\gamma^2}}\, d\theta,$$

oder was dasselbe ist:

$$\varphi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\, dt,$$

wenn man auch:

$$\theta = t\sqrt{1+\gamma^2},\ d\theta = \sqrt{1+\gamma^2}\,dt,\ \varepsilon = u\sqrt{1+\gamma^2}$$

setzt.

Wenn man den Werth von γ berücksichtigt, so sieht man, dass φ wirklich die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass die Zahl n' zwischen den Grenzen:

$$\frac{n\mu'}{\mu} \mp \frac{u\sqrt{2(\mu^3 m'n' + \mu'^3 mn)}}{\mu\sqrt{\mu\mu'}}$$

liegt, oder der obern Grenze gleich ist. Wenn dieses Intervall der Werthe von n' auch die untere Grenze enthalten soll, so muss man zu φ die Wahrscheinlichkeit addiren, dass die Zahl n' genau dieser Grenze gleich ist, welche Wahrscheinlichkeit durch die Formel (23) gegeben wird, wenn man darin:

$$\alpha\sqrt{\mu'} = \frac{u\sqrt{2(\mu^3 m'n' + \mu'^3 mn)}}{\mu\sqrt{\mu\mu'}}$$

setzt. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl n' zwischen die beiden vorhergehenden Grenzen fällt, oder einer derselben gleich ist, mit ϖ; so hat man auf diese Weise:

$$\varpi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}dt + \frac{\sqrt{\mu\mu'}}{\sqrt{2\pi m'n'(\mu+\mu')}}\,e^{-\frac{u^2(\mu^3 m'n' + \mu'^3 mn)}{\mu^2 m'n'(\mu+\mu')}} \quad (24)$$

Vergleicht man diesen Werth von ϖ mit dem von R, welchen die Formel (21) gibt, so sieht man, dass diese beiden Wahrscheinlichkeiten sich nur durch ihre letzten Glieder von einander unterscheiden, und folglich fast einander gleich sind. Aber wenn die Zahl μ' der künftigen Versuche gegen die Zahl μ der bereits angestellten, nicht sehr klein ist, so sind die mit dem doppelten Zeichen behafteten Glieder der Grenzen von n', welchen diese Wahrscheinlichkeiten ϖ und R entsprechen, nicht dieselben, und die Grenzen, deren Wahrscheinlichkeit ϖ ist, können weit weniger zusammengezogen sein, als die, deren Wahrscheinlichkeit R ist.

Denn wenn die Wahrscheinlichkeit ϖ wenig von der Gewissheit verschieden ist, so kann man in den Grenzen, worauf sie sich bezieht, für n' und m' ihre sehr genäherten und sehr wahrscheinlichen Werthe $\frac{n\mu'}{\mu}$ und $\frac{m\mu'}{\mu}$ setzen, wodurch sich diese Grenzen in:

$$\frac{n\mu'}{\mu} \mp \frac{u}{\mu}\sqrt{2\mu' n m (1+h)}$$

verwandeln, indem h das Verhältniss von μ' zu μ bezeichnet. Vergleicht man sie nun mit denen in §. 83., welchen die Wahrscheinlichkeit R entspricht, so sieht man, dass sie für denselben Werth von u in dem Verhältnisse von $\sqrt{1+h}$ zu 1 weiter sind. Um sie eben so eng, als die in diesem §. zu machen, müsste man u in dem Verhältnisse von 1 zu $\sqrt{1+h}$ vermindern, wodurch auch ihre Wahrscheinlichkeit vermindert und kleiner, als R gemacht würde. Wenn h ein sehr kleiner Bruch ist, so stimmen die Formeln (20) und (24), so wie die correspondirenden Grenzen der Werthe von n' fast überein. Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches wir in der oben angeführten Abhandlung bereits auf einem andern Wege gefunden haben.

Die Formel (24) drückt auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Differenz $\frac{n'}{\mu'} - \frac{n}{\mu}$ zwischen den Grenzen:

$$\mp \frac{u\sqrt{2(\mu^3 m' n' + \mu'^3 m n)}}{\mu\mu'\sqrt{\mu\mu'}}$$

liegt, oder einer derselben gleich ist, und dass dasselbe hinsichtlich der Differenz $\frac{m'}{\mu'} - \frac{m}{\mu}$ der Fall ist, wenn man ihre Zeichen verändert. Wenn man folglich für u eine solche Zahl, z. B. die Zahl **3** oder **4**, genommen hat, für welche die Wahrscheinlichkeit ϖ sich der Gewissheit sehr nähert (§. 80), und man findet dennoch durch die Beobachtung für $\frac{m'}{\mu'} - \frac{m}{\mu}$ oder $\frac{n'}{\mu'} - \frac{n}{\mu}$ Werthe, welche sich merklich von diesen Grenzen entfernen; so kann man mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit schließen, dass sich die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und F innerhalb des Zeitraumes der beiden Versuchsreihen, oder selbst während der Versuche geändert haben.

Auch kann man bemerken, dass die vorhergehenden Grenzen für denselben Werth von u und folglich bei gleichem Grade der Wahrscheinlichkeit die größte Amplitude haben, wenn die Zahlen μ und μ' einander gleich sind, und die kleinste, wenn die eine dieser Zahlen gegen die andere sehr groß ist. Wenn $\mu' = \mu$ ist, so ist auch sehr nahe $m' = m$ und $n' = n$, wodurch der Coefficient von u auf $\frac{2\sqrt{mn}}{\mu\sqrt{\mu}}$ reducirt wird. Wenn dagegen μ' gegen μ sehr groß ist, so reducirt

sich dieser Coefficient, weil sehr nahe $m' = \frac{m\mu'}{\mu}$ und $n' = \frac{n\mu'}{\mu}$ ist, auf $\frac{\sqrt{2mn}}{\mu\sqrt{\mu}}$ und ist in dem Verhältnisse von $1 : \sqrt{2}$ kleiner, als der vorhergehende.

§. 88. Allgemein, wenn die beiden entgegengesetzten Ereignisse E und F, deren unbekannte Wahrscheinlichkeiten p und q sind, in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen resp. m mal und n mal stattgefunden haben, und wenn zwei andere entgegengesetzte Ereignisse E_1 und F_1, deren ebenfalls unbekannte Wahrscheinlichkeiten mit p_1 und q_1 bezeichnet werden, in einer sehr großen Anzahl $\mu_1 = m_1 + n_1$ von Versuchen resp. m_1 und n_1 mal stattgefunden haben, und die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$, $\frac{m_1}{\mu_1}$, sowie $\frac{n}{\mu}$ und $\frac{n_1}{\mu_1}$ sind beträchtlich von einander verschieden; so muss man es als fast gewiss annehmen, dass die Wahrscheinlichkeiten p und p_1, sowie q und q_1 ungleich sind. Aber wenn die Differenzen $\frac{m}{\mu} - \frac{m_1}{\mu_1}$ und $\frac{n}{\mu} - \frac{n_1}{\mu_1}$ kleine Brüche sind, so ist es möglich, dass die Wahrscheinlichkeiten p und p_1, sowie q und q_1 nicht merklich von einander verschieden sind, und dass die beobachteten Unterschiede daher rühren, dass in den beiden Reihen von μ und μ' Versuchen die Ereignisse nicht streng in dem Verhältnisse ihrer resp. Wahrscheinlichkeiten stattgefunden haben. Es wird daher von Nutzen sein, die Wahrscheinlichkeit einer Ungleichheit zwischen den unbekannten Wahrscheinlichkeiten q und p_1, q und q_1, welche gegebenen, wenig beträchtlichen, gleichen und mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Differenzen zwischen den Verhältnissen $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{m_1}{\mu_1}$, $\frac{n}{\mu}$ und $\frac{n_1}{\mu_1}$ entspricht, zu bestimmen, und womit wir uns nun beschäftigen wollen.

Wie in §. 84. wollen wir mit:

$$p = \frac{m}{\mu} - \frac{v}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$$

einen Werth von p bezeichnen, welcher wenig von $\frac{m}{\mu}$ verschieden ist, so dass v eine positive oder negative, aber gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Veränderliche ist. Ebenso sei:

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} - \frac{v_1}{\mu_1}\sqrt{\frac{2m_1n_1}{\mu_1}}$$

ein Werth von p_1, welcher von p wenig verschieden ist, und worin die positive oder negative Veränderliche v_1 gegen $\sqrt{\mu_1}$ sehr klein ist. Wir wollen annehmen, es sei:

$$\frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m}{\mu} = \delta,$$

wo δ ein kleiner Bruch ist, welcher positiv oder negativ sein kann, so haben wir:

$$p_1 - p = \delta + \frac{v}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}} - \frac{v_1}{\mu_1}\sqrt{\frac{2m_1n_1}{\mu_1}}.$$

Bezeichnen wir diese Differenz mit z, so ergibt sich:

$$v_1 = (\delta - z)\mu_1\sqrt{\frac{\mu_1}{2m_1n_1}} + \frac{v_1\sqrt{\mu_1 mn}}{\mu\sqrt{\mu m_1 n_1}},$$

und wenn ε ein kleiner positiver Bruch ist und die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden soll, dass p_1, p um eine bestimmte Größe, welche wenigstens $=\varepsilon$ ist, übertrifft; so muss man der Veränderlichen z nur positive Werthe geben, welche kleiner sind, als ε.

Hiernach sind die unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten der vorhergehenden Werthe von p und p_1 resp. $V dv$ und $V_1 dv_1$, wo der Coefficient V durch die Formel (21) gegeben wird und V_1 den Werth dieser Formel bezeichnet, wenn man darin μ_1, m_1, n_1, v_1 statt μ, m, n, v setzt. Die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Stattfindens dieser beiden Werthe ist das Product von $V dv$ und $V_1 dv_1$; und wenn man die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit λ bezeichnet; so wird sie durch das doppelte Integral:

$$\lambda = \int\int V V_1 \, dv \, dv_1$$

ausgedrückt.

Größerer Einfachheit wegen wollen wir das zweite Glied der Formel (21) vernachlässigen, so folgt:

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\int\int e^{-v^2 - v_1^2} \, dv \, dv_1.$$

Wenn man in dieses Integral die Veränderliche z für v_1 einführen will, so muss man für dv_1 das Differenzial des vorhergehenden Werthes von v_1 in Beziehung auf z nehmen, und da die Veränderliche v_1

hier als wachsend vorausgesetzt ist; so muss man, damit z auch zunimmt, das Zeichen von dv_1 verändern, so dass man

$$dv_1 = \frac{\mu_1 \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{2 m_1 n_1}}\, dz$$

hat. Außerdem ist:

$$v^2 + v_1^2 = v^2 \left(1 + \frac{\mu_1^3\, m n}{\mu^3\, m_1\, n_1}\right) + \frac{2 v (\delta - z) \mu_1^3 \sqrt{m n}}{m_1\, n_1\, \mu \sqrt{2 \mu}} + \frac{(\delta - z)^2 \mu_1^3}{2\, m_1\, n_1}.$$

Das Integral in Beziehung auf v kann, wie in den vorhergehenden Untersuchungen, von $v = -\infty$ bis $v = \infty$ erstreckt werden, und wenn man:

$$\frac{v \sqrt{\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n}}{\mu \sqrt{\mu m_1\, n_1}} + \frac{(\delta - z) \mu_1^3 \sqrt{m n}}{\sqrt{2 m_1\, n_1}\, \sqrt{\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n}} = x,$$

also:

$$dv = \frac{\mu \sqrt{\mu m_1\, n_1}\, dx}{\sqrt{\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n}}$$

setzt, so sind die Integrationsgrenzen in Beziehung auf die neue Veränderliche x wieder $\pm \infty$. Das Integral in Beziehung auf z darf nur von $z = \varepsilon$ bis $z = \infty$ genommen werden, und da:

$$v^2 + v_1^2 = \frac{(\delta - z)^2 \mu^3\, \mu_1^3}{2 (\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n)} + x^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

ist, so verwandelt sich der Werth von λ in:

$$\lambda = \frac{\mu \mu_1 \sqrt{\mu \mu_1}}{\sqrt{2 \pi (\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n)}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{(z - \delta)^2 \mu^3 \mu'^1}{2 (\mu^3 m_1 n_1 + \mu_1^3 m n)}}\, dz.$$

Es sei nun:

$$\frac{(z - \delta) \mu \mu_1 \sqrt{\mu \mu_1}}{\sqrt{2 (\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n)}} = t, \text{ also } \frac{\mu \mu_1 \sqrt{\mu \mu_1}\, dx}{\sqrt{2 (\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n)}} = dt,$$

und außerdem wollen wir:

$$\frac{(\varepsilon - \delta) \mu \mu_1 \sqrt{\mu \mu_1}}{\sqrt{2 (\mu^3\, m_1\, n_1 + \mu_1^3\, m n)}} = \pm u \qquad (25)$$

setzen, wo u eine positive Größe ist, und das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem $\varepsilon > \delta$ oder $\varepsilon < \delta$ ist. Die Integrationsgrenzen in Beziehung auf t sind $t = \pm u$ und $t = \infty$, und wenn man bemerkt, dass:

$$\int_{-u}^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{-u} e^{-t^2} dt$$
$$= \sqrt{\pi} - \int_{u}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

ist; so ergibt sich endlich:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u}^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u}^{\infty} e^{-t^2} dt, \qquad (26)$$

wo der erste Werth stattfindet, wenn die Differenz $\varepsilon - \delta$ positiv ist, und der zweite, wenn diese Differenz negativ ist.

Da das zweite Glied der Formel (21) vernachlässigt ist, so ist zu bemerken, dass die Wahrscheinlichkeit des Falles, wo die Differenz $p_1 - p$ genau $= \varepsilon$ wäre, auch vernachlässigt würde, so dass λ die Wahrscheinlichkeit ist, dass $p_1 - p > \varepsilon$ und nicht, dass $p_1 - p < \varepsilon$ oder $p_1 - p = \varepsilon$ ist. In dem Falle, wo $\varepsilon = \delta$ ist, ist die Größe $u = 0$, und die beiden Werthe von λ sind $\lambda = \frac{1}{2}$, d. h. man kann 1 gegen 1 wetten, dass p_1 um mehr, als δ größer ist, als p.

Die Formeln (26) dienen auch zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die unbekannte Wahrscheinlichkeit p_1 größer ist, als ein gegebener Bruch. Zu dem Zwecke wollen wir in der Gleichung (25)

$$\mu = \infty, \ \frac{m}{\mu} = \omega, \ \delta = \frac{m_1}{\mu_1} - \omega$$

setzen, wodurch sie sich in folgende verwandelt:

$$u = \pm \left(\varepsilon + \omega - \frac{m_1}{\mu_1}\right) \frac{\mu_1 \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{2 m_1 n_1}}.$$

Da aber die Zahl μ als unendlich groß angenommen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit p zuverlässig dem Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ oder dem Bruche ω gleich, und folglich ist λ alsdann die Wahrscheinlichkeit, dass $p_1 > \varepsilon + \omega$ ist. Nimmt man größerer Einfachheit wegen ω statt $\varepsilon + \omega$ und setzt auch μ, m, n für μ_1, m_1, n_1, so hat man:

$$u = \pm \left(\omega - \frac{m}{\mu}\right) \frac{\mu \sqrt{\mu}}{\sqrt{2 m n}}, \qquad (27)$$

und jenachdem die Differenz $\omega - \frac{m}{\mu}$ positiv oder negativ ist, drückt die erste oder die zweite der Formeln (26) die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ die unbekannte Wahrscheinlichkeit eines, in einer sehr großen Anzahl $\mu = m + n$ von Versuchen n mal stattgehabten Ereignisses den gegebenen Bruch ω übersteigt.

§. 89. Um von den verschiedenen vorhin abgeleiteten Formeln eine numerische Anwendung zu geben, wollen wir z. B. den bereits in §. 50. betrachteten Buffon'schen Versuch nehmen.

Das Ereigniſſ E ist alsdann das Treffen des Wappens und das Ereigniſſ F das Treffen der Schrift in einer langen Reihe von Würfen mit demselben Münzstücke. Nach diesem Versuche haben die Zahlen m und n, welche ausdrücken, wie vielmal jedes der Ereignisse E und F resp. bei $\mu = 4040$ successiven Versuchen stattgefunden hat, folgende Werthe gehabt:

$$m = 2048, \quad n = 1992,$$

und wenn man diese Zahlen in die Formel (19) substituirt, und $u = 2$ nimmt; so erhält man:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2}\, dt = 0{,}00468, \quad R = 0{,}99555.$$

Zu gleicher Zeit findet man:

$$0{,}50693 \mp 0{,}02225$$

für die Grenzen des Werthes von p, worauf sich diese Formel bezieht, so daſſ man ungefähr 224 gegen 1 wetten kann, daſſ die unbekannte Wahrscheinlichkeit p des Treffens des Wappens zwischen 0,48468 und 0,52918 liegt, oder daſſ die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $= 0{,}99555$ ist.

Wenn man die Wahrscheinlichkeit wissen will, daſſ sie größer, als $\frac{1}{2}$ ist, oder daſſ die Wahrscheinlichkeit des Treffens des Wappens größer ist, als die für das Treffen der Schrift; so substituire man die vorhergehenden Werthe von μ, m, n in die Formel (27) und setze darin $\omega = \frac{1}{2}$. Wenn man das untere Zeichen, und folglich die zweite der Formeln (26) nimmt, so erhält man:

$$u = 0{,}62298, \quad \lambda = 0{,}81043, \quad 1 - \lambda = 0{,}18957,$$

welches zeigt, daſſ man nicht ganz 5 gegen 1 wetten kann, daſſ die Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Wappens größer sei, als $\frac{1}{2}$.

Der Buffon'sche Versuch kann in zwei Abtheilungen getheilt werden, wovon die erste aus **2048** Versuchen und die zweite aus **1992** Versuchen besteht, und wo in der ersten Abtheilung das Wappen **1061** mal und die Schrift **987** mal getroffen ist, während in der zweiten Abtheilung das erste Ereigniss **987** mal und das zweite **1005** mal stattgefunden hat. Vermittelst des Resultates des Gesammtversuches und der Formel (**24**) kann man nun auch leicht die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Anzahlen des Treffens des Wappens oder der Schrift in den beiden einzelnen Abtheilungen des Gesammtversuches zwischen gegebenen Grenzen haben liegen müssen. Zu dem Zwecke setzt man in dieser Formel und in den Grenzen, welchen sie entspricht:

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{m}{\mu} = 0{,}50693, \quad \frac{n'}{\mu'} = \frac{n}{\mu} = 0{,}49307,$$

d. h. man setzt für die Verhältnisse $\frac{m'}{\mu'}$ und $\frac{n'}{\mu'}$, welche nicht als bekannt angesehen werden, ihre sich aus dem Gesammtversuche ergebenden Näherungswerthe, was gestattet ist, weil die Zahlen m' und n' nur in den Gliedern von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ vorkommen, und für μ setzt man die Gesammtzahl der Versuche **4040**. In Beziehung auf die erste Abtheilung der Versuche hat man außerdem:

$$\mu' = 2048,$$

und wenn man, wie weiter oben, $u = 2$ nimmt, so findet man:

$$\omega = 0{,}99558$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl n', welche ausdrückt, wie vielmal die Schrift getroffen ist, zwischen den Grenzen:

$$1001 \mp 79$$

hat liegen müssen, was wirklich der Fall gewesen ist, weil in dieser ersten Abtheilung des Versuches die Schrift **987** mal getroffen ist.

In Beziehung auf die zweite Abtheilung des Versuches hat man:

$$\mu' = 1992,$$

und wenn man wieder $u = 2$ nimmt, so findet man:

$$\omega = 0{,}99560$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Schrift eine Zahl n' von Malen getroffen ist, welche zwischen den Grenzen:

$$982 \mp 77$$

liegt, zwischen welchen die Zahl **1005**, welche ausdrückt, wie vielmal die Schrift getroffen ist, wirklich liegt. Die Brüche sind in diesen und in den vorhergehenden Grenzen weggelassen.

Wir wollen nun annehmen, dass man nicht wisse, ob in den beiden Abtheilungen des Gesammtversuches dasselbe Münzstück angewandt ist, und nach den Beobachtungsresultaten die Wahrscheinlichkeit λ suchen, dass in der ersten Abtheilung des Gesammtversuches die Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Wappens die Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses in der zweiten Abtheilung um einen gegebenen Bruch übertrifft. Zunächst setze man in der Gleichung (25):

$$\mu = 1992,\ m = 987,\ n = 1005,$$
$$\mu_1 = 2048,\ m_1 = 1061,\ n_1 = 987,$$

und außerdem:

$$\delta = \frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m}{\mu} = 0{,}02257,$$

so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$u = \pm(\varepsilon - 0{,}02257)(44{,}956).$$

Wenn man z. B. $\varepsilon = 0{,}02$ setzt, so muss man das untere Zeichen nehmen, und von der zweiten der Formeln (26) Gebrauch machen, und auf diese Weise erhält man:

$$u = 0{,}11553,\ \lambda = 0{,}56589,\ 1 - \lambda = 0{,}43411,$$

so dass man kaum 4 gegen 3 wetten könnte, dass die Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Wappens in der ersten Abtheilung des Gesammtversuches um $\frac{1}{50}$ größer sei, als in der zweiten. Setzt man $\varepsilon = 0{,}025$, so muss man das obere Zeichen nehmen und die erste der Formeln (26) anwenden. Alsdann erhält man:

$$u = 0{,}10925,\ \lambda = 0{,}43861,\ 1 - \lambda = 0{,}56139,$$

und man könnte noch nicht 1 gegen 1 wetten, dass der in Rede stehende Mehrbetrag größer sei, als $\frac{1}{50}$.

§. 90. Wir wollen hier noch die Auflösung einer Aufgabe mittheilen, welche eine interessante Anwendung darbietet und auf den vorhergehenden Formeln, sowie auf einem sogleich anzuführenden Lehnsatze beruht.

Eine Urne A enthält eine Anzahl c von Kugeln, worunter sich a weiße und b schwarze befinden, so dass $a+b=c$ ist. Zuerst zieht man ganz zufällig succesive, oder mit einem Male l Kugeln aus der Urne, ohne sie wieder hineinzulegen, und dann zieht man wieder $\mu=m+n$ andere Kugeln heraus; so behaupten wir, dass die Wahrscheinlichkeit, bei dem zweiten Zuge m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, unabhängig ist von der Anzahl l und der Farbe der zuerst gezogenen Kugeln, und dieselbe, als wenn $l=0$ wäre.

Denn wir wollen annehmen, dass die $l+\mu$ successiven Ziehungen geschehen; es sei i die Gesammtzahl der verschiedenen Verbindungen von $l+\mu$ Kugeln, welche gezogen werden können, i' die Anzahl dieser Verbindungen, worin die μ letzten Kugeln aus m weißen und n schwarzen Kugeln bestehen und $i_{,}$ die Anzahl der Verbindungen, worin die μ ersten Kugeln m weiße und n schwarze sind; so ist die Wahrscheinlichkeit, m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, nachdem bereits l beliebige Kugeln gezogen sind, $=\frac{i'}{i}$, und die Wahrscheinlichkeit, m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, bevor irgend eine Kugel aus der Urne A gezogen ist, ist $=\frac{i_{,}}{i}$. Nun sind aber die beiden Zahlen i' und $i_{,}$ einander gleich. Denn im Allgemeinen sind zwei Verbindungen, wovon die eine aus l bestimmten Kugeln besteht, worauf μ andere ebenfalls bestimmte Kugeln folgen, und wovon die andere diese μ letzten Kugeln zuerst enthält und die l ersten zuletzt, gleich möglich, und insbesondere gibt es für jede Verbindung, worin sich unter den μ letzten der $l+\mu$ aus der Urne A gezogenen Kugeln m weiße und n schwarze befinden, immer eine andere Verbindung, worin diese schwarzen und weißen Kugeln unter den μ ersten Kugeln vorkommen, und umgekehrt. Die Brüche $\frac{i'}{i}$ und $\frac{i_{,}}{i}$, und mithin die Wahrscheinlichkeiten, welche sie ausdrücken, sind also auch einander gleich, was bewiesen werden sollte.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich auf folgende Weise darthun.

Wenn die Urne A ursprünglich a weiße und b schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit bei den $m+n$ ersten Ziehungen, m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, eine Function von a, b, m, n, welche wir mit $f(a, b, m, n)$ bezeichnen wollen, und ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, in den $g+h$ ersten Ziehungen g weiße und h schwarze Kugeln zu ziehen, $=f(a, b, g, h)$. Da die Anzahl der in der Urne A ursprünglich enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln auf

$a-g$ und $b-h$ reducirt ist, so wird die Wahrscheinlichkeit, hierauf in $\mu=m+n$ neuen Versuchen m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, durch $f(a-g, b-h, m, n)$ ausgedrückt, und das Product dieser beiden letzten Functionen drückt folglich die Wahrscheinlichkeit aus, m weiße und n schwarze Kugeln aus der Urne a zu ziehen, nachdem bereits g weiße und h schwarze aus derselben gezogen sind. Wenn man folglich die Summe der $l+1$ Werthe dieses Productes bildet, welche allen ganzen Werthen oder dem Werthe Null von g und h entsprechen, und deren Summe $=l$ ist; so erhält man den vollständigen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, aus der Urne A, m weiße und n schwarze Kugeln zu ziehen, nachdem bereits l beliebige Kugeln aus derselben gezogen sind. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, daß diese Wahrscheinlichkeit von l unabhängig und $=f(a, b, m, n)$ ist, d. h. zu zeigen, daß man:

$$f(a, b, m, n)=\Sigma f(a, b, g, h) f(a-g, b-h, m, n)$$

hat, wo sich die Summe Σ von $g=0$ und $h=l$ bis $g=l$ und $h=0$ erstreckt.

Zu dem Zwecke bemerken wir, daß man nach §. 18. für beliebige Zahlen a und b, deren Summe $=c$ ist:

$$f(a, b, m, n)=\frac{\varphi(m, n)\varphi(a-m, b-n)}{\varphi(a, b)}$$

hat, wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{1.2.3\ldots c}{1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots b}=\varphi(a, b)$$

setzt.

Hieraus folgt:

$$f(a, b, g, h) f(a-g, b-h, m, n)=$$
$$\frac{\varphi(g, h)\varphi(a-g, b-g)}{\varphi(a, b)}\cdot\frac{\varphi(m, n)\varphi(a-g-m, b-h-n)}{\varphi(a-g, b-h)},$$

oder was dasselbe ist:

$$f(a, b, g, h) f(a-g, b-h, m, n)=$$
$$\frac{\varphi(m, n)}{\varphi(a, b)}\cdot\varphi(g, h)\varphi(a-g-m, b-h-n).$$

Hiernach und vermöge des Werthes von $f(a, b, m, n)$ verwandelt sich die zu verificirende Gleichung in:

$$\varphi(a-m,\, b-n) = \Sigma\varphi(g,\, h)\,\varphi(a-g-m,\, b-h-n),$$

wenn man den allen Gliedern beider Theile gemeinschaftlichen Factor $\frac{\varphi(m,\, n)}{\varphi(a,\, b)}$ hinweglässt, und da a und b beliebige Zahlen sind; so kann man auch, wenn man will, $a+n$ und $b+m$ statt a und b setzen, wodurch sie sich in folgende verwandelt:

$$\varphi(a,\, b) = \Sigma\varphi(g,\, h)\,\varphi(a-g,\, b-h).$$

Nun ist aber ihr erster Theil der Coefficient von $x^a y^b$ in der Entwickelung von $(x+y)^c$ und ihr zweiter Theil ist der Coefficient von $x^a y^b$ in dem Producte der Entwickelungen von $(x+y)^l$ und $(x+y)^{c-l}$ oder in der Entwickelung von $(x+y)^c$, wie der erste Theil, und folglich sind die beiden Theile dieser Gleichung identisch, was bewiesen werden sollte.

§. 91. Wir wollen nun annehmen, dass die Zahlen $a, b, a-m, a-n$ sehr groß sind, so lassen sich die Näherungswerthe von $\varphi(m-n)$, $\varphi(a-m,\, b-n)$, $\varphi(a,\, b)$ und hierauf der von $f(a,\, b,\, m,\, n)$ vermittelst der Reihe (3) berechnen, und wenn man diese Reihe auf ihr erstes Glied reducirt, so ergibt sich daraus ein Werth von $f(a,\, b,\, m,\, n)$, welcher auf folgende Form gebracht werden kann:

$$f(a,\, b,\, m,\, n) = H\left(\frac{a\mu}{cm}\right)^m \left(\frac{b\mu}{cn}\right)^n \left(\frac{a(c-\mu)}{c(a-m)}\right)^{a-m} \left(\frac{b(c-\mu)}{c(b-n)}\right)^{b-n},$$

wenn man der Kürze wegen:

$$\sqrt{\frac{ab\mu(c-\mu)}{2\pi cmn(a-m)(b-n)}} = H$$

setzt.

Wenn m und n und folglich auch $a-m$ und $b-n$ sich wie a und b verhalten, so erreicht jeder der vier letzten Factoren sein Maximum und wird der Einheit gleich. Sie nehmen sehr schnell ab, wenn sich m und n von diesem Verhältnisse entfernen und werden ganz unmerklich, sobald das Verhältniss $\frac{m}{n}$ nicht mehr sehr wenig von $\frac{a}{b}$ verschieden ist, so dass man die durch die Function $f(a,\, b,\, m,\, n)$ ausgedrückte Wahrscheinlichkeit nur für Werthe von m und n zu betrachten braucht, welche sich fast wie a und b verhalten. Wenn wir also:

$$m = \frac{\mu a}{c} - \theta\sqrt{c},\quad n = \frac{\mu b}{c} + \theta\sqrt{c}$$

und folglich:

$$a-m=\frac{(c-\mu)a}{c}+\theta\sqrt{c},\ b-n=\frac{(c-\mu)b}{c}-\theta\sqrt{c}$$

setzen, so können wir θ als eine positive oder negative, aber gegen $\sqrt{c}$ sehr kleine Größe betrachten, so daß $\frac{\theta}{\sqrt{c}}$ ein sehr kleiner Bruch ist, dessen Quadrat, sowie alle Größen von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{c}$ wir unberücksichtigt lassen.

Hiernach haben wir:

$$\frac{cm}{a\mu}=1-\frac{\theta c\sqrt{c}}{a\mu},\ \frac{cn}{b\mu}=1+\frac{\theta c\sqrt{c}}{b\mu},$$

$$\frac{c(a-m)}{a(c-\mu)}=1+\frac{\theta c\sqrt{c}}{a(c-\mu)},\ \frac{c(b-n)}{b(c-\mu)}=1-\frac{\theta c\sqrt{c}}{b(c-\mu)},$$

und wenn wir die Quadrate der zweiten Glieder dieser Binome vernachlässigen, so finden wir zunächst durch eine ähnliche Rechnung, wie die in §. 85:

$$\left(\frac{a\mu}{cm}\right)^m\left(\frac{b\mu}{cn}\right)^n=$$

$$\left[1+\frac{\theta^3 c^4\sqrt{c}}{3\mu^3}\left(\frac{m}{a^3}-\frac{n}{b^3}\right)\right]e^{\frac{\theta c\sqrt{c}}{\mu}\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)}e^{\frac{\theta^2c^3}{2\mu^2}\left(\frac{m}{a^2}+\frac{n}{b^2}\right)}.$$

Wenn wir für die Zahlen m und n ihre vorhergehenden Werthe setzen, so verwandelt sich diese letzte Formel in:

$$\left(\frac{a\mu}{cm}\right)^m\left(\frac{b\mu}{cn}\right)^n=\left[1-\frac{\theta^3(a-b)c^4\sqrt{c}}{3\mu^2a^2b^2}\right]e^{-\frac{\theta^2c^3}{2\mu ab}}.$$

Ebenso findet man die Gleichung:

$$\left(\frac{a(c-\mu)}{c(a-m)}\right)^{a-m}\left(\frac{b(c-\mu)}{c(b-m)}\right)^{b-n}=$$

$$\left[1+\frac{\theta^3(a-b)c^4\sqrt{c}}{3(c-\mu)^2a^2b^2}\right]e^{-\frac{\theta^2c^3}{2(c-\mu)ab}},$$

welche sich auch aus der vorhergehenden ergibt, wenn man darin m, n, μ in $a-m$, $b-n$, $c-\mu$ und das Zeichen von θ in das entgegen=

gesetzte verwandelt. Hieraus ergibt sich mit dem Grade von Annäherung, wobei wir stehen bleiben:

$$f(a, b, m, n) =$$
$$H\left[1 - \frac{\theta^3 (a-b)(c-2\mu) c^5 \sqrt{c}}{3(c-\mu)^2 \mu^2 a^2 b^2}\right] e^{-\frac{\theta^2 c^4}{2(c-\mu)\mu ab}}$$

oder, wenn man:

$$\theta = \frac{t\sqrt{2(c-\mu)\mu ab}}{c^2}$$

setzt:

$$f(a, b, m, n) =$$
$$H\left[1 - \frac{4t^3 (a-\mathrm{b})(c-2\mu)}{3\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}\right] e^{-t^2} \qquad (28)$$

für die Wahrscheinlichkeit, die m weißen und n schwarzen Kugeln zu ziehen, indem:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\mu a}{c} - \frac{t\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}{c^2}, \\ n &= \frac{\mu b}{c} + \frac{t\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}{c^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

ist.

Jenachdem die Zahl μ gerade oder ungerade ist, ist auch die Differenz $n - m$ gerade oder ungerade. Wenn man mit i eine ganze positive Zahl und den Ueberschuss von n über m mit $2i$ oder $2i-1$ bezeichnet, so muss der correspondirende Ausdruck von t vermöge der Gleichungen (29):

$$t = 2i\delta + \gamma$$

sein, wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{c^2}{2\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}} = \delta$$

setzt und mit γ eine der beiden Größen bezeichnet:

$$\gamma = \frac{(a-b)\mu c}{2\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}, \quad \gamma = \frac{(a-b)\mu c}{2\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}} - \delta,$$

nämlich die erste, wenn μ gerade und die zweite, wenn μ ungerade ist.

Die Formel (28) drückt also, nachdem dieser Werth von t hineinsubstituirt ist, die Wahrscheinlichkeit aus, daß in den μ successiven Ziehungen die Anzahl der schwarzen Kugeln die der weißen um $2i$ oder $2i-1$ Einheiten übertrifft. Wenn man folglich successive $i=1$, $=2$, $=3, \ldots$ bis die Exponentialgröße e^{-t^2} unmerklich geworden ist, oder wenn man will, bis $i=\infty$ setzt, und dann die Summe der Resultate nimmt; so drückt diese Summe die Wahrscheinlichkeit aus, daß in den μ Ziehungen die Anzahl der schwarzen Kugeln die der weißen um eine beliebige gerade oder ungerade Anzahl von Einheiten übertrifft. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit s, so haben wir:

$$s=\Sigma H\left[1-\frac{4t^3(a-b)(c-2\mu)}{3\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}\right]e^{-t^2},$$

wo Σ eine Summe bezeichnet, welche sich auf alle Werthe von $t=\gamma+2\delta$ bis $t=\infty$ erstreckt, welche um gleiche Größen, nämlich um 2δ zunehmen. Da nun 2δ nach der Voraussetzung ein sehr kleiner Bruch ist, so lässt sich die Summe Σ durch eine nach den Potenzen dieser Differenz geordnete, sehr schnell convergirende Reihe ausdrücken. Denn wenn man die unter dem Summenzeichen Σ stehende Function von t mit T bezeichnet, und bemerkt, daß diese Function, sowie alle ihre Differenziale an der Grenze $t=\infty$ verschwinden; so hat man nach einer von Euler herrührenden Formel:

$$\Sigma T=\frac{1}{2\delta}\int_{\gamma}^{\infty}T\,dt-\tfrac{1}{2}k-\frac{2\delta}{12}k'+\frac{(2\delta)^3}{720}k'''-etc.,$$

wo $k, k', k''', \ldots$ die Werthe von $T, \frac{dT}{dt}, \frac{d^3T}{dt^3}, \ldots$ sind, welche $t=\gamma$ entsprechen. Nach den Gleichungen (29) hat man überdies bei demselben Grade von Annäherung, als vorhin:

$$mn=\frac{\mu^2 ab}{c^2}+\frac{t\mu(a-b)\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}{c^3},$$

$$(a-m)(b-n)=\frac{(c-\mu)^2 ab}{c^2}$$
$$-\frac{t(c-\mu)(a-b)\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}{c^3},$$

und wenn man den Werth von δ berücksichtigt; so folgt:

$$\frac{1}{2\delta}H = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{t(a-b)(c-2\mu)}{\sqrt{2(c-\mu)\mu abc}}\right],$$

$$k = \frac{c^2 e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi(c-\mu)\mu abc}}.$$

Da die von k', k''' ... abhängigen Glieder in dem Ausdrucke von s mit H multiplicirt sind, so enthalten sie die Factoren δ^2, δ^4, ... und müssen vernachlässigt werden, und wegen:

$$\int_\gamma^\infty e^{-t^2} t\,dt = \tfrac{1}{2} e^{-\gamma^2}, \int_\gamma^\infty e^{-t^2} t^3\,dt = \tfrac{1}{2}(1+\gamma^2) e^{-\gamma^2},$$

ergibt sich aus diesen verschiedenen Werthen:

$$s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma^\infty e^{-t^2} dt - \Gamma e^{-\gamma^2},$$

wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{(a-b)(c-2\mu)(7+4\gamma^2)+3c^2}{6\sqrt{2\pi(c-\mu)\mu abc}} = \Gamma$$

setzt.

Es sei v eine positive Größe, und jenachdem die Größe γ positiv oder negativ ist, wollen wir $v = \pm\gamma$ setzen, so erhalten wir wegen:

$$\int_{-v}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} - \int_v^\infty e^{-t^2} dt$$

endlich:

$$\left.\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_v^\infty e^{-t^2} dt - \Gamma e^{-\gamma^2}, \\ s &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_v^\infty e^{-t^2} dt - \Gamma e^{-\gamma^2}, \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

wo der erste Werth von s stattfindet, wenn $\gamma < 0$ ist, und der zweite, wenn $\gamma > 0$ ist.

Wenn man in der Formel (28) $t = \gamma$ setzt und das Resultat mit σ bezeichnet, so erhält man:

$$\sigma = \frac{c^2 e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi(c-\mu)\mu abc}} \quad (31)$$

für die Wahrscheinlichkeit, daſſ in μ Ziehungen die Zahlen m und n

der weißen und schwarzen Kugeln einander gleich sind und jede die Hälfte von μ ist, was nur möglich ist, wenn μ eine gerade Zahl ist.

§. **92.** Wir wollen nun annehmen, dass, nachdem aus der Urne A, μ Kugeln gezogen sind, successive μ', dann μ'', u. s. f. andere Kugeln gezogen werden, bis alle in dieser Urne enthaltenen c Kugeln aus derselben herausgezogen sind, so dass:

$$c=\mu+\mu'+\mu''+\mu'''+\dots$$

ist. Ferner wollen wir annehmen, dass jede der Zahlen $\mu', \mu'', \dots,$ so wie die Zahl μ sehr groß ist, und mit s', s'', die Werthe von s bezeichnen, wenn man successive $\mu', \mu'', \dots$ für μ setzt und von der ersten oder zweiten der Formeln (**30**) Gebrauch macht, jenachdem im Anfange der Ziehungen die Anzahl b der in der Urne A enthaltenen schwarzen Kugeln größer oder kleiner ist, als die Zahl a der weißen Kugeln, so dass die Größe γ negativ oder positiv wird. Nach dem Lehnsatze in §. **90.** werden die Wahrscheinlichkeiten, in den successiven Zügen von $\mu, \mu', \mu'', \dots$ Kugeln mehr schwarze, als weiße Kugeln zu ziehen, durch die Größen $s, s', s'', \dots$ ausgedrückt, so dass sie sich nur nach Verhältniss des Unterschiedes von $\mu, \mu', \mu'', \dots$ ändern und alle einander gleich sein würden, wenn diese Zahlen einander gleich wären. Es sei r das Mittel aus den Werthen von $s, s', s'', \dots$ d. h.:

$$r=\frac{1}{\alpha}\,(s+s'+s''+s'''+etc.),$$

wo α die Gesammtzahl der Ziehungen ausdrückt. Wenn man wieder annimmt, dass α sehr groß ist und die Anzahl dieser α Ziehungen, worin mehr schwarze, als weiße Kugeln gezogen werden, mit j bezeichnet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass j zwischen gegebenen Grenzen liegt, nach dem ersten Satze in §. **52.** dieselbe, als wenn alle Wahrscheinlichkeiten $s, s', s'', \dots$ unter einander und ihre Mittelwerthe r gleich wären. Setzen wir also $\alpha, r, 1-r$ für μ, q, p in die Formel (**17**), so erhalten wir:

$$R=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha r(1-r)}}\,e^{-u^2}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl j zwischen den Grenzen:

$$\alpha r\mp u\sqrt{2\alpha r(1-r)}$$

liegt, oder einer derselben gleich ist, wenn u eine gegen $\sqrt{\alpha}$ sehr kleine

Zahl ist. Dieses ist die Auflösung der Aufgabe, welche wir uns gestellt haben, und die Anwendung derselben bezieht sich auf die Wahlen der Deputirten in einem großen Lande, wie z. B. in Frankreich.

Die Zahl der Wählenden in ganz Frankreich wird durch c ausgedrückt, die unter ihnen, welche eine bestimmte Meinung haben, durch a und die Anzahl der von der entgegengesetzten Meinung durch b oder $c - a$. Die Gesammtzahl c wird in α Wahlcollegien getheilt, wovon jedes einen Deputirten wählt, so daß der in einem Wahlcollegio gewählte Deputirte von der zweiten oder der ersten Meinung ist, je nachdem die Anzahl der der einen oder der andern Meinung angehörigen Wählenden das Uebergewicht hat. Man soll alsdann die Wahrscheinlichkeit R bestimmen, daß die Anzahl j der Deputirten, welche der zweiten Meinung angehören, zwischen gegebenen Grenzen liegt, wenn vorausgesetzt wird, daß die Abtheilung der Wählenden in α Wahlcollegien zufällig geschehen ist, d. h. wenn man annimmt, daß auf der allgemeinen Liste μ Wählende für ein erstes Wahlcollegium, μ' für ein zweites, μ'' für ein drittes, u. s. f. zufällig genommen werden, und wenn man für die Grenzen von j die eben angeführten nimmt, so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit R durch die vorhergehende Formel ausgedrückt.

Obgleich jedes Wahlcollegium aus Wählenden desselben Bezirkes und nicht aus Wählenden besteht, welche, wie wir es voraussetzen, ganz zufällig aus der allgemeinen Liste genommen sind, so kann es doch von Nutzen sein, zu erfahren, was in dieser Voraussetzung stattfinden würde und nun an Beispielen gezeigt werden soll.

§. **93.** In Frankreich beträgt die Anzahl der Wahlcollegien, so wie die der Deputirten **459**, und man kann die Gesammtzahl der Wählenden auf ungefähr **200000** anschlagen. Wir wollen annehmen, daß die Zahlen $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ alle einander gleich sind, und wenn für μ eine ungerade Zahl genommen wird,

$$\alpha = 459, \ \mu = 435, \ c = \alpha\mu = 199665$$

setzen. Ferner wollen wir annehmen, daß:

$$a = 94825, \ b = 104835$$

ist, so daß der Unterschied zwischen der Majorität und Minorität ungefähr $\frac{1}{20}$ der Gesammtzahl der Wählenden beträgt. Die Größe γ ist negativ. Man setzt daher $v = -\gamma$, und wenn man den zweiten der beiden Werthe von γ in §. **91.** nimmt, so folgt:

$$v = 0{,}77396, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_v^\infty e^{-t^2} dt = 0{,}13684,$$

und vermöge der ersten der Formeln (30) hat man:

$$s = 0{,}85426,\ 1 - s = 0{,}14574.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Wahl in dem Sinne der Majorität der Wählenden würde also größer sein als $\frac{21}{25}$, und obgleich die Minorität nicht beträchtlich von der Majorität verschieden ist, so würde sie doch kaum mehr, als $\frac{4}{25}$ der Deputirten zu wählen hoffen können. Setzt man diese Werthe von s und $1 - s$ für r und $1 - r$ in den Ausdruck von R im vorhergehenden §., setzt $\alpha = 459$ und nimmt $u = 2$; so findet man:

$$R = 0{,}99682$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der durch die Majorität gewählten Deputirten zwischen den Grenzen 392 ∓ 21 und die Anzahl der von der Minorität gewählten Deputirten zwischen den Grenzen 67 ± 21 liegt. Die Amplitude dieser Grenzen ist gegen die Zahl α beträchtlich, weil α nicht sehr groß ist.

Wir wollen wieder annehmen, daß die Differenz $b - a$ ungefähr $\frac{1}{20}$ von c beträgt, aber für μ eine gerade Zahl nehmen. Wir setzen daher:

$$\alpha = 459,\ \mu = 436,\ c = \alpha\mu = 200124$$

und außerdem:

$$a = 95064,\ b = 105060.$$

Es ist wieder $v = -\gamma$, aber man muß für γ den ersten Werth in §. 91. nehmen. Auf diese Weise findet man:

$$v = 0{,}74006,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_v^\infty e^{-t^2}\, dt = 0{,}14764,$$

und hieraus folgt:

$$s = 0{,}84279,\ 1 - s = 0{,}15721.$$

Aber da μ eine gerade Zahl ist, so ist der Fall von $m = n$ möglich; seine Wahrscheinlichkeit ist nach der Formel (31) $\sigma = 0{,}92218$, und wenn man die Hälfte davon zu dem Werthe von s addirt; so hat man $s = 0{,}85388$, welche Größe wenig kleiner ist, als die, welche stattfindet, wenn μ eine ungerade Zahl ist.

Um den Einfluß der ungleichen Anzahl der Wählenden in den verschiedenen Wahlcollegien nachzuweisen, wollen wir annehmen, daß

die eine Hälfte der Gesammtzahl der Wählenden unter das eine Drittel der Wahlcollegien und die andere Hälfte unter die beiden andern Drittel gleich vertheilt sei.

Um die vorhergehenden Formeln auf das erste Drittel anzuwenden, setzen wir:

$$\tfrac{1}{3}\alpha = 153\,,\ \mu = 654\,,\ \tfrac{1}{3}\alpha\mu = 100062,$$

und um sie auf die beiden andern Drittel anzuwenden, setzen wir:

$$\tfrac{2}{3}\alpha = 306\,,\ \mu = 327\,,\ \tfrac{2}{3}\alpha\mu = 100062.$$

Ferner wollen wir:

$$a = 95062\,,\ b = 105062\,,\ c = 200124$$

setzen, so daß der Unterschied zwischen der Majorität und Minorität ungefähr wieder $\frac{1}{20}$ der Gesammtzahl der Wählenden beträgt. Im ersten Falle, wo μ eine gerade Zahl ist, findet man:

$$s = 0{,}89429\,,\ \sigma = 0{,}01376\,,\ s + \tfrac{1}{2}\sigma = 0{,}90117$$

und im zweiten Falle, wo μ eine ungerade Zahl ist, erhält man:

$$s = 0{,}81981.$$

Hieraus folgt also:

$$r = \tfrac{1}{2}(0{,}90117 + 0{,}81981) = 0{,}86049$$

für die mittlere Wahrscheinlichkeit einer Wahl im Sinne der Majorität, welche, wie man sieht, etwas größer ist, als wenn alle Wahlcollegien aus derselben Anzahl von Wählenden bestehen.

Wenn der Unterschied $b - a$ zwischen der Majorität und Minorität zunimmt, so nimmt die Wahrscheinlichkeit der Wahlen in dem Sinne der Minorität sehr schnell ab, so daß sie sehr bald Null wird. Um dieses zu zeigen, wollen wir annehmen, daß die Wählenden unter die Wahlcollegien gleich vertheilt sind, für α, μ, c dieselben Zahlen nehmen, als im ersten Beispiele und außerdem:

$$a = 89835\,,\ b = 109830$$

setzen, so daß die Differenz $b - a$ ungefähr $\frac{1}{10}c$ und folglich doppelt so groß, als vorhin ist; so ergibt sich:

$$s = 0{,}98176\,,\ 1 - s = 0{,}01824,$$

so daß die Wahrscheinlichkeit einer Wahl in dem Sinne der Minorität

ungefähr nur noch $\frac{1}{60}$ beträgt. Wegen der Kleinheit von s muss man sich zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P, dass die Anzahl solcher in der Gesammtzahl der Wahlcollegien stattgehabten Wahlen eine gegebene Zahl n nicht überschreitet, der Formel in §. 81. bedienen. Setzt man in dieser Formel:

$$\omega = \alpha(1-s) = 8{,}3713\,,\ n = 15,$$

so ergibt sich daraus:

$$P = 0{,}98713\,,\ 1-P = 0{,}01287,$$

woraus erhellet, dass man fast 100 gegen 1 wetten kann, dass nicht mehr, als 15 Deputirte von der Minorität gewählt werden. Wenn man den Unterschied zwischen der Majorität und Minorität auf 30000, d. h. auf $\frac{3}{20}$ der Gesammtzahl der Wählenden steigen lässt, so findet man, dass die Wahrscheinlichkeit $1-s$ unter $\frac{1}{1000}$ herabsinkt, und dass es folglich sehr wahrscheinlich wäre, dass kein einziger Deputirter von der Minorität gewählt würde.

Viertes Kapitel.

Fortsetzung der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, welche von sehr großen Zahlen abhängen.

§. 94. Wir wollen uns nun mit der Ableitung der Formeln für veränderliche Wahrscheinlichkeiten beschäftigen, welche uns zu den Beweisen der drei in §. 52. und §. 53. ausgesprochenen allgemeinen Sätze, woraus wir das Gesetz der großen Zahlen abgeleitet haben, führen werden.

Wir wollen daher eine Reihe von $\mu = m+n$ successiven Versuchen betrachten, während welcher sich die Wahrscheinlichkeiten der beiden entgegengesetzten Ereignisse E und F auf eine beliebige Weise ändern, diese Wahrscheinlichkeiten bei dem ersten Versuche mit p_1 und q_1, bei dem zweiten Versuche mit p_2 und q_2, ... und bei dem letzten Versuche mit p_μ und q_μ bezeichnen, so dass:

$$p_1+q_1=1\,,\ p_2+q_2=1\,,\ \ldots\ p_\mu+q_\mu=1$$

ist und die Wahrscheinlichkeit, dass E und F in einer beliebigen Ordnung m mal und n mal stattfinden, U nennen; so ist U nach der

Regel in §. 20. der Coefficient von $u^m v^n$ in der Entwickelung des Productes:

$$(up_1 + vq_1)(up_2 + vq_2) \ldots (up_\mu + vq_\mu).$$

Setzt man aber:

$$u = e^{x\sqrt{-1}},\ v = e^{-x\sqrt{-1}},$$

so wird das Glied $U u^m v^n$ dieses Productes $= U e^{(m-n)x\sqrt{-1}}$, und alle übrigen Glieder enthalten andere Exponentialgrößen, als $e^{(m-n)x\sqrt{-1}}$. Bezeichnet man also dieses Product mit X, multiplicirt dasselbe, sowie seine Entwickelung, mit $e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}\,dx$ und integrirt dann von $x = -\pi$ bis $x = \pi$, so verschwinden alle diese übrigen Glieder, und man hat blos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}\,dx = 2\pi U,$$

welches daraus folgt, dass, wenn i und i' zwei ganze Zahlen ausdrücken, welche positiv, negativ, oder Null sind, und wovon die erste $i = m - n$ ist, man hat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i'x\sqrt{-1}}\, e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(i'-i)x + \sin(i'-i)x\sqrt{-1}]\,dx = 0,$$

wenn i und i' von einander verschieden sind, und:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sqrt{-1}}\, e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx = 2\pi,$$

wenn $i' = i$ ist.

Zu gleicher Zeit haben wir:

$$up_i + vq_i = \cos x + (p_i - q_i)\sin\alpha\sqrt{-1},$$

und wenn wir:

$$\cos^2 x + (p_i - q_i)^2 \sin^2 x = \varrho_i^2$$

setzen, so wird es einen reellen Winkel r_i geben, welcher so beschaffen ist, dass man:

$$\frac{1}{\varrho_i}\cos x = \cos r_i,\quad \frac{1}{\varrho_i}(p_i - q_i)\sin x = \sin r_i$$

hat, woraus folgt:

$$up_i + vq_i = \varrho_i e^{r_i\sqrt{-1}}.$$

Das Zeichen von ϱ_i ist zweideutig, und um die Begriffe zu fixiren, wollen wir diese Größe als positiv betrachten. Setzt man der Kürze wegen:

$$\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3\ \ldots\ \varrho_\mu = Y,$$
$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_\mu = y,$$

so verwandelt sich das mit X bezeichnete Product in:

$$X = Ye^{y\sqrt{-1}},$$

und es ist folglich:

$$U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx.$$

Wenn die Werthe von x einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, so sind es die von r_i auch und die von ϱ_i sind einander gleich. Das zweite bestimmte Integral verschwindet folglich, weil es aus Elementen besteht, welche paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, und dieses muss in der That der Fall sein, weil U eine reelle Größe ist. Wenn die Winkel x einander zu zwei Rechten ergänzen, so ist dieses mit den Winkeln r_i vermöge der Ausdrücke für $\sin r_i$ und $\cos r_i$ auch der Fall; die Summe der beiden Werthe von $y-(m-n)x$, welche ihnen entsprechen, ist also $=\mu\pi-(m-n)\pi$, oder $=2n\pi$, und folglich ändert sich der Cosinus von $y-(m-n)x$ nicht. Dasselbe gilt hinsichtlich der Werthe von Y, so dass die x und $\pi-x$, so wie die x und $-x$ entsprechenden Elemente des ersten bestimmten Integrales einander gleich sind. Lässt man also das zweite Integral hinweg, reducirt die Grenzen des ersten auf Null und $\frac{1}{2}\pi$ und multiplicirt das Resultat mit 4, so erhält man:

$$U = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx. \qquad (1)$$

Die angezeigte Integration lässt sich nach den gewöhnlichen Re-

geln immer unter endlicher Form bewerkstelligen. Aber wenn μ kein sehr große Zahl ist, so ist diese Formel bei der Berechnung des Wer thes von U von keinem Nutzen. Ist dagegen diese Zahl sehr groß, s ergibt sich aus dieser Formel, wie man sogleich sehen wird, der Wert von U mit einer so großen Annäherung, als man nur will.

§. **95.** Für $x=0$ reducirt sich jeder der Factoren von Y auf di Einheit und ist für jeden, zwischen den Integrationsgrenzen liegende Werth von x kleiner, als die Einheit. Wenn also μ eine sehr groß Zahl ist, so ist dieses Product im Allgemeinen für alle Werthe von x welche nicht sehr klein sind, eine sehr kleine Größe und Y verschwinde für alle endlichen Werthe von x, wenn μ unendlich wird. Hiervo findet nur dann eine Ausnahme statt, wenn die Factoren von Y ohn Ende gegen die Einheit convergiren; denn bekanntlich kann das Pro duct aus einer unendlichen Anzahl solcher Factoren eine endliche Größ zum Werthe haben. Wegen:

$$\varrho_i^2 = 1 - 4 p_i q_i \sin^2 x$$

würde dieser Umstand nur stattfinden können, wenn eine der Wahr scheinlichkeiten der beiden Ereignisse E und F oder ihr Product $p_i q$ während der Reihe der Versuche ohne Ende abnähme. Wird also die ser besondere Fall ausgeschlossen, so kann man, wenn μ eine sehr groß Zahl ist, die Veränderliche x als eine sehr kleine Größe betrachten un den Theil des vorhergehenden Integrales, welcher den übrigen Werthe von x entspricht, unberücksichtigt lassen.

Entwickelt man alsdann nach den Potenzen von x^2, so erhält ma die sehr convergirende Reihe:

$$\varrho_i = 1 - 2 p_i q_i x^2 + (\tfrac{2}{3} p_i q_i - 2 p_i^2 q_i^2) x^4 - etc.$$

und folglich:

$$\log \varrho_i = - 2 p_i q_i x^2 + (\tfrac{2}{3} p_i q_i - 4 p_i^2 q_i^2) x^4 - etc.,$$

woraus folgt:

$$\log Y = - \mu k^2 x^2 + \mu (\tfrac{1}{3} k^2 - k'^2) x^4 - etc.,$$

wenn man der Kürze wegen:

$$2 \Sigma p_i q_i = \mu k^2, \; 4 \Sigma p_i^2 q_i^2 = \mu k'^2, \; etc.$$

setzt und die Summe Σ von $i=1$ bis $i=\mu$ erstreckt. Wenn ma ferner:

$$x = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$$

etzt, die neue Veränderliche z als eine sehr kleine Größe gegen $\sqrt{\mu}$ etrachtet und die Größen von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\mu}$ unberückſichtigt läſſt, ſo folgt:

$$Y = e^{-k^2 z^2}.$$

lach den Werthen von ϱ_i und $\sin r_i$ hat man ferner:

$$r_i = (p_i - q_i)x + \tfrac{4}{3}(p_i - q_i)p_i q_i x^3 + etc.$$

Mit p und q wollen wir die mittlern Wahrſcheinlichkeiten von E und F während der ganzen Verſuchsreihe bezeichnen, ſo daſſ:

$$p = \frac{1}{\mu}\Sigma p_i,\ q = \frac{1}{\mu}\Sigma q_i,\ p + q = 1$$

t, wo ſich die Summe Σ wieder von $i = 1$ bis $i = \mu$ erſtreckt, und er Kürze wegen:

$$\frac{4}{3\mu}\Sigma(p_i - q_i)p_i q_i = h$$

tzen. Behält man blos die Größen von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ bei, ſo ergibt ſich zunächſt:

$$Y = z(p - q)\sqrt{\mu} + \frac{z^3 h}{\sqrt{\mu}},$$

d dann:

$$\cos[y - (m - n)x] = \cos(zg\sqrt{\mu}) - \frac{z^3 h}{\sqrt{\mu}} \sin(zg\sqrt{\mu}),$$

der Kürze wegen:

$$p - \frac{m}{\mu} - \left(q - \frac{n}{\mu}\right) = g$$

etzt iſt.

Subſtituirt man dieſe Werthe von Y und $\cos[y - (m - n)x]$ die Formel (1) und ſetzt darin $\frac{1}{\sqrt{\mu}}\,dz$ ſtatt dx, ſo kommt:

$$U = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\Big[\int e^{-k^2z^2}\cos(zg\sqrt{\mu})$$
$$-\frac{h}{\sqrt{\mu}}\int e^{-k^2z^2} z^3 \sin(zg\sqrt{\mu})\,dz\Big].$$

Da der Fall, wo die Werthe von p_i und q_i ohne Ende abnehmen, ausgeschlossen ist, so kann k^2 keine sehr kleine Größe sein. Für Werthe von z, welche mit $\sqrt{\mu}$ vergleichbar sind, ist folglich die Exponentialgröße $e^{-k^2z^2}$ unmerklich, und obgleich man dieser Veränderlichen nur sehr kleine Werthe gegen $\sqrt{\mu}$ geben darf, so kann man nun das Integral über diese Grenze hinaus erstrecken und es, wenn man will, von $z=0$ bis $z=\infty$ nehmen, ohne seinen Werth merklich zu verändern. Nach einer bekannten Formel hat man alsdann:

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2}(\cos zg\sqrt{\mu})\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2k}e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Differenzirt man diese Gleichung successive in Beziehung auf g und k, so ergibt sich daraus:

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2} z^3 (\sin zg\sqrt{\mu})\,dz = \frac{g\sqrt{\pi\mu}}{8k^5}\left(3+\frac{\mu g^2}{2k^2}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

und vermittelst dieser Werthe verwandelt sich der von U in:

$$U = \frac{1}{k\sqrt{\pi\mu}}e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}} - \frac{gh}{4k^5\sqrt{\pi\mu}}\left(3+\frac{\mu g^2}{2k^2}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Wegen der Exponentialgröße $e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}$ ist diese Wahrscheinlichkeit unmerklich, sobald g nicht von der Größenordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ist; aber wegen $p+q=1$ und $m+n=\mu$ kann diese Größe g nicht von dieser Größenordnung sein, wofern dieses nicht einzeln für $p-\frac{m}{\mu}$ und $q-\frac{n}{\mu}$, welches überdies gleiche Größen mit entgegengesetztem Zeichen sind, der Fall ist. Wenn man folglich:

$$p-\frac{m}{\mu}=\frac{k\theta}{\sqrt{\mu}},\; q-\frac{n}{\mu}=-\frac{k\theta}{\sqrt{\mu}},\; g=\frac{2k\theta}{\sqrt{\mu}}$$

setzt, so hat die Wahrscheinlichkeit U nur für Werthe von θ, welche positiv, negativ, oder Null, aber gegen $\sqrt{\mu}$ sehr klein sind, merkliche Werthe, und hieraus ergibt sich endlich:

$$U = \frac{1}{k\sqrt{\pi\mu}} e^{-\theta^2} - \frac{k\theta}{2k^4\mu\sqrt{\pi}} (3 + 2\theta^2) e^{-\theta^2} \qquad (2)$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahlen m und n folgende Werthe haben:

$$m = p\mu - \theta k\sqrt{\mu},\; n = q\mu + \theta k\sqrt{\mu};$$

d. h. Werthe, welche fast den mittleren Wahrscheinlichkeiten p und q und der Zahl μ der Versuche proportional sind.

§. 96. Sollen m und n ganze Zahlen sein, so muss θ ein Vielfaches von $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$, oder $= 0$ sein. Setzt man in der Formel (2) $\theta = 0$, so erhält man $\frac{1}{k\sqrt{\pi\mu}}$ für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahlen m und n sich genau wie p und q verhalten. Bezeichnet man mit t eine positive Größe, welche ein Vielfaches von $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$ ist, setzt in der vorhergehenden Formel successive $\theta = -t$ und $\theta = t$ und addirt die beiden erhaltenen Resultate; so drückt ihre Summe $\frac{2}{k\sqrt{\pi\mu}} e^{-t^2}$ die Wahrscheinlichkeit aus, dass m eine der beiden Zahlen $p\mu \mp kt\sqrt{\mu}$, und n eine der beiden Zahlen $q\mu \pm kt\sqrt{\mu}$ ist. Es sei:

$$\frac{1}{k\sqrt{\mu}} = \delta,$$

μ ein gegebenes Vielfache von δ; ferner werde in der vorhergehenden Summe successive $t = \delta$, $= 2\delta$, $= 3\delta$, ... bis $t = u$ gesetzt und die Summe aus den erhaltenen Resulten und dem $\theta = 0$ entsprechenden Werthe von U mit R bezeichnet; so haben wir:

$$R = \frac{1}{k\sqrt{\pi\mu}} + \frac{2}{k\sqrt{\pi\mu}} \Sigma e^{-t^2}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahlen m und n zwischen den Grenzen:

$$p\mu \mp uk\sqrt{\mu},\; q\mu \pm uk\sqrt{\mu}$$

liegen, oder einer derselben gleich sind.

Das Summenzeichen Σ bezieht sich auf die Werthe von $t=\delta$ bis $t=u$, welche nach derselben Differenz δ zunehmen; allein man kann für diese Summe den Unterschied der Summen von e^{-t^2} für die Werthe von $t=\delta$ bis $t=\infty$ und von $t=u+\delta$ bis $t=\infty$ nehmen. Nach der bereits in §. **91.** angewandten Euler'schen Formel wird das Product aus dieser letzten Summe und δ mit dem Grade von Annäherung, bei welchem wir stehen bleiben müssen, d. h. indem man das Quadrat von δ vernachlässigt, durch:

$$\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt - \frac{\delta}{2}\,e^{-u^2}$$

ausgedrückt. Wenn man $u=0$ setzt, so erhält man auch:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}-\tfrac{1}{2}\delta$$

für die von $t=0$ bis $t=\infty$ genommene und mit δ multiplicirte Summe. Wenn man also von dieser letzten Größe die vorhergehende abzieht und durch δ dividirt, so erhält man:

$$\Sigma e^{-t^2}=\frac{1}{2\delta}\sqrt{\pi}-\frac{1}{\delta}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}e^{-u^2}$$

für die im Ausdrucke von R vorkommende Summe, und mit Berücksichtigung des Werthes von δ verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$R=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt+\frac{1}{k\sqrt{\pi\mu}}\,e^{-u^2}. \qquad (3)$$

Wenn die Wahrscheinlichkeiten p_i und q_i constant und folglich den mittleren Wahrscheinlichkeiten p und q gleich sind, so hat man $k=\sqrt{2pq}$, so daß die Formel (3) und die vorhergehenden Grenzen von m und n mit der Formel (17) in §. 79. und den ihr entsprechenden Grenzen übereinstimmen. Diese Uebereinstimmung zweier Resultate, welche durch so verschiedene Methoden erhalten sind, könnte, wenn es nöthig wäre, zur Bestätigung der Richtigkeit unserer Rechnungen dienen.

Nimmt man für u eine etwas beträchtliche Zahl, z. B. die Zahl **3** oder **4**, so ist der Werth von R sehr wenig von der Einheit verschieden. Wenn man also die Anzahl μ der Versuche sehr groß annimmt, so ist es fast gewiß, daß sich die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ sehr wenig von den mittleren Wahrscheinlichkeiten p und q entfernen, welchen sie sich desto mehr nähern, je größer μ noch wird, und welchen sie

in aller Strenge gleich werden würden, wenn μ unendlich groß würde, wodurch also der erste der beiden allgemeinen Sätze in §. 52. bewiesen ist.

§. 97. Es sei nun A irgend eine zu bestimmende Größe, welche mehrere positive oder negative Werthe haben kann und welche wir als Vielfache einer gegebenen Größe ω betrachten wollen. Diese Werthe sollen zwischen den Grenzen $\alpha\omega$ bis $\beta\omega$ incl. liegen, so dass $\beta - \alpha + 1$ ihre Anzahl ist, wo α und β ganze Zahlen bezeichnen, welche auch $= 0$ sein können, und wovon die zweite, ihrem absoluten Werthe nach, größer ist, als die erste, und $\beta = \alpha$ ist, wenn A nur einen einzigen Werth haben kann. Es sind nicht blos alle möglichen Werthe der zu bestimmenden Größe A bei jedem Versuche ungleich wahrscheinlich, sondern es wird auch größerer Allgemeinheit wegen vorausgesetzt, dass sich die Wahrscheinlichkeit desselben Werthes von einem Versuche zum andern ändert. Wenn n also eine beliebige Zahl ist, welche zwischen α und β liegt, oder einer dieser Grenzen gleich ist, so wollen wir die Wahrscheinlichkeit des Werthes $n\omega$ von A bei dem ersten Versuche mit N_1, bei dem zweiten Versuche mit N_2, *etc.* bezeichnen. Ist alsdann s die Summe der Werthe von A, welche bei μ successiven Versuchen stattfinden, so kommt es darauf an, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass diese Summe zwischen gegebenen Grenzen liegt.

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit, dass s genau $= m\omega$ ist, wo m eine gegebene Zahl bezeichnet, welche zwischen α und β liegt, oder einer dieser Grenzen gleich ist, mit Π bezeichnen. Bildet man das Product:

$$\Sigma N_1 t^{n\omega} \,.\, \Sigma N_2 t^{n\omega} \,.\, \Sigma N_3 t^{n\omega} \ldots \Sigma N_\mu t^{n\omega},$$

worin t eine unbestimmte Größe ist und das Summationszeichen Σ sich auf alle Werthe von $n = \alpha$ bis $n = \beta$ erstreckt, und entwickelt dieses Product nach den Potenzen von t^ω, so ist leicht einzusehen, dass Π der Coefficient von $t^{m\omega}$ in dieser Entwickelung ist. Für den Fall $\mu = 1$ ist dieses einleuchtend. Wenn $\mu = 2$ ist und $n'\omega$, $n''\omega$ bezeichnen zwei Exponenten von t, der eine aus der ersten und der andere aus der zweiten Summe Σ; so ist klar, dass der Werth $m\omega$ von A auf so viele verschiedene Weisen stattfinden kann, als die Gleichung $n' + n'' = m$ verschiedene Auflösungen gestattet, wenn man für n' und n'' Zahlen von α bis β nimmt. Die Wahrscheinlichkeit jeder dieser Arten ist das Product der Werthe von N_1 und N_2, welche jedem Paare der Zahlen n' und n'' entsprechen. Folglich wird die Totalwahrscheinlichkeit von $s = m\omega$ durch den Coefficienten von $t^{m\omega}$ in

dem Producte der beiden ersten Summen Σ ausgedrückt. Diese Schlüsse lassen sich leicht auf den Fall von $\mu = 3$, $= 4$, *etc.* ausdehnen. Wenn alle die Größen $N_1, N_2, N_3, \ldots$ einander gleich sind, so verwandelt sich ihr Product in die μte Potenz eines der Polynome, welche den Summen Σ entsprechen, und dieser Fall ist bereits in §. 17. betrachtet.

Setzen wir nun:

$$t^\omega = e^{\theta\sqrt{-1}}$$

und bezeichnen das Product der μ Summen Σ mit X, so haben wir wie weiter oben:

$$\Pi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-m\theta\sqrt{-1}}\, d\theta.$$

Es seien nun i und i' zwei gegebene Zahlen und P die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe s zwischen den Grenzen $i\omega$ und i' liegt, oder einer derselben gleich ist, so ergibt sich der Werth von P aus dem von Π, wenn man darin successive $m = i, = i+1, = i+2, \ldots = i'$ setzt, und da die Summe der correspondirenden Werthe von $e^{-\theta\sqrt{-1}}$ durch:

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\left[e^{-(i'+\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}} - e^{-(i-\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}\right]$$

ausgedrückt wird; so folgt:

$$P = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[e^{-(i'+\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}} - e^{-(i-\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}\right]\frac{X d\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

Zur Vereinfachung dieser Formel wollen wir annehmen, daß ω eine unendlich kleine Größe sei, für i und i' zu gleicher Zeit unendlich große Zahlen nehmen und:

$$i\omega = c - \varepsilon,\ i'\omega = c + \varepsilon,\ \theta = \omega x,\ d\theta = \omega dx$$

setzen, wo c und ε gegebene Constanten sind, wovon die zweite positiv ist, damit $i' > i$ sei, wie es der Ausdruck für P voraussetzt. Die Grenzen der Integration für die neue Veränderliche x sind $\pm\infty$; ferner ist $\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\omega x$, und wenn man $\pm\frac{1}{2}$ gegen i und i' vernachlässigt, so verwandelt sich dieser Werth von P in:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X e^{-cx\sqrt{-1}} \sin\varepsilon x \frac{dx}{x}. \qquad (4)$$

Da die möglichen Werthe von A nach unendlich kleinen Incrementen wachsen, so muss ihre Anzahl als unendlich groß und die Wahrscheinlichkeit eines jeden als unendlich klein angenommen werden. Bezeichnet man durch a und b gegebene Constanten und durch z eine stetige Veränderliche, so kann man:

$$\alpha\omega = a,\ \beta\omega = b,\ n\omega = z$$

setzen. Zu gleicher Zeit hat man:

$$t^{n\omega} = e^{xz\sqrt{-1}},$$

und es werde:

$$N_1 = \omega f_1 z,\ N_2 = \omega f_2 z,\ N_3 = \omega f_3 z,\ etc.$$

gesetzt. Jede der in X vorkommenden Summen Σ verwandelt sich alsdann in ein bestimmtes Integral, wovon a und b die Grenzen sind, und wenn man ω für das Differenzial von z annimmt, so ergibt sich:

$$X = \int_a^b e^{xz\sqrt{-1}} f_1 z\, dz . \int_a^b e^{xz\sqrt{-1}} f_2 z\, dz \ldots .$$
$$\int_a^b e^{xz\sqrt{-1}} f_\mu z\, dz \qquad (5)$$

für das Product der μ Factoren, welches man für X in die Formel (4) substituiren muss.

§. 98. Diese Formel drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Summe der Werthe von A in μ Versuchen zwischen den gegebenen Größen $c - \varepsilon$ und $c + \varepsilon$ liegt. Bei dem $n$ten Versuche ist die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit eines Werthes z von $A = f_n z\, dz$, und da nach der Voraussetzung alle möglichen Werthe von A zwischen a und b liegen, und bei jedem Versuche einer derselben nothwendig stattfinden muss; so muss:

$$\int_a^b f_n z\, dz = 1$$

sein, wo die Function $f_n z$ übrigens continuirlich oder discontinuirlich sein kann, wofern sie innerhalb dieser Grenzen a und b nur eine positive Größe ist.

Wenn sich die Wahrscheinlichkeit jedes Werthes von z während der Versuche nicht verändert, so ist die Function von $f_n z$ unabhängig von n, und bezeichnet man sie mit fz, so hat man:

$$X = \left(\int_a^b e^{xz\sqrt{-1}} fz\,dz\right)^\mu, \quad \int_a^b fz\,dz = 1.$$

Wenn ferner die Werthe von A gleich wahrscheinlich sind, so ist fz eine Constante, welche, um der letzten Gleichung zu genügen, $= \frac{1}{a-b}$ sein muss. Setzt man:

$$a = h - g, \quad b = h + g,$$

so hat man folglich:

$$fz = \frac{1}{2g}, \quad \int_a^b e^{xz\sqrt{-1}} fz\,dz = \frac{\sin g x}{g x} e^{hx\sqrt{-1}};$$

und vermöge dieses Werthes verwandelt sich die Formel (4) in:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin g x}{g x}\right)^\mu \frac{\sin \varepsilon x}{x} \cos(\mu h - c) x\,dx$$
$$+ \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin g x}{g x}\right)^\mu \frac{\sin \varepsilon x}{x} \sin(\mu h - c) x\,dx,$$

oder blos:

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin g x}{g x}\right)^\mu \frac{\sin \varepsilon x}{x} \cos(\mu h - c) x\,dx, \qquad (6)$$

weil das zweite Integral verschwindet, indem es aus Elementen besteht, welche paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, während das erste Integral paarweise gleiche Elemeute mit demselben Zeichen hat. Da der Exponent μ eine ganze und positive Zahl ist, so wollen wir zeigen, dass dieser Werth von P immer unter endlicher Form erhalten werden kann, wenn man die μte Potenz von $\sin g x$ vermittelst der bekannten Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&2^\mu \sin^\mu g x = \\
&(-1)^{\frac{1}{2}\mu}\Big[\cos \mu g x - \mu \cos(\mu-2) g x + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}\cos(\mu-4) g x \\
&\qquad - \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}\cos(\mu-6) g x + etc.\Big] \\
&2^\mu \sin^\mu g x = \\
&(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\Big[\sin \mu g x - \mu \sin(\mu-2) g x + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}\sin(\mu-4) g x \\
&\qquad - \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}\sin(\mu-6) g x + etc.\Big]
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen des Bogens gx entwickelt, wovon jede aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, indem die erste stattfindet, wenn die Zahl μ gerade, und die zweite, wenn sie ungerade ist.

§. 99. Zu dem Zwecke wollen wir bemerken, dass bekanntlich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{x}\,dx = \pm\tfrac{1}{2}\pi$$

ist, wo das obere oder untere Zeichen angenommen werden muss, jenachdem die Constante γ positiv oder negativ ist. Es seien α und θ zwei andere positive Größen, und wir wollen θx und θdx resp. für x und dx setzen, wodurch die Grenzen des Integrales nicht geändert werden, so erhalten wir:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\theta\gamma x}{x}\,dx = \pm\tfrac{1}{2}\pi;$$

und wenn man mit $d\theta$ multiplicirt und hierauf von $\theta=1$ bis $\theta=\alpha$ integrirt, so folgt:

$$\int_0^\infty (\cos\gamma x - \cos\alpha\gamma x)\frac{dx}{x^2} = \mp\tfrac{1}{2}\pi(1-\alpha)\gamma. \qquad (8)$$

Diese Gleichung findet offenbar für $\gamma=0$ statt, obgleich die, woraus sie abgeleitet ist, in diesem besondern Falle nicht stattfindet. Ihr erster Theil ist die Differenz zweier Integrale $\int_0^\infty \cos\alpha\gamma x\frac{dx}{x^2}$ und $\int_0^\infty \cos\gamma\, x\frac{dx}{x^2}$, wovon jedes einen unendlichen Werth hat. Aus diesem Grunde können sie nicht einzeln betrachtet, und der Werth von x kann in dem einen nicht geändert werden, ohne dass es in dem andern geschieht. Setzte man z. B. $\frac{x}{\alpha}$ und $\frac{dx}{\alpha}$ für x und dx in das erste, so verwandelte es sich in $\alpha\int_0^\infty \cos\gamma x\frac{dx}{x^2}$, und wenn man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung durch $1-\alpha$ dividirte, so erhielte man:

$$\int_0^\infty \cos\gamma x\frac{dx}{x^2} = \mp\tfrac{1}{2}\pi\gamma,$$

was ungereimt wäre. Dieselbe Bemerkung ist auf jedes Integral, welches, wie der erste Theil der Gleichung (8) einen endlichen Werth hat, der der Unterschied zweier unendlicher Integrale ist, anwendbar.

Wir wollen diese Gleichung (8) mit $\frac{2}{\pi}d\gamma$ multipliciren, und dann ihre beiden Theile so integriren, daſſ ihre Integrale für $\gamma=0$ verschwinden, welches:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\sin\gamma x-\frac{\sin\alpha\gamma x}{\alpha}\right)\frac{dx}{x^3}=\mp(1-\alpha)\frac{\gamma_2}{1.2}.$$

gibt. Integrirt man ein zweites Mal auf dieselbe Weise, so kommt:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\cos\gamma x-\frac{\cos\alpha\gamma x}{\alpha^2}+\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right)\frac{dx}{x^4}=\pm(1-\alpha)\frac{\gamma^3}{1.2.3},$$

eine dritte und eine vierte Integration würden ebenfalls

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\sin\gamma x-\frac{\sin\alpha\gamma x}{\alpha^3}+\frac{(1-\alpha^2)\gamma}{\alpha^2}\right]\frac{dx}{x^5}$$
$$=\pm(1-\alpha)\frac{\gamma^4}{1.2.3.4},$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos\gamma x-\frac{\cos\alpha\gamma x}{\alpha^4}+\frac{1-\alpha^4}{\alpha^4}+\frac{(1-\alpha^2)\gamma^2}{2\alpha^2}\right]\frac{dx}{x^6}$$
$$=\mp(1-\alpha)\frac{\gamma^5}{1.2.3.4.5}$$

geben, und wenn man auf diese Weise fortführe; so würde man zu Gleichungen von der Form:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\sin\gamma x-\frac{\sin\alpha\gamma x}{\alpha^{\mu-1}}+(1-\alpha)C\right]\frac{dx}{x^{\mu+1}}$$
$$=\pm(-1)^{\frac{1}{2}\mu}(1-\alpha)\frac{\gamma^\mu}{1.2.3\ldots\mu},$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos\gamma x-\frac{\cos\alpha\gamma x}{\alpha^{\mu-1}}+(1-\alpha)C'\right]\frac{dx}{x^{\mu+1}}$$
$$=\mp(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}(1-\alpha)\frac{\gamma^\mu}{1.2.3\ldots\mu}$$

gelangen, wovon die erste dem Falle entspricht, wenn μ eine gerade Zahl und die zweite dem Falle, wenn μ eine ungerade Zahl ist. Die Größen C und C' sind bestimmte Constanten, welche von α und γ abhängen; aber deren leicht zu bildende Ausdrücke wir hier nicht zu kennen brauchen.

Setzt man in jeder dieser Gleichungen $\gamma+\varepsilon$ und $\gamma-\varepsilon$ statt γ, so erhält man durch Subtraction der Resultate:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos\gamma x\sin\varepsilon x-\frac{\cos\alpha\gamma x\sin\alpha\varepsilon x}{\alpha^{\mu-1}}+(1-\alpha)D\right]\frac{dx}{\alpha^{\mu+1}}$$
$$=\pm\frac{(-1)^{\frac{1}{2}\mu}(1-\alpha)}{1.2.3\ldots\mu}\left[(\gamma+\varepsilon)^\mu-(\gamma-\varepsilon)^\mu\right],$$
$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left[\sin\gamma x\sin\varepsilon x-\frac{\sin\alpha\gamma x\sin\alpha\varepsilon x}{\alpha^{\mu-1}}+(1-\alpha)D'\right]\frac{dx}{x^{\mu+1}}$$
$$=\pm\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}(1-\alpha)}{1.2.3\ldots\mu}\left[(\gamma+\varepsilon)^\mu-(\gamma-\varepsilon)^\mu\right],$$

wo die Constanten D und D' von C und C' verschieden sind. Setzt man ferner successive $\gamma+(\mu-2n)g$ und $\gamma-(\mu-2n)g$ für γ, so erhält man, indem man die aus der ersten Gleichung erhaltenen Resultate addirt und die aus der zweiten erhaltenen subtrahirt:

$$\frac{8}{\pi}\int_0^\infty\Big[\cos(\mu-2n)gx\cos\gamma x\sin\varepsilon x-$$
$$\frac{\cos\alpha(\mu-2n)gx\cos\alpha\gamma x\sin\alpha 2x}{\alpha^{\mu-1}}+(1-\alpha)E\Big]\frac{dx}{\pi^{\mu+1}}$$
$$=\frac{(1-\alpha)(-1)^{\frac{1}{2}\mu}}{1.2.3\ldots\mu}\Big[\pm(\gamma+\mu g-2ng+\varepsilon)^\mu\pm(\gamma-\mu g+2ng+\varepsilon)^\mu$$
$$\mp(\gamma+\mu g-2ng-\varepsilon)^\mu\mp(\gamma-\mu g+2ng-\varepsilon)^\mu\Big],$$
$$\frac{8}{\pi}\int_0^\infty\Big[\sin(\mu-2n)g\cos\gamma x\sin\varepsilon x-$$
$$\frac{\sin\alpha(\mu-2n)gx\cos\alpha\gamma x\sin\alpha\varepsilon x}{\alpha^{\mu-1}}+(1-\alpha)E'\Big]\frac{dx}{x^{\mu+1}}$$
$$=\frac{(1-\alpha)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}}{1.2.3\ldots\mu}\Big[\pm(\gamma+\mu g-2ng+\varepsilon)^\mu\mp(\gamma-\mu g+2ng+\varepsilon)^\mu$$
$$\mp(\gamma+\mu g-2ng-\varepsilon)^\mu\pm(\gamma-\mu g+2ng-\varepsilon)^\mu\Big],$$

wo E und E' auch von D und D' verschiedene Constanten sind. Gibt man der Zahl n die successiven Werthe 0, 1, 2, 3, . . ., setzt der Kürze wegen:

$$u=\Big[\cos\mu gx-\cos(\mu-2)gx+\frac{\mu.\mu-1}{1.2}\cos(\mu-4)gx$$
$$-\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}\cos(\mu-6)gx+etc.\Big]\frac{\cos\gamma x\sin\varepsilon x}{x^{\mu-1}}$$

$$v = \left[\sin\mu g x - \mu \sin(\mu-2) g x + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}\sin(\mu-4) g x - \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}\sin(\mu-6) g x + etc.\right] \frac{\cos\gamma x \sin\varepsilon x}{x^{\mu-1}},$$

und bezeichnet mit u' und v' die Werthe von u und v, wenn man darin x in αx verwandelt; so ergibt sich aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$\frac{8}{\pi}\int_0^\infty \left[u - u' + \frac{(1-\alpha)F}{x^{\mu-1}}\right]\frac{dx}{x^2} = \frac{(1-\alpha)(-1)^{\frac{1}{2}\mu}}{1.2.3,\ldots\mu}(\Gamma + \Gamma' - \Gamma_, - \Gamma'_,),$$

$$\frac{8}{\pi}\int_0^\infty \left[v - v' + \frac{(1-\alpha)F'}{x^{\mu-1}}\right]\frac{dx}{x^2} = \frac{(1-\alpha)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}}{1.2.3\ldots\mu}(\Gamma - \Gamma' - \Gamma_, + \Gamma'_,),$$

wo F und F' wieder von E und E' verschiedene Constanten sind. In diesen letzten Gleichungen ist:

$$\Gamma = \pm(\gamma + \mu g + \varepsilon)^\mu \mp (\gamma + \mu g - 2g + \varepsilon)^\mu \pm \frac{\mu.\mu-1}{1.2}(\gamma + \mu g - 4g + \varepsilon)^\mu \mp \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}(\gamma + \mu g - 6g + \varepsilon)^\mu + etc.$$

gesetzt und mit Γ' der Werth von Γ bezeichnet, wenn darin das Zeichen von g geändert wird, und ebenso bezeichnen $\Gamma_,$ und $\Gamma'_,$ die Werthe von Γ und Γ', wenn man darin das Zeichen von ε verändert. Kehrt man nun die Ordnung der Glieder von Γ' und $\Gamma'_,$ welche nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, um, so ist leicht einzusehen, daß $\Gamma' = \Gamma$ und $\Gamma'_, = \Gamma_,$ ist, wenn μ eine gerade Zahl ist; aber $\Gamma_, = -\Gamma$ und $\Gamma'_, = -\Gamma_,$, wenn μ ungerade ist. Die vorhergehenden Gleichungen reduciren sich daher auf die folgenden einfachern:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \left[u - u' + \frac{(1-\alpha)F}{x^{\mu-1}}\right]\frac{dx}{x^2} = \frac{(1-\alpha)(-1)^{\frac{1}{2}\mu}(\Gamma - \Gamma_,)}{1.2.3\ldots\mu}, \\ &\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \left[v - v' + \frac{(1-\alpha)F'}{x^{\mu-}}\right]\frac{dx}{x^2} = \frac{(1-\alpha)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}(\Gamma - \Gamma_,)}{1.2.3\ldots\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

In jeder der beiden Größen Γ und Γ', welche diese Gleichungen enthalten, muss man nach dem Ursprunge der doppelten Zeichen ihrer verschiedenen Glieder das obere oder untere Zeichen eines beliebigen Gliedes nehmen, je nachdem die darin vorkommende, zur Potenz μ erhobene Größe positiv oder negativ ist.

Nun hat man aber vermöge der Gleichungen (7):

$$\int_0^\infty \frac{u\,dx}{x^2} = (-1)^{\frac{1}{2}\mu}\, 2^\mu \int_0^\infty \sin^\mu gx \cos\gamma x \sin\varepsilon x \frac{dx}{x^{\mu+1}},$$

$$\int_0^\infty \frac{v\,dx}{x^2} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\, 2^\mu \int_0^\infty \sin^\mu gx \cos\gamma x \sin\varepsilon x \frac{dx}{x^{\mu+1}}.$$

Die in den zweiten Theilen dieser Gleichungen enthaltenen Integrale sind endliche Größen; die Integrale $\int_0^\infty \frac{u\,dx}{x^2}$ und $\int_0^\infty \frac{v\,dx}{x^2}$ und folglich die, welche sich daraus ergeben, wenn man u' und v' statt u und v setzt, haben auch endliche Werthe, und mithin ist die, in Beziehung auf die Gleichung (8) gemachte Bemerkung nicht mehr auf die Gleichungen (9) anwendbar. Setzt man nun $\frac{x}{\alpha}$ und $\frac{dx}{\alpha}$ für x und dx in die u' und v' entsprechenden Integrale, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{u'\,dx}{x^2} = \alpha \int_0^\infty \frac{u\,dx}{x^2},\quad \int_0^\infty \frac{v'\,dx}{x^2} = \alpha \int_0^\infty \frac{v\,dx}{x^2}$$

und vermöge dieser und der vorhergehenden Formeln verwandeln sich die Gleichungen (9) in folgende:

$$\frac{4}{\pi}\left[2^\mu \int_0^\infty \sin^\mu gx \cos\gamma x \sin\varepsilon x \frac{dx}{x^{\mu+1}} + (-1)^{\frac{1}{2}\mu} F \int_0^\infty \frac{dx}{x^{\mu+1}}\right] = \frac{\Gamma - \Gamma_,}{1.2.3\ldots\mu},$$

$$\frac{4}{\pi}\left[2^\mu \int_0^\infty \sin^\mu gx \cos\gamma x \sin\varepsilon x \frac{dx}{x^{\mu+1}} + (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} F' \int_0^\infty \frac{dx}{x^{\mu+1}}\right] = \frac{\Gamma - \Gamma_,}{1.2.3\ldots\mu}.$$

Da aber das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{\mu+1}}$ unendlich ist, so könnten diese beiden Gleichungen nicht stattfinden, wenn die Constanten F und F'

nicht Null wären, und es muss folglich identisch $F=0$ und $F'=0$ sein, was sich übrigens darthun ließe, wenn es nöthig wäre. Demnach reduciren sich die beiden letzten Gleichungen auf eine einzige, nämlich:

$$\frac{4}{\pi} 2^{\mu} \int_0^{\infty} \sin^{\mu} gx \cos \gamma x \sin \varepsilon x \frac{dx}{x^{\mu+1}} = \frac{\Gamma - \Gamma_{,}}{1.2.3\ldots\mu}.$$

welche für beide Fälle, μ mag gerade oder ungerade sein, stattfindet. Wenn man darin:

$$\gamma = \mu h - c$$

setzt, und die Formel (6) berücksichtigt, so ergibt sich daraus endlich die Gleichung:

$$2(2g)^{\mu} P = \frac{\Gamma - \Gamma_{,}}{1.2.3\ldots\mu}, \qquad (10)$$

welche den gesuchten Werth von P unter endlicher Form gibt.

§. **100.** Für $\mu=1$ oder bei einer einzigen Beobachtung ist P die Wahrscheinlichkeit, dass der Werth von A, welcher nach der Voraussetzung zwischen den gegebenen Grenzen a und b, oder $h-g$ und $h+g$ liegen muss, nach der Beobachtung zwischen den ebenfalls gegebenen Grenzen $c-\varepsilon$ und $c+\varepsilon$ liegt. Wenn diese letzten Grenzen die ersten zwischen sich schließen, so muss folglich $P=1$ sein; wenn dagegen die letzten Grenzen innerhalb der ersten liegen, so muss P das Verhältniss des Intervalles 2ε der letzten zu dem Intervalle $2g$ der ersten sein. Wenn die letzten Grenzen beide außerhalb des Intervalles der ersten fallen, so muss $P=0$ sein. Wenn $c-\varepsilon$ in das Intervall von $h-g$ und $h+g$ und $c+\varepsilon$ außerhalb desselben fällt, so muss P das Verhältniss des Unterschiedes zwischen $h+g$ und $c-\varepsilon$ zu dem Intervalle $2g$ sein, und wenn endlich $c+\varepsilon$ in das Intervall von $h-g$ und $h+g$ und $c-\varepsilon$ außerhalb desselben fällt; so muss P das Verhältniss des Ueberschusses von $c+\varepsilon$ über $h-g$ zu dem Intervalle $2g$ sein. Diese 5 verschiedenen Werthe von P, nämlich:

$$P=1,\ P=\frac{\varepsilon}{g},\ P=0,$$

$$P=\frac{h+g-c+\varepsilon}{2g},\ P=\frac{c+\varepsilon-h+g}{2g}$$

ergeben sich in der That aus der Gleichung (10), welche für $\mu=1$ gibt:

$$P = \frac{1}{4g}(\Gamma - \Gamma_{,}).$$

Zu gleicher Zeit ist $\gamma = h - c$ und folglich:

$$\Gamma = \pm(h + g - c + \varepsilon) \mp (h - g - c + \varepsilon)$$
$$\Gamma_{,} = \pm(h + g - c - \varepsilon) \mp (h - g - c - \varepsilon).$$

In dem ersten der eben angeführten 5 Fälle ist offenbar $c + \varepsilon > h + g$ und $c - \varepsilon < h - g$; die zwischen den Parenthesen stehenden Größen sind in dem Werthe von Γ positiv und in dem von $\Gamma_{,}$ negativ; man muss also bei dem ersten die obern und bei dem letztern die untern Zeichen nehmen, und hieraus ergibt sich:

$$\Gamma = 2g, \ \Gamma_{,} = -2g, \ P = 1.$$

Im zweiten Falle hat man $h + g > c + \varepsilon$ und $h - g < c - \varepsilon$. Man muss also in den ersten Gliedern von Γ und $\Gamma_{,}$ die obern und in den zweiten Gliedern derselben die untern Zeichen nehmen, so dass man hat:

$$\Gamma = 2h - 2c + 2\varepsilon, \ \Gamma_{,} = 2h - 2c - 2\varepsilon, \ P = \frac{1}{g}.$$

Im dritten Falle ist $h - g > c + \varepsilon$, und man muss in den Ausdrücken von Γ und $\Gamma_{,}$ die obern Zeichen nehmen, welches:

$$\Gamma = 2g, \ \Gamma_{,} = 2g, \ P = 0$$

gibt. Man kann in diesem dritten Falle auch $h + g < c - \varepsilon$ haben, so dass man die untern Zeichen nehmen muss, die Werthe von Γ und $\Gamma_{,}$ das Zeichen verändern und außerdem $P = 0$ ist.

Im vierten Falle ist $c - \varepsilon > h - g$, $c - \varepsilon < h + g$, $c + \varepsilon > h + g$, so dass man in den beiden Gliedern von $\Gamma_{,}$ die untern Zeichen, in dem ersten Gliede von Γ das obere und in dem zweiten das untere Zeichen nehmen muss, woraus folgt:

$$\Gamma = 2h - 2c + 2\varepsilon, \ \Gamma_{,} = -2g, \ P = \frac{h + g - c + \varepsilon}{2g}.$$

Endlich ist im fünften Falle $c - \varepsilon < h - g$, $c + \varepsilon > h - g$, $c + \varepsilon < h + g$. Man muss folglich in dem Ausdrucke von Γ die obern Zeichen beider Glieder, in dem Ausdrucke von $\Gamma_{,}$ das obere Zeichen des ersten und das untere des zweiten Gliedes nehmen, welches gibt:

$$\Gamma = 2g, \ \Gamma_{,} = 2h - 2c - 2\varepsilon, \ P = \frac{c + \varepsilon - h + g}{2g}.$$

Für den Fall einer einzigen Beobachtung kann die Nachweisung der Richtigkeit des Werthes von P auch vermittelst des allgemeinen Werthes geschehen, welchen die Formel (4) gibt. Wenn man in diesem Falle $f_i z$ als eine discontinuirliche Function betrachtet, welche für alle, nicht zwischen den gegebenen Grenzen a und b liegenden Werthe Null ist; so wird die Wahrscheinlichkeit P, daſſ der Werth von A zwischen die Grenzen $c \mp \varepsilon$ fallen muſſ, offenbar ausgedrückt durch:

$$P = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f_i z\, dz.$$

Nun hat man aber für $\mu = 1$ nach den Formeln (5) und (4):

$$X = \int_a^b e^{xz\sqrt{-1}} f_i z\, dz,$$

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_a^b e^{xz\sqrt{-1}} f_i z\, dz\right) e^{-cx\sqrt{-1}} \sin \varepsilon x \frac{dx}{x},$$

und wenn man die Ordnung der Integrationen nach x und z umkehrt, und die imaginären Ausdrücke fortschafft, so läſſt sich der Werth von P folgendermaßen ausdrücken:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_a^b\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin(c+\varepsilon-z)x}{x}dx - \int_0^{\infty}\frac{\sin(c-\varepsilon-z)x}{x}dx\right] f_i z\, dz.$$

Es ist aber wie oben:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin \gamma x}{x}dx = \pm\tfrac{1}{2}\pi,$$

jenachdem die Größe γ positiv oder negativ ist. Der Unterschied der beiden Integrale nach x ist folglich $= 0$ oder $= \pi$, jenachdem die beiden Größen $c+\varepsilon-z$ und $c-\varepsilon-z$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Das Integral in Beziehung auf z reducirt sich also für jeden Werth von z, welcher entweder größer, als $c+\varepsilon$, oder kleiner, als $c-\varepsilon$ ist, auf Null. Es muſſ sich also nur auf die Werthe von z erstrecken, welche gleichzeitig zwischen den Grenzen a und b und den Grenzen $c-\varepsilon$ und $c+\varepsilon$ liegen, und da wir $f_i z$ für alle außerhalb der Grenzen a und b fallende Werthe von z als gleich 0 betrachten; so reducirt sich der Werth von P auf das Integral:

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f_i z\, dz,$$

was bewiesen werden sollte.

§. 101. Wenn μ eine sehr große Zahl ist, so kann man die Formel (4) durch ähnliche Transformationen, wie die in §. 95., in eine andere verwandeln, welche einen Näherungswerth von P gibt.

Zunächst wollen wir bemerken, dass sich die Formel (5) folgendermaßen ausdrücken lässt:

$$X=\int_a^b e^{xz_1\sqrt{-1}} f_1 z_1\, dz_1 \int_a^b e^{xz_2\sqrt{-1}} f_2 z_2\, dz_2 \ldots$$
$$\int_a^b e^{xz_\mu\sqrt{-1}} f_\mu z_\mu\, dz_\mu .$$

Setzen wir ferner:

$$\left(\int_a^b f_n z_n \cos x z_n\, dz_n\right)^2+\left(\int_a^b f_n z_n \sin x z_n\, dz_n\right)^2=\varrho_n^2,$$

so wird es einen reellen Winkel r_n von der Beschaffenheit geben, dass

$$\frac{1}{\varrho_n}\int_a^b f_n z_n \cos x z_n\, dz_n=\cos r_n,$$
$$\frac{1}{\varrho_n}\int_a^b f_n z_n \sin x z_n\, dz_n=\sin r_n$$

ist, und wenn man ferner der Kürze wegen

$$\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3 \ldots \varrho_\mu=Y,$$
$$r_1+r_2+r_3 \ldots +r_\mu=y$$

setzt; so verwandelt sich der vorhergehende Werth von X in:

$$X=Y e^{y\sqrt{-1}}.$$

Substituirt man denselben in die Formel (4), so erhält man folglich:

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y \cos(y-cx) \sin \varepsilon x\, \frac{dx}{x}+$$
$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y \sin(y-cx) \sin \varepsilon x\, \frac{dx}{x},$$

und da die Elemente des zweiten Integrales paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, während die des ersten paarweise einander gleich sind und dasselbe Zeichen haben; so reducirt sich dieser Werth von P auf:

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Y \cos(y - cx) \sin \varepsilon x \frac{dx}{x}. \qquad (11)$$

Für $x = 0$ ist $\varrho_n = 1$ und für jeden andern Werth von x ist der von ϱ_n kleiner, als die Einheit; denn der Ausdruck von ϱ_n^2 lässt sich offenbar in folgenden verwandeln:

$$\varrho_n^2 = \int_a^b f_n z \cos xz\, dz \,.\, \int_a^b f_n z' \cos xz'\, dz' +$$
$$\int_a^b f_n z \sin xz\, dx \,.\, \int_a^b f_n z' \sin xz'\, dz',$$

welcher gleichbedeutend ist mit:

$$\varrho_n^2 = \int_a^b \int_a^b f_n z f_n z' \cos x(z - z')\, dz\, dz'.$$

Diese Größe ist aber offenbar für jeden von der Einheit verschiedenen Werth von x kleiner, als:

$$\int_a^b \int_a^b f_n z f_n z'\, dz\, dz', \text{ oder als } \int_a^b f_n z\, dz \,.\, \int_a^b f_n z'\, dz',$$

und folglich kleiner, als die Einheit, weil:

$$\int_a^b f_n z\, dz = 1 \text{ und } \int_a^b f_n z'\, dz' = 1$$

sein muss.

Ist nun die Zahl μ sehr groß, so folgt, dass das Product Y, welches für $x = 0$ der Einheit gleich ist, sich im Allgemeinen auf einen sehr kleinen Bruch reducirt, sobald die Werthe der Veränderlichen x nicht mehr sehr klein sind, und welcher streng gleich Null sein würde, wenn μ unendlich werden könnte. Wird also, wie in §. 95., von dem besondern Falle abstrahirt, wo Y gegen eine von Null verschiedene Größe convergirt,*) so darf die Größe x in dem in der Formel (11) vorkommenden Integrale nur sehr kleine Werthe bekommen, an deren Grenze der Werth von Y unmerklich wird, so dass, wenn man

$$Y = e^{-\theta^2}$$

setzt, die Veränderliche θ an dieser Grenze unendlich groß angenommen

*) Wegen der Untersuchung dieses besondern Falles verweisen wir auf unsere bereits in §. 60. angeführte Abhandlung in der Connaissance des Tems 1827.

werden kann, und daſſ man, wenn man dieſe Veränderliche für x in das Integral ſubſtituirt, Null und das Unendliche für die Grenzen des Integrales in Beziehung auf θ nehmen muſſ.

Um x und dx vermittelſt θ und $d\theta$ auszudrücken, entwickeln wir die vorhergehenden Werthe von $\varrho_n \cos r_n$ und $\varrho_n \sin r_n$ nach den Potenzen von x. Setzt man unter den Integralzeichen z ſtatt z_n und:

$$\int_a^b z f_n z\, dz = k_n, \int_a^b z^2 f_n z\, dz = k''_n,$$

$$\int_a^b z^3 f_n z\, dz = k''_n, \text{ etc.},$$

ſo hat man in convergirenden Reihen:

$$\varrho_n \cos r_n = 1 - \frac{x^2}{1.2} k'_n + \frac{x^4}{1.2.3.4} k'''_n - \text{etc.},$$

$$\varrho_n \sin r_n = x k_n - \frac{x^3}{1.2.3} k''_n + \text{etc.}$$

Setzt man ferner:

$$\tfrac{1}{2}(k'_n - k''_n) = h_n, \ \tfrac{1}{6}(k''_n - 3 k_n k'_n + 2 k_n^3) = g_n \ \text{ etc.},$$

ſo ergibt ſich aus dieſen Reihen:

$$\varrho_n = 1 - x^2 h_n + x^4 l_n - \text{etc.},$$

$$r_n = x k_n - x^3 g_n + \text{etc.},$$

und aus dem Werthe von ϱ_n ergibt ſich alsdann:

$$\log \varrho_n = -x^2 h_n + x^4 (l_n - \tfrac{1}{2} h_n^2) - \text{etc.}$$

Setzt man ferner:

$$\Sigma k_n = \mu k, \ \Sigma h_n = \mu h, \ \Sigma g_n = \mu g,$$

$$\Sigma (l_n - \tfrac{1}{2} h_n^2) = \mu l, \text{ etc.},$$

wo ſich die Summen Σ immer von $n = 1$ bis $n = \mu$ erſtrecken, ſo hat man:

$$\log Y = -\theta^2 = -x^2 \mu h + x^4 \mu l - \text{etc.},$$

und folglich:

$$x = \frac{\theta}{\sqrt{\mu h}} + \frac{l\theta^3}{2\mu h^2 \sqrt{\mu h}} + etc.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\theta}{\theta} + \frac{l\theta\, d\theta}{\mu h^2} + etc.,$$

und zu gleicher Zeit hat man:

$$y - cx = (\mu k - c)x - \frac{g\theta^3}{h\sqrt{\mu h}} + etc.,$$

$$\cos(y - cx) = \cos(\mu k - c)x + \frac{g\theta^3}{h\sqrt{\mu h}} \sin(\mu k - c)x + etc.$$

Vermittelst dieser verschiedenen Werthe verwandelt sich die Formel (11) in:

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \cos(\mu k - c)x \sin \varepsilon x \frac{d\theta}{\theta}$$

$$+ \frac{2g}{\pi h \sqrt{\mu h}} \int_0^\infty e^{-\theta^2} \sin(\mu k - c)x \sin \varepsilon x \,.\, \theta^2\, d\theta, \quad (12)$$

wenn man die Glieder hinweglässt, worin μ als Divisor vorkommen würde, und x für seinen Werth unter den Zeichen *sin* und *cos* beibehält.

Setzt man:

$$c = \mu k,$$

so reducirt sich diese Formel auf:

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \sin \frac{\varepsilon\theta}{\sqrt{\mu h}} \frac{d\theta}{\theta},$$

wenn man annimmt, dass das Verhältniss von ε zu $\sqrt{\mu}$ keine große Zahl ist, so dass man den Werth von εx auf sein erstes Glied $\frac{\varepsilon\theta}{\sqrt{\mu h}}$ reduciren kann. Da aber α eine unbestimmte Constante ist, so hat man nach einer bekannten Formel:

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2} \cos \frac{\alpha\theta}{\sqrt{\mu h}}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu h}},$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\frac{d\alpha}{\sqrt{\mu h}}$ und integrirt dann von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \varepsilon$, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2} \sin\frac{\varepsilon\theta}{\sqrt{\mu h}}\frac{d\theta}{\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\theta}{\mu h}}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu h}} d\alpha,$$

und wenn man

$$\alpha = 2t\sqrt{\mu h},\ d\alpha = 2\sqrt{\mu h}\,dt,\ \varepsilon = 2u\sqrt{\mu h}$$

setzt, und erwägt, daſſ:

$$\int_0^u e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_u^\infty e^{-t^2} dt$$

iſt; ſo folgt endlich:

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2} dt \qquad (13)$$

für die Wahrſcheinlichkeit, daſſ bei einer ſehr großen Anzahl μ von Verſuchen die Summe s der Werthe von A zwiſchen den Grenzen:

$$\mu k \mp 2u\sqrt{\mu h}$$

liegt, oder was daſſelbe iſt, für die Wahrſcheinlichkeit, daſſ der ſich aus dieſen μ ſucceſſiven Verſuchen ergebende mittlere Werth $\frac{s}{\mu}$ von A zwiſchen den Grenzen:

$$k \mp \frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$$

liegt.

§. **102.** Wenn man der Größe u einen wenig beträchtlichen Werth gibt, ſo daſſ aber die Formel (13) einen ſehr wenig von der Einheit verſchiedenen Werth gibt, ſo folgt daraus, daſſ das Verhältniſſ $\frac{s}{\mu}$ wahrſcheinlich ſehr wenig von der Größe k verſchieden iſt, und da dieſe Größe die Summe der möglichen Werthe von A, mit ihren reſp. Wahrſcheinlichkeiten multiplicirt und durch die Zahl μ der Verſuche dividirt, ausdrückt, d. h. die Summe dieſer mit ihren reſp. Wahrſcheinlichkeiten multiplicirten Werthe; ſo folgt endlich, daſſ der Satz in §. 53. auf dieſe Weiſe in ſeiner ganzen Allgemeinheit bewieſen iſt.

Bei einer ſehr großen Anzahl μ von Verſuchen nähert ſich alſo die Wahrſcheinlichkeit, daſſ der mittlere Werth von A ſehr wenig von der Größe k verſchieden iſt, ſehr der Gewiſſheit. Die Differenz $\frac{s}{\mu} - k$

nimmt fortwährend ab, je größer μ wird und würde völlig $= 0$ sein, wenn diese Zahl unendlich groß würde.

Wenn man eine ebene Curve construirt, deren veränderliche Coordinaten z und $f_n z$ sind, so drückt sie das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werthe von A in dem $n$ten Versuche aus, so dass das Element $f_n z\,dz$ der von dieser Curve eingeschlossenen Fläche die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit des Werthes von A ist, welcher durch die Abscisse z ausgedrückt wird. Die Curve, deren veränderliche Coordinaten z und $\frac{1}{\mu}\Sigma f_n z$ sind, drückt ebenso das Gesetz der mittlern Wahrscheinlichkeiten der Werthe von A für die Reihe von μ Versuchen aus. Da das Integral $\int_a^b f_n z\,dz = 1$ ist, so wird die von dieser Curve eingeschlossene Fläche von $z = a$ bis $z = b$ auch durch die Einheit ausgedrückt, und wenn man die Abscisse ihres Schwerpunktes mit ζ bezeichnet, so hat man:

$$k = \frac{1}{\mu}\Sigma\int_a^b z f_n z\,dz = \zeta,$$

so dass diese Abscisse die Größe k ist, gegen welche in allen Fällen der mittlere Werth von A convergirt. Diese Größe ist jedesmal $= 0$ wenn die Werthe von A ihrer Natur nach bei jedem Versuche gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind und gleiche Wahrscheinlichkeiten haben, d. h. wenn für alle Werthe von n und z:

$$f_n(-z) = f_n z$$

ist.

Die Größe h muss positiv sein, damit die Grenzen von $\frac{s}{\mu}$ reell sind, was sich auch leicht darthun lässt; denn nach dem Werthe von h_n und wegen $\int_a^b f_n z'\,dz' = 1$ kann man setzen:

$$2h_n = \int_a^b z^2 f_n z\,dz \,.\int_a^b f_n z'\,dz' - \int_a^b z f_n z\,dz \,.\int_a^b z' f_n z'\,dz',$$

oder was dasselbe ist:

$$2h_n = \int_a^b\int_a^b (z^2 - zz') f_n z f_n z'\,dz\,dz',$$

oder auch:

$$2h_n = \int_a^b \int_a^b (z'^2 - z'z) f_n z' f_n z \, dz' \, dz;$$

folglich, wenn man diese letzten beiden Gleichungen addirt:

$$4h_n = \int_a^b \int_a^b (z - z')^2 f_n z f_n z' \, dz \, dz'.$$

Nun ist aber dieser Werth von $4h_n$ offenbar positiv und kann nicht mehr Null werden, weil alle Elemente des doppelten Integrales positiv sind, und dasselbe gilt folglich auch von der Summe Σh_n und von h.

Der einfachste Fall ist der, wo alle Werthe von A während der ganzen Reihe der Versuche dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Alsdann hat man für jeden Werth von n:

$$f_n z = \frac{1}{b-a},$$

damit dieser constante Werth $f_n z$ der Bedingung $\int_a^b f_n z \, dz = 1$ genügt, und hieraus folgt:

$$k_n = k = \tfrac{1}{2}(a+b),$$
$$h_n = h = \tfrac{1}{6}(a^2 + ab + b^2) - \tfrac{1}{8}(a+b)^2.$$

Die Grenzen der Größe $\frac{s}{\mu}$, deren Wahrscheinlichkeit P ist, sind folglich:

$$\tfrac{1}{2}(a+b) \mp \frac{u(b-a)}{\sqrt{6\mu}},$$

und sie reduciren sich auf $\mp \frac{2ub}{\sqrt{6\mu}}$, wenn man $a = -b$ hat. Nimmt man z. B.:

$$u = 0{,}4765 \text{ (§. 82.)},$$

so ist es gleich wahrscheinlich, daß der mittlere Werth $\frac{s}{\mu}$ innerhalb, oder außerhalb der Grenzen $\mp (0{,}389)\frac{b}{\sqrt{\mu}}$ liegt, und wenn man $\mu = 600$ setzt, so kann man 1 gegen 1 wetten, daß der Werth von $\frac{s}{\mu}$ nicht

um eine beträchtlichere Größe, als $\frac{0,4765}{3.10}b=(0,016)b$ von Null verschieden ist.

Dieser Fall findet statt, wenn ein Punkt M bei jedem Versuche auf eine gerade Linie von der Länge $2b$ fallen soll, und wenn alle Lagen des Punktes M auf dieser Geraden als gleich wahrscheinlich angenommen werden. P ist alsdann die Wahrscheinlichkeit, daß die mittlere Entfernung des Punktes M von der Mitte der Geraden bei einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen den Theil $\frac{2u}{\sqrt{6\mu}}$ der halben Länge b dieser Geraden nicht überschreitet. Wenn der Punkt M bei jedem Versuche auf die Fläche eines Kreises von dem Halbmesser b fallen sollte, und alle gleichen Entfernungen des Punktes M vom Mittelpunkte des Kreises als gleich wahrscheinlich angenommen werden; so ist klar, daß die Wahrscheinlichkeit $f_n z\,dz$ für eine Entfernung z dieser Entfernung proportional ist. Würde diese Wahrscheinlichkeit während der Versuche als unveränderlich angenommen und man bemerkt, daß alle Entfernungen des Punktes M vom Mittelpunkte des Kreises zwischen Null und b liegen; so müßte man $f_n z=\frac{2z}{b^2}$ nehmen, um der Bedingung $\int_0^b f_n z\,dz=1$ zu genügen, so daß man hätte:

$$k_n=k=\frac{2b}{3},\ 2h_n=2h=\tfrac{1}{2}b^2-\tfrac{4}{9}b^2,$$

und P wäre die Wahrscheinlichkeit, daß bei μ Versuchen die mittlere Entfernung des Punktes M vom Mittelpunkte des Kreises zwischen den Grenzen:

$$\frac{2b}{3}\mp\frac{ub}{3\sqrt{\mu}}.$$

liegt.

§. **103.** Obgleich wir angenommen haben, daß die Größe A alle zwischen den Grenzen a und b liegende, aber ungleich wahrscheinliche Werthe annehmen kann (97), so sind die Formeln, welche wir erhalten haben, doch auch auf den Fall anwendbar, wo die Anzahl der möglichen Werthe von A begrenzt ist, und man braucht zu dem Zwecke nur die Functionen $f_1 z, f_2 z, f_3 z$, *etc.*, welche die Gesetze der Wahrscheinlichkeiten der Werthe von A bei den μ successiven Versuchen ausdrücken, als discontinuirlich zu betrachten.

Denn $c_1, c_2, c_3, \ldots c_\nu$, seien ν zwischen a und b liegende

Werthe von z, und wir wollen annehmen, daſſ die Function $f_n z$ für alle Werthe von z verschwinde, welche nicht von einer der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots c_\nu$ unendlich wenig verschieden sind. Ferner wollen wir, indem δ eine unendlich kleine Größe bezeichnet, annehmen, daſſ

$$\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} f_n z\,dz = \gamma_1, \int_{c_2-\delta}^{c_2+\delta} f_n z\,dz = \gamma_2, \ldots$$
$$\int_{c_\nu-\delta}^{c_\nu+\delta} f_n z\,dz = \gamma_\nu$$

ist, so daſſ A nur ν gegebene Werthe $c_1, c_2, c_3, \ldots c_\nu$ haben kann, deren respective Wahrscheinlichkeiten bei dem n ten Versuche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots \gamma_\nu$ sind, und für die verschiedenen Versuche, d. h. mit der Zahl n veränderlich sein können. Da aber einer dieser Werthe bei dem n ten Versuche zuverlässig stattfinden muſſ, so muſſ man für alle Werthe von $n=1$ bis $n=\mu$ haben:

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots+\gamma_\nu=1.$$

Diese Summe der Größen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ ist überdies der Werth des Integrales $\int_a^b f_n z\,dz$, und diese Gleichung erfüllt die Bedingung $\int_a^b f_n z\,dz = 1$.

Für einen beliebigen Index i hat man identisch:

$$\int z f_n z\,dz = c_i \int f_n z\,dz + \int (z-c_i) f_n z\,dz,$$
$$\int z^2 f_n z\,dz = c_i^2 \int f_n z\,dz + 2c_i \int (z-c_i) f_n z\,dz +$$
$$\int (z-c_i)^2 f_n z\,dz.$$

Wenn man diese Integrale zwischen den Grenzen $c \mp \delta$ nimmt, so verschwinden diejenigen, welche den Factor $z - c_i$ unter dem Integrationszeichen haben, weil dieser Factor innerhalb dieser Grenzen unendlich klein ist, und die übrigen Integrale haben den Werth γ_i. Man hat also:

$$\int_{c_i-\delta}^{c_i+\delta} z f_n z\,dz = \gamma_i c_i, \int_{c_i-\delta}^{c_i+\delta} z^2 f_n z\,dz = \gamma_i c_i^2,$$

woraus folgt:

$$\int_a^b z f_n z\,dz = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu,$$

$$\int_a^b z^2 f_n z\,dz = \gamma_1 c_1^2 + \gamma_2 c_2^2 + \gamma_3 c_3^2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu^2,$$

und hiernach verwandeln sich die in §. **101.** durch k und h bezeichneten Größen in:

$$k = \frac{1}{\mu}\,\Sigma(\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu),$$

$$h = \frac{1}{2\mu}\,\Sigma[(\gamma_1 c_1^2 + \gamma_2 c_2^2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu^2) - (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots + c_\nu\gamma_\nu)^2],$$

wo sich die Summen Σ auf alle μ Versuche erstrecken. Die Formel (**13**) drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, daſs die Summe s der Werthe von A in dieser Versuchsreihe innerhalb der Grenzen $\mu k \mp 2u\sqrt{\mu h}$ liegt, in welche man für k und h die eben gefundenen Werthe setzen muſs, und die sich leicht berechnen lassen, wenn die ν möglichen Werthe von A und ihre respectiven Wahrscheinlichkeiten für jeden Versuch gegeben sind.

Wenn diese Wahrscheinlichkeiten constant und außerdem einander gleich sind, so ist ihr gemeinschaftlicher Werth $= \frac{1}{\nu}$, und man hat:

$$k = \frac{1}{\nu}(c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\nu),$$

$$h = \frac{1}{2\nu^2}[\nu(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_\nu^2) - (c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\nu)^2].$$

Wir wollen z. B. annehmen, daſs die möglichen Werthe von A die auf den **6** Flächen eines gewöhnlichen Würfels, womit eine sehr große Anzahl μ successiver Würfe gemacht werden, befindlichen **6** Zahlen sind; so hat man, wenn man von der kleinen Ungleichheit, welche zwischen den Wahrscheinlichkeiten für das Obenliegen dieser **6** Flächen stattfinden kann, abstrahirt:

$$\nu = 6,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2,$$
$$c_3 = 3,\ c_4 = 4,\ c_5 = 5,\ c_6 = 6;$$

folglich:

$$k = \tfrac{7}{2},\ h = \tfrac{35}{24},$$

und die Formel (**13**) drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daſs die Summe

der Zahlen, welche man in μ successiven Versuchen trifft, zwischen den Grenzen:

$$\tfrac{1}{2}\left(7\mu \mp u\sqrt{\frac{70\mu}{3}}\right)$$

liegt.

Nimmt man $u = 0,4765$ und $\mu = 100$, so ist es gleich wahrscheinlich, daß die Summe s bei 100 Versuchen zwischen den Grenzen $350 \mp 11,5$ liegt, oder nicht.

§. 104. Wir wollen nun, wie in §. 52, ein Ereigniß E von einer beliebigen Beschaffenheit betrachten, dessen Stattfinden von ν verschiedenen Ursachen, welche sich gegenseitig ausschließen, und die allein möglichen sind, herrühren kann. Diese Ursachen wollen wir mit $C_1, C_2, C_3, \ldots C_\nu$ bezeichnen; es sei c_i die Wahrscheinlichkeit, des Stattfindens des Ereignisses E, wenn die Ursache C_i dasselbe hervorbringt, und γ_i die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins dieser Ursache. Die Wahrscheinlichkeit von E kann sich daher von einem Versuche zum andern ändern und ν verschiedene Werthe $c_1, c_2, c_3 \ldots c_\nu$ annehmen, deren Wahrscheinlichkeiten resp. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\nu$ sind und dieselben bleiben, so lange sich die Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_\nu$ nicht ändern. Nimmt man also diese Wahrscheinlichkeit für A, so gibt die Formel (13) die Wahrscheinlichkeit P, daß der mittlere Werth von A in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen zwischen den Grenzen $k \mp \frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$ liegt, worin man für k und h ihre im vorhergehenden §. auf den Fall, wo die Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ während der Versuche constant bleiben, angewandten ersten Werthe setzen muß, wodurch sich diese Werthe von k und h in folgende verwandeln:

$$k = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu,$$
$$h = \tfrac{1}{2}(\gamma_1 c_1^2 + \gamma_2 c_2^2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu^2) - (\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu)^2,$$

und sie sind, wie man sieht, von der Zahl μ unabhängig, wie groß übrigens die Anzahl und Ungleichheit der darin vorkommenden Größen auch sein mag. Und da man der Größe U einen wenig beträchtlichen Werth beilegen kann, so daß sich die Wahrscheinlichkeit P der Gewißheit sehr nähert, so folgt, daß die mittlere Wahrscheinlichkeit von E, welche während der Versuchsreihe stattfindet, wahrscheinlich sehr wenig von der Summe der ν Producte $\gamma_1 c_1, \gamma_2 c_2, \ldots$, welcher sie sich fortwäh-

rend nähert, je größer die Zahl μ noch wird, verschieden ist. Hierdurch ist der zweite in §. 52. ausgesprochene allgemeine Satz also bewiesen.

Wenn man die Anzahl von Malen, wo das Ereigniss E in zwei sehr großen Anzahlen μ und μ' von Versuchen stattfindet, mit m und m' bezeichnet, so entfernen sich die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{m'}{\mu'}$ wahrscheinlich sehr wenig von den mittleren Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses E in diesen beiden Versuchsreihen. Es ist also auch sehr wahrscheinlich, dass sie sehr wenig von dem vorhergehenden Werthe von k und folglich unter einander selbst verschieden sind, weil dieser Werth von k beiden Versuchsreihen zugleich entspricht, wenn sich die sämmtlichen Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ in der Intervalle nicht geändert haben. Aber wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer gegebenen kleinen Differenz zwischen den Verhältnissen $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{m'}{\mu'}$? Mit dieser wichtigen Frage wollen wir uns in einem der folgenden §§. beschäftigen.

§. **105.** In den meisten Aufgaben, auf welche die Formel (13) anwendbar ist, ist das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werthe von A unbekannt, und folglich können die in den Grenzen des mittleren Werthes von A vorkommenden Größen h und k nicht a priori bestimmt werden. Aber vermittelst der in einer langen Reihe von Versuchen beobachteten Werthe von A kann man die in den Grenzen des mittleren Werthes von A in andern ebenfalls aus einer sehr großen Anzahl von Versuchen bestehenden Versuchsreihen und für welche die verschiedenen Ursachen, welche alle möglichen Werthe von A herbeiführen können, dieselben sind, als für die Versuchsreihe, deren Resultate man angewandt hat, vorkommenden unbekannten Größen elimiren, wo unter denselben Ursachen die zu verstehen sind, welche jedem dieser Werthe dieselbe Wahrscheinlichkeit geben und selbst eine gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Die vollständige Auflösung dieses Problems ist der Gegenstand der folgenden Rechnungen.

Setzt man $c = \varepsilon$ in der Formel (12), so ergibt sich daraus:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \sin(\mu k x)\frac{d\theta}{\theta} +$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \sin(2\varepsilon x - \mu k x)\frac{d\theta}{\theta}$$
$$-\frac{g}{\pi h\sqrt{\mu h}}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \cos(\mu k x)\,\theta^2\, d\theta +$$
$$\frac{g}{\pi h\sqrt{\mu h}}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \cos(2\varepsilon x - \mu k x)\,\theta^2\, d\theta$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe s der μ Werthe von A zwischen 0 und 2ε liegt. Hieraus folgt, dass das in Beziehung auf ε genommene Differenzial von P, nämlich:

$$\frac{dP}{d\varepsilon}d\varepsilon = \frac{2\,d\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \cos(2\varepsilon x - \mu k x)\frac{x\,d\theta}{\theta}$$
$$- \frac{2g\,d\varepsilon}{\pi h\sqrt{\mu h}}\int_0^\infty e^{-\theta^2} \sin(2\varepsilon x - \mu k x)\,x\,\theta^2\,d\theta,$$

die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass s genau $=2\varepsilon$ ist. Ferner wollen wir:

$$2\varepsilon = \mu k + 2v\sqrt{\mu h},\ d\varepsilon = \sqrt{\mu h}\,dv$$

setzen, und durch $\varpi\,dv$ den correspondirenden Werth von $\frac{dP}{d\varepsilon}d\varepsilon$, worin die Größen von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\mu}$ vernachlässigt sind, so dass man den Werth von x auf das erste Glied $\frac{\theta}{\sqrt{\mu h}}$ seines Reihenausdruckes (§. 101.) reduciren kann, bezeichnen; so kommt:

$$\varpi\,dv = \frac{2\,dv}{\pi}\int_0^\infty e^{-\theta^2}\cos(2v\theta)\,d\theta -$$
$$\frac{2g\,dv}{\pi h\sqrt{\mu h}}\int_0^\infty e^{-\theta^2}\sin(2v\theta)\,\theta^3\,d\theta,$$

und wegen:

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2}\cos(2v\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-v^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-\theta^2}\sin(2v\theta)\,\theta^3\,d\theta = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,(3v - 4v^3)\,e^{-v^2}$$

nimmt dieser Werth von $\varpi\,dv$ die Form:

$$\varpi\,dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}}V\right)e^{-v^2}\,dv$$

an, wo V ein Polynom bezeichnet, welches nur ungerade Potenzen von v enthält und auf das Resultat unserer Rechnungen keinen Einfluss hat, von welcher Beschaffenheit es auch sein mag. Dieser Ausdruck von $\varpi\,dv$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe s dem vor-

hergehenden Werthe von 2ε gleich ist, oder, wenn man durch μ dividirt, die Wahrscheinlichkeit der Gleichung:

$$\frac{s}{\mu} = k + \frac{2v\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}},$$

worin v eine positive oder negative, aber gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Größe ist.

Wir wollen nun alle die bekannten oder unbekannten Ursachen, welche sich gegenseitig ausschließen und der Größe A einen der Werthe, welchen sie annehmen kann, ertheilen, mit $C_1, C_2, C_3, \ldots C_\nu$ bezeichnen und ihre resp. Wahrscheinlichkeiten, deren Summe der Einheit gleich ist, und wovon jede einen unendlich kleinen Werth haben würde, wenn die Anzahl dieser möglichen Ursachen unendlich groß wäre, mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\nu$. Da die möglichen Werthe von A alle die zwischen den Grenzen a und b liegenden unendlich vielen Werthe sind, so ist die jeder dieser Ursachen entsprechende Wahrscheinlichkeit jedes dieser Werthe unendlich klein. Die Wahrscheinlichkeit, welche die Ursache C_i, wenn sie gewiss wäre, dem Werthe Z von A geben würde, wollen wir mit $Z_i dz$ bezeichnen. Das dem $n$ten Versuche entsprechende Integral $\int_a^b z f_n z\, dz$ kann also ν verschiedene Werthe:

$$\int_a^b z Z_1 dz, \int_a^b z Z_2 dz, \ldots \int_a^b z Z_\nu dz$$

haben, deren Wahrscheinlichkeiten die der entsprechenden Ursachen sind, so dass γ_i bei einem beliebigen Versuche die Wahrscheinlichkeit des Werthes $\int_a^b z Z_i dz\, dz$ ausdrückt. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit eines Werthes des Mittels $\frac{1}{\mu}\Sigma\int_a^b z f_n z\, dz$ wird also nach der vorhergehenden Regel bestimmt, welche dem mittleren Werthe $\frac{s}{\mu}$ einer beliebigen Größe in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen entspricht, und s ist alsdann die Summe der μ unbekannten Werthe von $\int_a^b z f_n z\, dz$, welche in dieser Reihe von Versuchen stattfinden, und die Größen, welche man für k und h nehmen muss, werden nach den ν möglichen Werthen dieses Integrales bestimmt.

Nimmt man nun diese ν Werthe:

$$\int_a^b z Z_1 dz, \int_a^b z Z_2 dz, \ldots \int_a^b z Z_\nu dz$$

für die in §. 103. mit $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ bezeichneten und setzt der Kürze wegen:

$$\gamma = S\gamma_i \int_a^b z Z_i dz,$$

$$\delta = \tfrac{1}{2} S\gamma_i \left(\int_a^b z Z_i dz\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(S\gamma_i \int_a^b z Z_i dz\right)^2,$$

wo das Zeichen S eine Summe bezeichnet, welche sich auf alle Indices i von $i=1$ bis $i=\nu$ erstreckt; so sind es die nach den Formeln dieses §. von μ unabhängigen Größen γ und β, welche man für k und h nehmen muss. Bezeichnet man also mit $v_{,}$ eine positive oder negative und gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Größe, ist $V_{,}$ ein Polynom, welches nur ungerade Potenzen von $v_{,}$ enthält, und setzt man:

$$\varpi_{,} dv_{,} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} V_{,}\right) e^{-v_{,}^2} dv;$$

so ist diese unendlich kleine Größe $\varpi_{,} dv_{,}$ die Wahrscheinlichkeit der Gleichung:

$$\frac{1}{\mu} \Sigma \int_a^b z f_n z\, dz = \gamma + \frac{2 v_{,} \sqrt{\delta}}{\sqrt{\mu}}.$$

Nimmt man ebenso an, dass die Größe:

$$\tfrac{1}{2}\int_a^b z^2 f_n z\, dz - \tfrac{1}{2}\left(\int_a^b z f_n z\, dz\right)^2$$

verschiedene Werthe bekommen kann, welche den Ursachen $C_1, C_2, \ldots C_\nu$ entsprechen und deren Wahrscheinlichkeiten bei jedem Versuche die dieser Ursachen selbst sind, und bezeichnet $v_{,,}$ eine positive oder negative Größe, von solcher Beschaffenheit, dass das Verhältniss $\frac{v_{,,}}{\sqrt{\mu}}$ ein sehr kleiner Bruch ist, und ist $V_{,,}$ ein Polynom, welches nur ungerade Potenzen von $v_{,,}$ enthält, setzt man ferner:

$$\varpi_{,,} dv_{,,} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} V_{,,}\right) e^{-v_{,,}^2} dv_{,,}$$

und der Kürze wegen:

$$\alpha = \tfrac{1}{2} S\gamma_i \int_a^b z^2 Z_i dz - \tfrac{1}{2} S\gamma_i \left(\int_a^b z Z_i dz\right)^2;$$

so ist dieser Ausdruck von $\varpi_{\prime\prime} dv_{\prime\prime}$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Mittel aus den μ Werthen der in Rede stehenden Größe, nämlich:

$$\frac{1}{2\mu}\Sigma\left[\int_a^b z^2 f_n z\,dz - \left(\int_a^b z f_n z\,dz\right)^2\right]$$

nur um eine bestimmte Größe von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, welche wir aber nicht zu kennen brauchen, von α verschieden ist. Uebrigens ist dieses Mittel nichts anders, als die Größe h in §. 101. Wenn man also die Größen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\mu}$ vernachlässigt, so braucht man nur α statt h in das zweite Glied des vorhergehenden Werthes von $\frac{s}{\mu}$, welcher schon von der Ordnung von $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ist, zu setzen, wodurch man erhält:

$$\frac{s}{\mu} = k + \frac{2v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\mu}},$$

und die Wahrscheinlichkeit dieser Gleichung würde wieder $= \varpi\,dv$ sein, wenn der angewandte Werth von h gewiss wäre. Da aber dieser Werth nur eine von der Veränderlichen $v_{\prime\prime}$, welche nicht in dem Werthe von $\frac{s}{\mu}$ vorkommt, abhängige Wahrscheinlichkeit $\varpi_{\prime\prime} dv_{\prime\prime}$ hat; so folgt, dass die Wahrscheinlichkeit dieses letzten Werthes durch das Product aus $\varpi\,dv$ und der Summe der Werthe von $\varpi_{\prime\prime} dv_{\prime\prime}$, welche allen Werthen entsprechen, die man der Größe $v_{\prime\prime}$ beilegen kann, vollständig ausgedrückt wird. Obgleich aber diese Werthe gegen $\sqrt{\mu}$ sehr klein sein müssen, kann man wegen des Exponentialfactors $e^{-v_{\prime\prime}^2}$ von $\varpi_{\prime\prime} dv_{\prime\prime}$ das Integral von $\varpi_{\prime\prime} dv_{\prime\prime}$ doch von $v_{\prime\prime} = -\infty$ bis $v_{\prime\prime} = \infty$ erstrecken, ohne den Werth desselben merklich zu ändern. Der von $V_{\prime\prime}$ abhängige Theil dieses Integrales verschwindet, weil er aus Elementen besteht, welche paarweise einander gleich sind und entgegengesetzte Zeichen haben, und man hat blos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varpi_{\prime\prime} dv_{\prime\prime} = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit der vorhergehenden Gleichung ist also immer $= \varpi\,dv$, wie wenn der angewandte Näherungswerth von h gewiss gewesen wäre.

Auch kann man bemerken, dass das Mittel:

$$\frac{1}{\mu}\Sigma\int_a^b z f_n z\,dz$$

nichts anders, als die Größe k in §. 101. ist. Der Ausdruck von $\varpi_, dv_,$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass der Werth dieser Größe:

$$k=\gamma+\frac{2v_,\sqrt{\beta}}{\sqrt{\mu}}$$

ist. Substituirt man also diesen Werth in den von $\frac{s}{\mu}$, welches

$$\frac{s}{\mu}=\gamma+\frac{2v_,\sqrt{\beta}}{\sqrt{\mu}}+\frac{2v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\mu}}$$

gibt, so wird die Wahrscheinlichkeit dieser letzten Gleichung für jedes Werthepaar von v und $v_,$ durch das Product von $\varpi\,dv$ und $\varpi_, dv_,$ welches wir mit σ bezeichnen wollen, ausgedrückt, so dass man:

$$\sigma=\frac{1}{\pi}\left[1-\frac{1}{\sqrt{\mu}}(V+V_,)\right]e^{-v^2-v_,^2}dv\,dv_,$$

hat, wenn man das Glied, worin μ als Divisor vorkommen würde, hinweglässt.

Bezeichnen wir mit θ eine positive oder negative Veränderliche, welche, wie v und $v_,$ gegen $\sqrt{\mu}$ sehr klein ist, so kann man:

$$v_,\sqrt{\beta}+v\sqrt{\alpha}=\theta\sqrt{\alpha+\beta}$$

setzen, und wenn man diese neue Veränderliche statt $v_,$ in die vorhergehende Differenzialformel einführen will, so muss man für $v_,$ und $dv_,$ die Werthe:

$$v_,=\frac{\theta\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\beta}}-\frac{v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}},\ dv_,=\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\beta}}d\theta$$

setzen, wodurch sie sich in folgende verwandelt:

$$\sigma=\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\mu}}T\right)e^{-\left(\frac{v\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\beta}}-\frac{\theta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2-\theta^2}\frac{\sqrt{\alpha+\beta}\,dv\,dv_,}{\sqrt{\beta}},$$

worin T ein von V und $V_,$ herrührendes Polynom ist, wovon je-

des Glied eine ungerade Potenz von v oder von θ enthält. Da die Gleichung:

$$\frac{s}{\mu} = \gamma + \frac{2\theta\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\mu}}, \tag{14}$$

nur noch die Veränderliche θ enthält, so folgt, daſſ ihre Totalwahrscheinlichkeit die Summe der Werthe von σ für alle positiven oder negativen Werthe, welche man der andern Veränderlichen v geben kann, ist. Ferner kann man wegen der in dem Ausdrucke von σ vorkommenden Exponentialgröße das Integral von $v = -\infty$ bis $v = \infty$ erstrecken, ohne den Werth desselben merklich zu verändern. Setzt man alsdann:

$$\frac{v\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\theta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \theta_{,}, \quad \frac{dv\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\beta}} = d\theta_{,},$$

und bezeichnet mit T' den Werth von T als Function von θ und $\theta_{,}$, so hat man:

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}}T'\right)e^{-\theta^2 - \theta_{,}^2}\, d\theta\, d\theta_{,},$$

wo die Grenzen der Integration in Beziehung auf die neue Veränderliche $\theta_{,}$ wieder $\pm\infty$ sind. Bezeichnet man also seinen unendlich kleinen Werth mit $\eta\, d\theta$, so ergibt sich:

$$\eta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\theta^2}d\theta - \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\Theta e^{-\theta^2}d\theta$$

für die Wahrscheinlichkeit der Gleichung (14), wo Θ ein Polynom ist, welches nur ungerade Potenzen von θ enthält.

Es kommt nun darauf an, aus dieser Gleichung (14) die Unbekannte $\alpha+\beta$ zu eliminiren, welches, wie man sogleich sehen wird, möglich ist, weil sich der Ausdruck von $\alpha+\beta$ auf:

$$\alpha+\beta = \tfrac{1}{2}S\gamma_i\int_a^b z^2 Z_i dz - \tfrac{1}{2}\left(S\gamma_i\int_a^b z Z_i dz\right)^2$$

reducirt und von der Summe:

$$S\gamma_i\left(\int_a^b z Z_i dz\right)^2,$$

welche in jeder der Größen α und β vorkam, unabhängig ist.

§. **106.** Wendet man auf:

$$\frac{1}{2}\int_a^b z^2 f_n z\, dz$$

dieselben Schlüsse an, wie im vorhergehenden §., auf diese um:

$$\frac{1}{2}\left(\int_a^b z f_n z\, dz\right)^2$$

verminderte Größe und bezeichnet ihren mittlern Werth mit $\frac{1}{2}\varphi$, so dass:

$$\frac{1}{\mu}\Sigma\int_a^b z f_n z\, dz = \varphi$$

ist; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Größe:

$$\frac{1}{2}S\gamma_i\int_a^b z^2 Z\, dz$$

von $\frac{1}{2}\varphi$ nur um eine bestimmte Größe von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ verschieden ist, $=\varpi_{\prime\prime} dv_{\prime\prime}$. Vernachlässigt man ferner wieder die Glieder, worin $\frac{1}{\mu}$ als Divisor vorkommt, so ergibt sich, wie im vorhergehenden §., dass man in der Gleichung (14) die Größe $\frac{1}{2}\varphi$ statt des Theiles:

$$\frac{1}{2}S\gamma_i\int_a^b z Z_i\, dz$$

des vorhergehenden Werthes von $\alpha+\varepsilon$ anwenden kann, ohne die Wahrscheinlichkeit $\eta\, d\theta$ dieser Gleichung zu verändern. Da der andere Theil des Werthes von $\alpha+\varepsilon$ genau die Größe $\frac{1}{2}\gamma^2$ ist, so hat man folglich:

$$\alpha+\varepsilon=\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{2}\gamma^2,$$

und vermöge dieses Werthes verwandelt sich die Gleichung (14) zunächst in:

$$\frac{s}{\mu}=\gamma+\frac{\theta}{\sqrt{\mu}}\sqrt{2\varphi-2\gamma^2}.$$

Nun sei Z eine gegebene Function von z. Die Untersuchung in §§. **97.** und **101.** und folglich der Ausdruck von $\varpi\, dv$ im vorhergehenden §. lassen sich ohne Schwierigkeit auf die Summe der Werthe

von Z ausdehnen, welche in den μ betrachteten Versuchen stattfinden. Man braucht für A nur eine andere Größe $A_{,}$ zu nehmen, deren Werthe die dieser Function Z sind. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit irgend eines Werthes von $A_{,}$ ist dieselbe, als die des correspondirenden Werthes von z und wird folglich bei dem n ten Versuche durch $f_n z\, dz$ ausgedrückt, und wenn man mit $k_{,}$, $h_{,}$, $g_{,}$, ... die Werthe der sich auf A beziehenden Größen k, h, g, ..., in Beziehung auf die Größe $A_{,}$ bezeichnet; so hat man:

$$\mu k_{,} = \Sigma \int_a^b Z f_n z\, dz,$$

$$\mu h_{,} = \Sigma \left[\int_a^b Z^2 f_n z\, dz - \left(\int_a^b Z f_n z\, dz \right)^2 \right], \text{ etc.}$$

Wenn man also die Summe der während der Versuchsreihe stattfindenden μ Werthe von $A_{,}$ mit $s_{,}$ bezeichnet, so ist die unendlich kleine Größe $\varpi\, dv$ die Wahrscheinlichkeit, dass genau:

$$\frac{s'}{\mu} = k_{,} + \frac{2 v_{,} \sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$$

ist.

Setzen wir nun $Z = z^2$, so haben wir:

$$k_{,} = \frac{1}{\mu} \Sigma \int_a^b z^2 f_n z\, dz = \varphi.$$

Bei dem Grade von Annäherung, wobei wir stehen bleiben, kann man folglich $\frac{s'}{\mu}$ für den Werth von φ in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{s}{\mu}$ nehmen, und man überzeugt sich, wie im vorhergehenden §., dass die Wahrscheinlichkeit dieses Ausdruckes nicht geändert wird, so dass $\eta\, d\theta$ wieder die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit der Gleichung:

$$\frac{s}{\mu} = \gamma + \frac{\theta}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{2 s_{,}}{\mu} - 2\gamma^2},$$

oder der Gleichung:

$$\frac{s}{\mu} = \gamma + \frac{\theta}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{2 s_{,}}{\mu} - \frac{2 s^2}{\mu^2}}$$

ist, welche sich aus der vorhergehenden ergibt, wenn man wieder die Größen von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\mu}$ vernachlässigt.

Wir wollen den Werth von A, welcher bei dem $n$ten Versuche stattgehabt hat, oder stattfinden wird, mit λ_n bezeichnen, und der Kürze wegen:

$$\frac{1}{\mu}\Sigma\lambda_n=\lambda,\;\; \frac{1}{\mu}\Sigma(\lambda_n-\lambda)^2=\tfrac{1}{2}l^2$$

setzen; so ist identisch:

$$\frac{s_{,}}{\mu}=\frac{1}{\mu}\Sigma\lambda_n^2,\;\; \frac{s}{\mu}=\frac{1}{\mu}\Sigma\lambda_n,\;\; \frac{s_{,}}{\mu}-\frac{s^2}{\mu^2}=\frac{1}{\mu}\Sigma(\lambda_n-\lambda)^2,$$

und die vorhergehende Gleichung verwandelt sich daher in:

$$\frac{s}{\mu}=\gamma+\frac{\theta l}{\sqrt{\mu}}.$$

Wenn man nun mit u eine positive und gegebene Größe bezeichnet, so ergibt sich hieraus, dass das Integral der Wahrscheinlichkeit $\eta d\theta$ dieser Gleichung von $\theta=u$ bis $\theta=-u$ genommen, die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der Werth von $\frac{s}{\mu}$ zwischen die Grenzen:

$$\gamma\mp\frac{ul}{\sqrt{\mu}}$$

fällt. Bezeichnet man diese letzte Wahrscheinlichkeit mit Γ, und berücksichtigt den Ausdruck von $\eta d\theta$, so hat man:

$$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{u}e^{-\theta^2}\,d\theta-\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\int_{-u}^{u}e^{-\theta^2}\,\Theta\,d\theta,$$

und da Θ ein Polynom ist, welches nur ungerade Potenzen von θ enthält, so ist das zweite Integral $=0$, und man hat blos:

$$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{u}e^{-\theta^2}\,d\theta,$$

welches Resultat mit dem Werthe der durch die Formel (13) gegebenen Wahrscheinlichkeit P übereinstimmt.

Diese Formel drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Grenzen $\mp\frac{ul}{\sqrt{\mu}}$, welche nach den Versuchen keine unbekannte Größe

mehr enthalten, die Differenz zwischen sich schließen, welche zwischen dem mittleren Werthe $\frac{s}{\mu}$ von A und der speciellen Größe γ, welcher sich dieser mittlere Werth ohne Ende nähert, und welche er erreichen würde, wenn μ unendlich groß würde und die Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_\nu$ der möglichen Werthe von A sich nicht veränderten, stattfindet.

§. **107.** Wir wollen nun annehmen, daſſ zwei sehr lange Versuchsreihen, die eine von μ und die andere von μ' Versuchen angestellt würden; es seien s und s' die Summen der Werthe von A in diesen beiden Versuchsreihen, ferner λ_n und λ'_n die Werthe von A welche bei dem $n$ten Versuche stattfinden werden, oder stattgefunden haben, und wir wollen:

$$\frac{1}{\mu}\Sigma\lambda_n = \lambda, \ \frac{1}{\mu}\Sigma(\lambda_n - \lambda)^2 = \tfrac{1}{2}l^2;$$

$$\frac{1}{\mu'}\Sigma\lambda'_n = \lambda', \ \frac{1}{\mu'}\Sigma(\lambda'_n - \lambda')^2 = \tfrac{1}{2}l'^2$$

setzen, wo sich die Summe Σ auf alle Versuche jeder Reihe, d. h. die beiden ersten von $n=1$ bis $n=\mu$ und die beiden letzten von $n=1$ bis $n=\mu'$ erstrecken. Wenn sich die Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_\nu$ von einer Versuchsreihe zur andern nicht ändern, so ändert sich die Größe γ in §. **105.** auch nicht. Bezeichnet man alsdann durch θ und θ' positive, oder negative Veränderliche, welche aber gegen $\sqrt{\mu}$ und $\sqrt{\mu'}$ sehr klein sind, so sind die Gleichungen für die mittleren Werthe von A in diesen beiden Versuchsreihen:

$$\frac{s}{\mu} = \gamma + \frac{\theta l}{\sqrt{\mu}}, \ \frac{s'}{\mu'} = \gamma + \frac{\theta' l'}{\sqrt{\mu'}}, \qquad (15)$$

und ihre resp. Wahrscheinlichkeiten $\eta\, d\theta$ und $\eta'\, d\theta'$ werden ausgedrückt durch:

$$\eta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\Theta\right)e^{-\theta^2}d\theta,$$

$$\eta'\, d\theta' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu'}}\Theta'\right)e^{-\theta'^2}d\theta',$$

wo Θ und Θ' Polynome sind, welche nur ungerade Potenzen von θ und θ' enthalten. Wenn ferner die beiden Versuchsreihen aus verschiedenartigen Versuchen bestehen, so kann man diese Werthe von $\frac{s}{\mu}$

und $\frac{s'}{\mu'}$ als von einander unabhängige Ereignisse betrachten und die Wahrscheinlichkeit ihres gleichzeitigen Stattfindens wird nach der Regel in §. 5. durch das Product von $n d\theta$ und $n' d\theta'$ ausgedrückt. Dieses Product ist auch die Wahrscheinlichkeit einer beliebigen andern Verbindung der beiden Gleichungen (15), z. B. die Wahrscheinlichkeit der Gleichung, welche man erhält, wenn man sie von einander abzieht, nämlich:

$$\frac{s'}{\mu'} - \frac{s}{\mu} = \frac{\theta' l'}{\sqrt{\mu'}} - \frac{\theta l}{\sqrt{\mu}}.$$

Bezeichnet man also das Product $\eta \eta' d\theta d\theta'$ mit ψ und läßt das Glied, welches $\sqrt{\mu\mu'}$ im Divisor enthält, unberücksichtigt, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit der vorhergehenden Gleichung für jedes Werthepaar von θ und θ':

$$\psi = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\Theta - \frac{1}{\sqrt{\mu'}}\Theta'\right) e^{-\theta^2 - \theta'^2}\, d\theta d\theta'.$$

Um hier denselben Gang, wie in §. 105., zu befolgen, setzen wir:

$$\frac{\theta' l'}{\sqrt{\mu'}} - \frac{\theta l}{\sqrt{\mu}} = \frac{t\sqrt{l'^2 \mu + l^2 \mu'}}{\sqrt{\mu\mu'}},$$

wodurch die vorhergehende Gleichung in die folgende:

$$\frac{s'}{\mu'} - \frac{s}{\mu} = \frac{t\sqrt{l'^2 \mu + l^2 \mu'}}{\sqrt{\mu\mu'}}$$

verwandelt wird, und in dem Ausdrucke von ψ setzen wir für θ die neue Veränderliche t, zu welchem Zwecke wir:

$$\theta' = \frac{t\sqrt{l'^2 \mu + l^2 \mu'}}{l'\sqrt{\mu}} + \frac{\theta l \sqrt{\mu'}}{l'\sqrt{\mu}},$$

$$d\theta' = \frac{\sqrt{l'^2 \mu + l^2 \mu'}}{l'\sqrt{\mu}}\, dt$$

setzen, woraus alsdann folgt:

$$\psi = \frac{dt\, d\theta \sqrt{l'^2 \mu + l^2 \mu'}}{\pi l' \sqrt{\mu}} (1 - \Pi)\, e^{-\left(\frac{t\sqrt{l'^2\mu + l^2\mu'}}{l'\sqrt{\mu}} + \frac{\theta l \sqrt{\mu'}}{l'\sqrt{\mu}}\right)^2 - t^3},$$

indem Π ein Polynom ist, worin jedes Glied eine ungerade Potenz von t oder von θ enthält. Da der Werth von $\frac{s'}{\mu'} - \frac{s}{\mu}$ nur noch die Veränderliche t enthält, so wird seine Wahrscheinlichkeit durch das auf alle Werthe, welche man der andern Veränderlichen θ geben kann, erstreckte Integral von ψ ausgedrückt, und wegen der in ψ vorkommenden Exponentialgröße kann dieses Integral von $\theta = -\infty$ bis $\theta = \infty$ genommen werden, ohne dass sein Werth merklich geändert wird. Setzt man alsdann:

$$\frac{t\sqrt{l'^2\mu + l^2\mu'}}{l'\sqrt{\mu}} + \frac{\theta l\sqrt{\mu'}}{l'\sqrt{\mu}} = t',$$

$$\frac{\sqrt{l'^2\mu + l^2\mu'}}{l'\sqrt{\mu}}dt = dt',$$

und bezeichnet den entsprechenden Werth Π mit Π', so erhält man:

$$\psi = \frac{1}{\pi}(1 - \Pi')\, e^{-t'^2 - t^2}\, dt'\, dt,$$

wo die Grenzen der Integration nach t' wieder $t' = \mp\infty$ sind, und wenn man die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit des vorhergehenden Werthes von $\frac{s'}{\mu'} - \frac{s}{\mu}$ mit ζdt bezeichnet; so hat man:

$$\zeta dt = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(1 - T)\, e^{-t^2}\, dt,$$

wo T ein Polynom ist, welches nur ungerade Potenzen von t enthält. Wenn wir endlich mit u eine gegebene positive Größe und mit $\varDelta$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass die Differenz $\frac{s'}{\mu'} - \frac{s}{\mu}$ zwischen die Grenzen

$$\mp\frac{u\sqrt{l'^2\mu + l^2\mu'}}{\sqrt{\mu\mu'}}$$

fällt; so haben wir:

$$\varDelta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2}\, dt,$$

was mit dem durch die Formel (13) gegebenen Werthe von P übereinstimmt. Diese Größe P ist also die Wahrscheinlichkeit, dass die

Differenz zwischen den mittlern Werthen von A in den beiden langen Versuchsreihen zwischen diese ganz bekannten Grenzen fällt.

Hat man für u einen hinreichend beträchtlichen Werth genommen, damit der von P sehr wenig von der Einheit verschieden wird, und die Beobachtung gibt für die Differenz $\frac{s'}{\mu'} - \frac{s}{\mu}$ eine Größe, welche nicht zwischen die vorhergehenden Grenzen fällt, so ist man zu dem Schlusse berechtigt, dass die Ursachen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_\nu$ der möglichen Werthe von A in dem Intervalle der beiden Versuchsreihen nicht dieselben geblieben sind, d. h. es hat entweder in den Wahrscheinlichkeiten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\nu$ dieser Ursachen, oder in den Wahrscheinlichkeiten, welche sie den verschiedenen Werthen von A geben, irgend eine Veränderung stattgefunden.

Nach dem im vorhergehenden §. Gesagten, muss jede der Größen l und l' sehr wahrscheinlich sehr wenig von derselben unbekannten Größe $2\sqrt{\alpha+\varepsilon}$, welche für beide Versuchsreihen dieselbe bleibt, verschieden sein. Es ist folglich auch sehr wahrscheinlich, dass die Größen l und l' sehr wenig von einander selbst verschieden sind, und man kann daher, ohne weder die Größe der vorhergehenden Grenzen, noch ihre Wahrscheinlichkeit merklich zu verändern, darin $l'=l$ setzen. Für eine zukünftige Reihe von Versuchen gibt also die Formel (13) die Wahrscheinlichkeit P, dass der mittlere Werth $\frac{s'}{\mu'}$ von A zwischen die Grenzen:

$$\frac{s}{\mu} \mp \frac{ul\sqrt{\mu+\mu'}}{\sqrt{\mu\mu'}}$$

fällt, welche für jeden gegebenen Werth von u nur von den Resultaten der ersten bereits angestellten Reihe von Versuchen abhängt.

Für denselben Werth von u, d. h. bei gleichem Grade der Wahrscheinlichkeit ist folglich, wie man sieht, die Amplitude dieser Grenzen in dem Verhältnisse von $\sqrt{\mu+\mu'}$ zu $\sqrt{\mu'}$ größer, als die der Differenz $\gamma - \frac{s}{\mu}$, und diese beiden Amplituden fallen fast zusammen, wenn μ' gegen die sehr große Zahl μ eine sehr große Zahl ist.

§. **108.** Wenn die beiden Versuchsreihen von μ und μ' Versuchen die Messung derselben Größe zum Zwecke haben, und mit verschiedenen Instrumenten angestellt sind, wovon für jedes gleiche und entgegengesetzte Fehler gleich wahrscheinlich sind; so convergiren die sich

aus diesen beiden Versuchsreihen ergebenden mittlern Werthe $\frac{s}{\mu}$ und $\frac{s'}{\mu'}$ ohne Ende gegen dieselbe Größe, welche der wahre Werth von A ist (§. 60). In diesem Falle ist also die Unbekannte γ für die beiden Beobachtungsreihen dieselbe, und die mittleren Werthe $\frac{s}{\mu}$ und $\frac{s'}{\mu'}$ sind sehr wahrscheinlich sehr wenig von einander verschieden; aber die Unbekannte $\alpha+\varepsilon$ kann für diese beiden Beobachtungsreihen sehr verschieden sein, so daſs die Größen l und l' sehr ungleich werden. Wenn die Werthe dieser Größen bekannt sind, so kann man fragen, welches die vortheilhafteste Combination der mittleren Werthe $\frac{s}{\mu}$ und $\frac{s'}{\mu'}$ ist, um daraus die Grenzen von γ oder den wahren Werth von A abzuleiten.

Um diese Combination zu finden, wollen wir mit g und g' unbestimmte Größen bezeichnen, deren Summe der Einheit gleich ist und die Gleichungen (15), nachdem wir die erste mit g und die zweite mit g' multiplicirt haben, zusammenaddiren; so erhalten wir die Gleichung:

$$\gamma=\frac{gs}{\mu}+\frac{g's'}{\mu'}-\frac{gl\theta}{\sqrt{\mu}}-\frac{g'l'\theta'}{\sqrt{\mu'}},$$

deren Wahrscheinlichkeit nach dem weiter oben Gesagten für alle Werthepaare von θ und θ' gleich ψ ist. Nun ergibt sich aber aus einer der eben ausgeführten ähnlichen Rechnung, daſs die durch die Formel (13) gegebene Größe P die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daſs der unbekannte Werth von γ zwischen den Grenzen:

$$\frac{gs}{\mu}+\frac{g's'}{\mu'}\mp\frac{u\sqrt{g'^2 l'^2 \mu+g^2 l^2 \mu'}}{\sqrt{\mu\mu'}}$$

liegt. Soll also die Amplitude dieser Grenzen für dieselbe Wahrscheinlichkeit P, d. h. für jeden gegebenen Werth von u die möglichst kleinste werden, so muſs man g und g' dadurch bestimmen, daſs man das in Beziehung auf diese Größen genommene Differenzial des Coefficienten von u gleich Null setzt. Wegen $g+g'=1$ und $dg'=-dg$ ergibt sich hieraus:

$$g=\frac{l'^2\mu}{l'^2\mu+l^2\mu'},\quad g'=\frac{l^2\mu'}{l'^2\mu+l^2\mu'},$$

und die engsten Grenzen von γ sind:

$$\frac{s l'^2 + s' l^2}{l'^2 \mu + l^2 \mu'} \mp \frac{u l l'}{\sqrt{l'^2 \mu + l^2 \mu'}},$$

deren Wahrscheinlichkeit wieder durch die Formel (13) ausgedrückt wird.

Man kann dieses Resultat leicht verallgemeinern und es auf eine beliebige Anzahl langer Versuchsreihen erstrecken, wenn dieselbe Größe A mit verschiedenen Instrumenten gemessen wird. Wenn die drei Größen μ, s, l der ersten Versuchsreihe, die drei Größen μ', s', l' der zweiten Versuchsreihe, die drei Größen μ'', s'', l'' der dritten Versuchsreihe, *etc.* entsprechen, und man setzt zunächst:

$$\frac{\mu}{l^2} + \frac{\mu'}{l'^2} + \frac{\mu''}{l''^2} + etc. = D^2,$$

und dann:

$$\frac{\mu}{D^2 l^2} = q, \quad \frac{\mu'}{D^2 l'^2} = q', \quad \frac{\mu''}{D^2 l''^2} = q'', \; etc.;$$

so drückt die Formel (13) die Wahrscheinlichkeit aus, daß der unbekannte Werth von A zwischen den Grenzen:

$$\frac{s q}{\mu} + \frac{s' q'}{\mu'} + \frac{s'' q''}{\mu''} + \ldots = \frac{u}{D}$$

liegt, welche sich aus der vortheilhaftesten Verbindung der Beobachtungen ergeben. Und da man den durch diese Formel (13) ausgedrückten Werth sehr wenig von der Einheit verschieden machen kann, indem man für u eine wenig beträchtliche Zahl nimmt, so folgt, daß der Werth von A höchst wahrscheinlich sehr wenig von der Summe der resp. mit den Größen q, q', q'', ... multiplicirten mittleren Werthe $\frac{s}{\mu}$, $\frac{s'}{\mu'}$, $\frac{s''}{\mu''}$, ... verschieden ist.

Das Resultat jeder Beobachtungsreihe hat auf diesen Näherungswerth von A und auf die Amplitude $\mp \frac{u}{D}$ seiner Grenzen einen desto beträchtlichern Einfluß, einen je größern Werth der sich auf diese Beobachtungsreihe beziehende unter den Quotienten $\frac{\mu}{l^2}$, $\frac{\mu'}{l'^2}$, $\frac{\mu''}{l''^2}$, ... hat.

Wenn alle Beobachtungsreihen mit demselben Instrumente angestellt sind, so kann man sie als eine einzige Reihe betrachten, welche aus $\mu + \mu' + \mu'' + \ldots$ Beobachtungen besteht. Die Größen l, l', l'',

... sind also, wie weiter oben bemerkt worden, höchst wahrscheinlich sehr wenig von einander verschieden. Erstreckt man die Summen Σ auf die ganze Beobachtungsreihe, d. h. von $n=1$ bis $n=\mu+\mu'+\mu''+\ldots$, und setzt:

$$\frac{1}{\mu+\mu'+\mu''+etc.}\Sigma\lambda_n=\lambda,$$

$$\frac{1}{\mu+\mu'+\mu''+etc.}\Sigma(\lambda_n-\lambda)^2=\tfrac{1}{2}l_1^2,$$

so kann man l_1 für den gemeinschaftlichen Werth von $l, l', l'', \ldots$ nehmen. Vermittelst dieses Werthes verwandeln sich die vorhergehenden Grenzen der Unbekannten γ, deren Wahrscheinlichkeit durch die Gleichung (13) ausgedrückt wird, in:

$$\frac{s+s'+s''+etc.}{\mu+\mu'+\mu''+etc.}\mp\frac{\mu l_1}{\sqrt{\mu+\mu'+\mu''+etc.}},$$

was mit dem in §. **106.** für eine einzelne Versuchsreihe erhaltenen Resultate übereinstimmt.

§. **109.** Die zu Ende des §. **104.** angeführte Aufgabe lässt sich durch ähnliche Betrachtungen lösen, wie die, wovon wir eben Gebrauch gemacht haben.

Es sei die Anzahl von Malen, welche das Ereigniss E von einer beliebigen Natur in einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen stattfindet, $=m$; indem sich die Wahrscheinlichkeit von E von einem Versuche zum andern ändert, sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereigniss bei dem $n$ten Versuche stattfindet. Ferner wollen wir:

$$\frac{1}{\mu}\Sigma p_n=p,\ \frac{1}{\mu}\Sigma p_n^2=q$$

setzen, mit v eine positive oder negative Größe bezeichnen, welche aber gegen $\sqrt{\mu}$ sehr klein ist und durch U die Wahrscheinlichkeit der Gleichung:

$$\frac{m}{\mu}=p-\frac{v}{\sqrt{\mu}}\sqrt{2p-2q}$$

ausdrücken. Wenn man zur Vereinfachung der Rechnungen das zweite Glied der Formel (2) hinweglässt, die Bedeutung der darin vorkommenden Größe k berücksichtigt, und darin v für θ setzt, so erhält man:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu(p-q)}} e^{-v^2}.$$

Wie in §. 104. wollen wir alle möglichen Ursachen des Ereignisses E, deren Anzahl endlich oder unendlich sein kann, mit C_1, C_2, C_3, ... C_ν, ihre resp. Wahrscheinlichkeiten mit γ_1, γ_2, γ_3, ... γ_ν und die Wahrscheinlichkeiten, welche sie dem Stattfinden des Ereignisses E geben, mit c_1, c_2, c_3, ... c_ν bezeichnen.

Wenn man p_n als eine Größe betrachtet, welche die ν Werthe c_1, c_2, c_3, ... c_ν, deren Wahrscheinlichkeiten γ_1, γ_2, γ_3, ... γ_ν sind, bekommen kann,

$$\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu = r,$$
$$\gamma_1 c_1^2 + \gamma_2 c_2^2 + \ldots + \gamma_\nu c_\nu^2 = \varrho$$

setzt, und mit $v_{,}$ eine gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine positive oder negative Veränderliche bezeichnet; so ist die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß genau:

$$p = r + \frac{v_{,}\sqrt{2\varrho - 2r^2}}{\sqrt{\mu}}$$

ist, der Größe $\varpi_{,} dv_{,}$ in §. 105., oder, wenn man den zweiten Theil ihres Ausdruckes vernachlässigt, der Größe $\frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{-dv_{,}^2} dv_{,}$ gleich. Wenn man ferner mit $v_{,,}$ eine gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Veränderliche bezeichnet, so ist die Größe $\varpi_{,,} dv_{,,}$ in demselben §., oder blos $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v_{,,}^2} dv_{,,}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Größe $p-q$ von $r-\varrho$ nur um eine bestimmte Größe verschieden ist, welche $v_{,,}$ proportional und von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ist. Und wenn man ferner die Größen von der Ordnung von $\frac{1}{\mu}$ unberücksichtigt läßt, so ergibt sich, daß man $r-\varrho$ für $p-q$ setzen kann, ohne die Wahrscheinlichkeit U des vorhergehenden Werthes von $\frac{m}{\mu}$ zu verändern, wodurch sich dieser Werth in folgenden verwandelt:

$$\frac{m}{u} = p - \frac{v\sqrt{2r - 2\varrho}}{\sqrt{\mu}}.$$

Setzt man ferner:

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu(r-\varrho)}}=\delta,$$

so muss man, damit m eine ganze Zahl sei, für υ nur die positiven oder negativen Vielfachen von δ nehmen, welche außerdem gegen μ sehr klein sein müssen.

Addirt man nun die beiden vorhergehenden Werthe von p und $\frac{m}{\mu}$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{m}{\mu}=r+\frac{\upsilon_{,}\sqrt{2\varrho-2r^2}}{\sqrt{\mu}}-\frac{\upsilon\sqrt{2r-2\varrho}}{\sqrt{\mu}},$$

deren Wahrscheinlichkeit für jedes Werthepaar von υ und υ' durch das Product aus U und $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\upsilon_{,}^2}d\upsilon_{,}$ ausgedrückt wird, so dass, wenn man sie mit ε bezeichnet:

$$\varepsilon=\frac{1}{\pi\sqrt{2\mu(r-\varrho)}}e^{-\upsilon^2-\upsilon_{,}^2}d\upsilon_{,}$$

ist, wenn man $r-\varrho$ statt $p-q$ in den Ausdruck von U setzt. Wir wollen

$$\upsilon_{,}=\theta\sqrt{\frac{r-r^2}{\varrho-r^2}}+\upsilon\sqrt{\frac{r-\varrho^2}{\varrho-r^2}},$$

$$d\upsilon_{,}=\sqrt{\frac{r-r^2}{\varrho-r^2}}d\theta$$

setzen, so folgt daraus:

$$\frac{m}{\mu}=r+\frac{\theta\sqrt{2r-2r^2}}{\sqrt{\mu}},$$

und hieraus folgt:

$$r=\frac{m}{\mu}-\frac{\theta\sqrt{2m(\mu-m)}}{\mu\sqrt{\mu}},$$

wenn man die Glieder von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\mu}$ unberücksichtigt lässt. Zu gleicher Zeit hat man:

$$\varepsilon = \frac{\delta d\theta}{\pi}\sqrt{\frac{r-r^2}{\varrho-r^2}}\,e^{-\frac{[v^2(r-r^2)+2v\theta\sqrt{(r-r^2)(r-\varrho)}+\theta^2(r-r^2)]}{\varrho-r^2}},$$

wenn man den Werth von δ berücksichtigt. Da aber der Ausdruck von r die Größe v nicht enthält, so ist seine Wahrscheinlichkeit ebenfalls davon unabhängig. Sie ist der Summe der Werthe von ε gleich, welche allen den Werthen entsprechen, die man v beilegen kann, und welche nach gleichen Differenzen $=\delta$, wovon v ein Vielfaches ist, wachsen müssen.

Wegen der Kleinheit von δ erhält man einen Näherungswerth dieser Summe, wenn man in dem Ausdrucke von ε, dv für δ setzt und für die Summe ein Integral nimmt, und dieser Werth ist bis auf Größen von der Ordnung von δ oder von $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ genau. Obgleich die Veränderliche v gegen $\sqrt{\mu}$ eine sehr kleine Größe sein muss, so kann man wegen der in dem Ausdrucke von ε vorkommenden Exponentialgröße das Integral doch von $v=-\infty$ bis $v=\infty$ erstrecken, ohne den Werth desselben merklich zu ändern. Setzt man alsdann:

$$v\sqrt{\frac{r-r^2}{\varrho-r^2}}+\theta\sqrt{\frac{r-\varrho}{\varrho-r^2}}=\theta_{\prime},$$

$$\sqrt{\frac{r-r^2}{\varrho-r^2}}\,dv=d\theta_{\prime},$$

so sind die Grenzen der Integration nach θ ebenfalls $\pm\infty$, und wenn man die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit des Ausdruckes von r mit $\zeta d\theta$ bezeichnet; so hat man:

$$\zeta d\theta = \frac{d\theta}{\pi}e^{-\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta_{\prime}^2}\,d\theta_{\prime} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{-\theta^2}\,d\theta.$$

Wenn also u eine gegebene positive Größe ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte Werth von r zwischen die Grenzen:

$$\frac{m}{\mu}\mp\frac{u\sqrt{2m(\mu-m)}}{\mu\sqrt{\mu}}$$

fällt, der Wahrscheinlichkeit P gleich, welche die Formel (13) gibt, weil diese Wahrscheinlichkeit durch:

$$\int_{-u}^{u} \zeta\, d\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{u} e^{-\theta^2}\, d\theta$$

ausgedrückt wird. Also ist P die Wahrscheinlichkeit, daſſ die besondere Größe r, welcher sich das Verhältniſſ $\frac{m}{\mu}$ ohne Ende nähert, je größer die Zahl μ noch wird, von diesem Verhältniſſe nur um eine zwischen den bekannten Grenzen:

$$\mp \frac{u\sqrt{2m(\mu - m)}}{\mu\sqrt{\mu}}$$

liegende Größe verschieden ist.

In einer zweiten, aus einer sehr großen Anzahl μ' von Versuchen bestehenden Versuchsreihe finde das Ereigniſſ E, m' mal statt, und θ' sei eine positive oder negative, aber gegen $\sqrt{\mu'}$ sehr kleine Veränderliche; so wird die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit der Gleichung:

$$r = \frac{m'}{\mu'} - \frac{\theta'\sqrt{2m'(\mu' - m')}}{\mu'\sqrt{\mu'}}$$

durch:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\theta'^2}\, d\theta'$$

ausgedrückt. Die Wahrscheinlichkeit der Gleichung:

$$\frac{m'}{\mu'} - \frac{m}{\mu} = \frac{\theta\sqrt{2m'(\mu' - m')}}{\mu'\sqrt{\mu'}} - \frac{\theta\sqrt{2m(\mu - m)}}{\mu\sqrt{\mu}},$$

welche man erhält, wenn man diesen Werth von r von dem vorhergehenden abzieht, ist folglich für alle Werthepaare von θ und θ' das Product aus:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\theta'^2}\, d\theta' \text{ und } \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\theta^2}\, d\theta,$$

und wenn man zuvörderst:

$$\frac{\theta\sqrt{m'(\mu' - m')}}{\mu'\sqrt{\mu'}} - \frac{\theta\sqrt{m(\mu - m)}}{\mu\sqrt{\mu}} = \frac{t\sqrt{\mu^3 m'(\mu' - m') + \mu'^3 m(\mu - m)}}{\mu\mu'\sqrt{\mu\mu'}},$$

$$d\theta' = \frac{\sqrt{\mu^3 m'(\mu' - m') + \mu'^3 m(\mu - m)}}{\mu\sqrt{\mu m'(\mu' - m')}}\, dt,$$

und dann:

$$\frac{\theta \sqrt{\mu^3 m' (\mu' - m') + \mu'^3 m (\mu - m)}}{\mu \sqrt{\mu m' (\mu' - m')}} + \frac{t \mu' \sqrt{\mu' m (\mu - m)}}{\mu \sqrt{\mu m' (\mu' - m')}} = t',$$

$$\frac{\sqrt{\mu^3 m' (\mu' - m') + \mu'^3 m (\mu - m)}}{\mu \sqrt{\mu m' (\mu' - m')}} d\theta = dt'$$

setzt, d. h. wenn man zuerst für die Veränderliche θ' die Größe t setzt, ohne θ zu verändern, und dann t' für θ, ohne t zu verändern; so verwandelt sich diese Wahrscheinlichkeit der vorhergehenden Gleichung in:

$$\frac{1}{\pi} e^{-t^2 - t'^2} dt\, dt'.$$

Da sich diese Gleichung zu gleicher Zeit in:

$$\frac{m'}{\mu'} - \frac{m}{\mu} = \frac{t \sqrt{2 \mu^3 m' (\mu' - m') + 2 \mu'^3 m (\mu - m)}}{\mu \mu' \sqrt{\mu \mu'}}$$

verwandelt und nur noch die Veränderliche t enthält, so ist ihre Totalwahrscheinlichkeit das in Beziehung auf t' genommene Integral des vorhergehenden Differenzialausdruckes, welches man von $t' = -\infty$ bis $t' = \infty$ nehmen kann, ohne den Werth desselben merklich zu ändern, wodurch man $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$ erhält, und woraus endlich folgt, daß:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-u}^{u} e^{-t^2} dt$$

oder die durch die Formel (13) gegebene Größe P die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß die Differenz $\frac{m'}{\mu'} - \frac{m}{\mu}$ zwischen den Grenzen:

$$\mp \frac{u \sqrt{2 \mu^3 m' (\mu' - m') + 2 \mu'^3 m (\mu - m)}}{\mu \mu' \sqrt{\mu \mu'}}$$

liegt, worin u eine positive und gegebene Größe ist, und welche nur bekannte Zahlen enthalten.

Diese Grenzen stimmen mit denen überein, welche wir in §. 87 auf eine weit einfachere Weise, aber blos für den Fall, wo die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E constant und in den beiden Versuchsreihen dieselbe ist, gefunden haben. Jedoch enthält die Formel (24) des angeführten §.

ein Glied von der Ordnung von $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{\mu'}}$, welches in der Formel (13) nicht vorkommt, und wovon der Grund darin liegt, daſſ wir in den eben verrichteten Rechnungen die Glieder der betrachteten Wahrscheinlichkeiten vernachläſſigt haben, welche von dieser Kleinheitsordnung sein würden.

§. 110. Wir wollen uns in dem gegenwärtigen Werke mit den vielen Aufgaben, worauf man die vorhergehenden Formeln anwenden kann, und wovon wir die hauptſächlichſten in §. 60. und folg. angeführt haben, nicht beſchäftigen, sondern wir beſchränken uns, um ein Anwendungsbeiſpiel zu geben, auf eine bekannte Aufgabe, welche sich auf die Planeten= und Kometenbahnen bezieht.

Wenn man in den weiter oben (§. 99.) mit Γ und $\Gamma_{,}$ bezeichneten Größen:

$$h=g,\ \gamma=\mu g-c,\ c-\varepsilon=2\gamma\alpha,\ c+\varepsilon=2\gamma 6$$

setzt, so erhält man:

$$\frac{1}{(2g)^\mu}\Gamma=\pm(\mu-\alpha)^\mu\mp(\mu-1-\alpha)^\mu$$

$$\pm\frac{\mu.\mu-1}{1.2}(\mu-2-\alpha)^\mu\mp\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}(\mu-3-\alpha)^\mu\pm etc.$$

$$\frac{1}{(2g)^\mu}\Gamma_{,}=\pm(\mu-6)^\mu\mp(\mu-1-6)^\mu$$

$$\pm\frac{\mu.\mu-1}{1.2}(\mu-2-6)^\mu\mp\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}(\mu-3-6)^\mu\pm etc.,$$

wo das obere oder untere Zeichen jedes Gliedes genommen werden muſſ, jenachdem die Größe, welche darin zur μten Potenz erhoben vorkommt, poſitiv oder negativ iſt. Wenn man alſo mit S und T die Summen der Glieder, welche in dieſen beiden Formeln mit ihren obern Zeichen genommen werden müſſen und mit $S_{,}$ und $T_{,}$ die Summen der Glieder, welche mit ihren untern Zeichen genommen werden müſſen, bezeichnet, ſo hat man folglich:

$$\Gamma=(2g)^\mu(S-S_{,}),\ \Gamma_{,}=(2g)^\mu(T-T_{,}).$$

Aber nach einer bekannten und leicht zu beweiſenden Formel hat man für jeden Werth der Größe δ:

$$(\mu-\delta)^{\mu}-\mu(\mu-1-\delta)^{\mu}+\frac{\mu.\mu-1}{1.2}(\mu-2-\delta)^{\mu}$$
$$-\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}(\mu-3-\delta)^{\mu}+etc.=2^{\mu-1}$$

Wenn man folglich successive $\delta=\alpha$ und $\delta=\beta$ setzt, so hat man auch:

$$S+S_{,}=2^{\mu-1},\ T+T_{,}=2^{\mu-1},$$

woraus folgt:

$$\Gamma=(2g)^{\mu}(2^{\mu-1}-2S_{,}),$$
$$\Gamma_{,}=(2g)^{\mu}(2^{\mu-1}-2T_{,}),$$

wodurch sich die Formel (10) in folgende verwandelt:

$$P=\frac{T_{,}-S_{,}}{1.2.3\ldots\mu}.$$

Verwandelt man nun die Zeichen der in den Gliedern von $S_{,}$ und $T_{,}$ zu der Potenz μ erhobenen Größen, wodurch sie alle positiv gemacht werden, und wobei zugleich erforderlich ist, dass man auch die Zeichen dieser Glieder in die entgegengesetzten verwandelt, oder nicht, jenachdem die Zahl μ ungerade oder gerade ist, und kehrt endlich die Ordnung dieser Glieder von endlicher Anzahl um; so sieht man leicht ein, dass sich der Ausdruck von P in folgenden verwandelt:

$$P=\frac{1}{1.2.3\ldots\mu}\Big[\beta^{\mu}-\mu(\beta-1)^{\mu}+\frac{\mu.\mu-1}{1.2}(\beta-2)^{\mu}$$
$$-\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}(\beta-3)^{\mu}+etc.-\alpha^{\mu}+\mu(\alpha-1)^{\mu}$$
$$-\frac{\mu.\mu-1}{1.2}(\alpha-2)^{\mu}+\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}(\alpha-3)^{\mu}-etc.\Big], \qquad (16)$$

welcher mit dem von Laplace auf einem ganz andern Wege gefundenen übereinstimmt. *)

Diese Formel drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei einer beliebigen Anzahl μ von Versuchen die Summe der Werthe einer unbekannten Größe A zwischen den Größen $2\alpha g$ und $2\beta g$ liegt, wenn vorausgesetzt wird, dass alle Werthe von A von 0 bis $2g$ gleich möglich und außerhalb dieser Grenzen unmöglich sind. Jeden der beiden

*) Théorie analytique des probabilités, p. 257.

Theile, woraus diese Formel besteht, setzt man bis zu dem Gliede fort, worin die zu der Potenz μ erhobene Größe aufhört, positiv zu sein, so dass, wenn n die größte in β enthaltene ganze Zahl ist, sich der erste Theil dieser Formel mit dem $(n+1)$ ten oder dem zunächst vorhergehenden Gliede schließt, jenachdem $\mu > n$ oder $\mu < n$ ist, und dasselbe gilt hinsichtlich des zweiten Theiles, wenn n die in α enthaltene größte ganze Zahl ist.

Welche Ursache nun aber auch die Bildung der Planeten bestimmt haben mag, so kann man doch annehmen, dass alle möglichen Neigungen der Ebenen ihrer Bahnen gegen die Ekliptik von 0^0 bis 90^0 ursprünglich gleich wahrscheinlich gewesen sind, und man soll in dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass die Summe der Neigungen der Bahnen der 10 bekannten Planeten, außer der Erde, zwischen gegebenen Grenzen, z. B. zwischen 0^0 und 90^0, hat liegen müssen. Wenn man für die Größe A, welcher die Formel (16) entspricht, die Neigung einer Planetenbahn nimmt, so muss man das Intervall $2g$ der möglichen Werthe von A gleich 90^0 annehmen und in dieser Formel $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und $\mu = 10$ setzen, wodurch sie sich auf:

$$P = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}.$$

reducirt. Da dieser Bruch ungefähr $\frac{1}{4000000}$ beträgt, so folgt, dass eine kleinere Summe als ein rechter Winkel für die Neigungen der Planetenbahnen höchst unwahrscheinlich sein würde, und dass man es als außer allem Zweifel betrachten kann, dass diese Summe größer, als 90^0 hätte sein müssen. Nun beträgt sie aber im Gegentheil ungefähr nur 82^0, und da ihre periodischen Veränderungen nur sehr klein sind; so folgt, dass die Voraussetzung einer gleichen Wahrscheinlichkeit der Neigungen der Planetenbahnen von jeder beliebigen Anzahl von Graden zur Zeit der Bildung der Planeten unzulässig ist, und dass es keinem Zweifel unterliegt, dass irgend eine bei dieser Bildung obwaltende Ursache die kleinen Neigungen der Planetenbahnen hat weit wahrscheinlicher machen müssen, als die übrigen. Die Neigungen der Planetenbahnen sind hier als von der Richtung der Bewegung der Planeten nach dem Sinne der täglichen Bewegung der Erde um die Sonne oder nach entgegengesetztem Sinne, unabhängig betrachtet. Wenn diese beiden Richtungen bei dem Entstehen der Planeten gleich wahrscheinlich gewesen wären, so würde die Wahrscheinlichkeit, dass die Bewegung der 10 Planeten außer der Erde in demselben Sinne, als die der letztern um die Sonne stattfinde, gleich $(\frac{1}{2})^{10}$ sein, welcher Bruch kleiner ist, als ein Milliontel, so dass es auch sehr wenig wahrscheinlich ist, dass

die beiden Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen ursprünglich gleiche Wahrscheinlichkeit gehabt haben, und folglich bei dem Entstehen der Planeten irgend eine unbekannte Ursache die Richtungen aller planetarischen Bewegungen nach demselben Sinne sehr wahrscheinlich gemacht haben muss.

Wenn man für die Größe A die Excentricität einer Planetenbahn nimmt, und annimmt, dass ursprünglich alle ihre Werthe von Null bis zur Einheit gleich wahrscheinlich gewesen sind; so kann man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass die Summe der Excentricitäten der bekannten Planetenbahnen z. B. zwischen 0 und $\frac{5}{4}$ liegen müsste, wenn man in der Formel (16) $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1{,}25$ und $\mu = 11$ setzt, wodurch man:

$$P = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}\left[(1{,}25)^{11} - 11(0{,}25)^{11}\right]$$

erhält. Da diese Wahrscheinlichkeit P kleiner als 3 Milliontel ist, so ist es im Gegentheil äußerst wahrscheinlich, dass die Summe der Excentricitäten der 11 Planetenbahnen die Grenze 1,25 hat überschreiten müssen. Da aber diese Summe, welche nur kleinen periodischen Veränderungen unterliegt, gegenwärtig etwas kleiner als 1,15 ist, so ist folglich die Voraussetzung einer gleichen Wahrscheinlichkeit aller möglichen Werthe von A völlig unzulässig, und es hat bei der Bildung der Planeten ohne Zweifel irgend eine Ursache gegeben, welche die kleinen Excentricitäten sowohl als die kleinen Neigungen wahrscheinlicher gemacht hat.

§. 111. Der seit dem Jahre 240 unserer Zeitrechnung beobachteten Kometen, deren parabolische Elemente die Astronomen so gut als möglich berechnet haben, gibt es jetzt 138, wovon 71 eine directe und 67 eine retrograde Bewegung haben. Der geringe Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen 71 und 67 zeigt schon, dass die unbekannte Ursache des Entstehens der Kometen ihre Bewegungen nach dem einen Sinne nicht wahrscheinlicher macht, als nach dem andern. Die Summe der Neigungen der Bahnen dieser 138 Kometen gegen die Ekliptik beträgt ungefähr 6752^0, d. h. sie ist ungefähr um 2^0 größer, als 75 rechte Winkel. Um nun zu erfahren, ob sie in der Voraussetzung einer gleichen Wahrscheinlichkeit aller möglichen Neigungen von 0^0 bis 90^0 sehr wenig von dieser Größe verschieden sein muss, müsste man also für α und ε in die Formel (16) Zahlen substituiren, welche wenig größer oder kleiner sind, als 75, wodurch die numerische Berechnung dieser Formel ganz unausführbar gemacht würde. Um also in derselben Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit P zu erhalten, dass die Summe der Neigungen der Bahnen aller beobachteten Kometen zwi-

schen gegebenen Grenzen liegen muss, muss man sich der Formel (13) bedienen.

Wir wollen also annehmen, dass die Größe A die Neigung einer Kometenbahn gegen die Ebene der Ekliptik sei. Da die Grenzen der möglichen Werthe von A, welche allgemein mit a und b bezeichnet sind, alsdann $a=0$ und $b=90^0$ sind, und alle diese Werthe als gleich wahrscheinlich betrachtet werden, so drückt die Formel (13) die Wahrscheinlichkeit P aus, dass das Mittel aus einer sehr großen Anzahl μ beobachteter Neigungen von Kometenbahnen zwischen die Grenzen:

$$\left(45 \mp \frac{90\,u}{\sqrt{6\mu}}\right)$$

fällt (§. 102). Nimmt man $u=1,92$ und setzt $\mu=138$, so erhält man:

$$P=0,99338$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass in der Voraussetzung einer gleichen Wahrscheinlichkeit aller möglichen Neigungen, die mittlere Neigung der Bahnen der 138 beobachteten Kometen zwischen den Grenzen $45^0 \mp 6^0$ liegt, so dass man ungefähr 150 gegen 1 wetten könnte, dass diese mittlere Neigung zwischen 39^0 und 51^0 liegen müsse, und in der That hat man $48^0\,55'$ für ihren Werth gefunden. Es ist also kein Grund für die Annahme vorhanden, dass die unbekannte Ursache des Entstehens der Kometen die verschiedenen Neigungen ihrer Bahnen ungleich wahrscheinlich gemacht habe.

Die Formel (13) drückt auch, ohne über das Wahrscheinlichkeitsgesetz dieser Neigungen irgend eine Voraussetzung zu machen, die Wahrscheinlichkeit aus, dass die mittlere Neigung der Bahnen einer sehr großen Anzahl μ von Kometen, welche man in Zukunft beobachten wird, sich von der mittlern Neigung von $48^0\,55'$ in Beziehung auf die 138 bereits beobachteten Kometen, nur um eine zwischen den Grenzen:

$$\mp\frac{ul\sqrt{138+\mu'}}{\sqrt{138\,\mu'}} \quad (\text{§. } 107.)$$

liegende Anzahl von Graden entfernen wird. Aus den berechneten Neigungen der Bahnen dieser 138 Kometen ergibt sich ein Werth der in diesen Grenzen vorkommenden Größe $l=34^0\,49'$, und setzt man z. B. $\mu'=\mu$ und nimmt, wie weiter oben, $u=1,92$; so kann man 150 gegen 1 wetten, dass die Differenz zwischen der mittlern Neigung der Bahnen von 138 neuen Kometen und der mittlern Neigung

der bereits beobachteten 138 Kometen zwischen den Grenzen $\mp 8^0\,21'$ liegt. Die Zahl der existirenden Kometen ist ohne Zweifel gegen die Anzahl der Kometen, deren Bahnen man hat berechnen können, sehr groß. Wenn man für μ' die Anzahl der unbekannten Kometen nimmt, so reduciren sich die vorhergehenden Grenzen fast auf $\mp \frac{u\,l}{\sqrt{138}}$, d. h. sie sind in dem Verhältnisse von 1 zu $\sqrt{2}$ enger, als für $\mu' = \mu$, und wenn man wieder $u = 1{,}92$ nimmt, so ist $\frac{150}{151}$ sehr nahe wieder die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz zwischen der mittleren Neigung der Bahnen der unbekannten Kometen und der mittleren Neigung der Bahnen der bekannten Kometen zwischen den Grenzen $\mp 5^0\,42'$ liegt.

Wenn man alle beobachteten Kometen in zwei Reihen von gleicher Anzahl theilt, wovon die eine die 69 ältern und die andere die 69 neuern Kometen enthält; so findet man für die mittlere Neigung in der ersten Reihe $49^0\,38'$ und für die in der zweiten $48^0\,38'$, so daß diese beiden mittleren Größen kaum um einen halben Grad von einander verschieden sind. Dieses Beispiel ist sehr dazu geeignet, zu zeigen, daß die mittleren Werthe derselben Größe fast mit einander übereinstimmen, selbst wenn die Anzahl der Beobachtungen nicht sehr groß ist und die beobachteten Werthe sehr ungleich sind, wie es in dem vorliegenden Beispiele der Fall ist, wo die kleinste Neigung einer Kometenbahn $1^0\,41'$ und die größte $89^0\,48'$ beträgt. Die mittleren Neigungen der Bahnen der 71 Kometen von einer directen Bewegung und die der 67 Kometen von einer retrograden Bewegung entfernen sich mehr von einander; denn die erste beträgt $47^0\,3'$ und die zweite $50^0\,54'$.

Wenn man in der nördlichen Halbkugel durch den Mittelpunkt der Sonne ein Perpendikel auf die Ebene der Ekliptik zieht, so trifft dasselbe das Himmelsgewölbe im nördlichen Pole der Ekliptik, und wenn man in derselben Halbkugel und durch denselben Punkt ein Perpendikel auf die Ebene der Bahn eines Kometen zieht, so trifft dasselbe das Himmelsgewölbe im nördlichen Pole dieser Bahn. Die Winkelentfernung dieser beiden Pole ist der Neigung dieser Kometenbahn gegen die Ekliptik gleich; aber man muß nicht, wie es der achtungswerthe Hr. Uebersetzer von Herschel's Astronomie thut, die Voraussetzung, daß alle Punkte des Himmels mit derselben Wahrscheinlichkeit Pole von Kometenbahnen sein können, mit der Voraussetzung verwechseln, daß die Neigungen der Kometenbahnen von allen Graden gleich wahrscheinlich sind.

Denn es seien a und b zwei kreisförmige Zonen des Himmels in der nördlichen Halbkugel von einer unendlich kleinen Breite, welche den Nordpol der Ekliptik zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte haben, und deren Winkelentfernungen von diesem Pole durch α und β ausgedrückt werden; ferner sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig in dieser Halbkugel genommener Punkt der Zone a angehört und q die Wahrscheinlichkeit, dass er der Zone b angehört, so ist klar, dass sich diese Brüche p und q wie die Ausdehnungen a und b der beiden Zonen und folglich wie die Sinus der Winkel α und β verhalten. Nimmt man nun an, dass alle Punkte des Himmels gleich gut geeignet sind, Pole von Kometenbahnen zu werden, so drücken p und q die Wahrscheinlichkeiten der Entfernungen α und β zwei dieser Pole von der Ekliptik aus, oder mit andern Worten, die Wahrscheinlichkeiten der Neigungen zweier Kometenbahnen, welche diesen Entfernungen α und β gleich sind. Folglich wären in der gemachten Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Neigungen der Kometenbahnen den Sinussen dieser Neigungen selbst proportional, statt einander gleich zu sein. Die Wahrscheinlichkeit einer Neigung von 90^0 wäre also doppelt so groß, als die einer Neigung von 30^0 und beide wären gegen die Wahrscheinlichkeit einer unendlich kleinen Neigung unendlich groß.*)

---

*) Es scheint, dass sich im Himmelsraume sowohl um die Sonne, als um die Planeten und vielleicht auch um die Trabanten eine unermesslich große Anzahl anderer Körper bewegen, welche zu klein sind, um beobachtet werden zu können. Man nimmt an, dass diese Körper, wenn sie gegen unsere Atmosphäre stoßen, wegen des Unterschiedes ihrer Geschwindigkeit und der unseres Planeten durch ihre Reibung mit der Luft bis zu einem solchen Grade erhitzt werden, dass sie sich entzünden und zuweilen zerplatzen. Die Richtung ihrer Bewegung wird durch diesen Widerstand so verändert, dass sie oft auf die Oberfläche der Erde fallen, und dieses ist der wahrscheinlichste Ursprung der Aerolithen. Hierdurch lässt sich auch ein sehr merkwürdiges Phänomen, welches man seit einiger Zeit mehrere Male zu derselben Zeit des Jahres in weit von einander entfernten Orten beobachtet hat, erklären. In der Nacht vom 12ten zum 13ten November haben nämlich verschiedene Beobachter in Amerika und an andern Orten eine außerordentlich große Anzahl ähnlicher Körper wie die Sternschnuppen am Himmel gesehen. Nun kann man aber annehmen, daß diese Körper einer noch weit größern Gruppe angehören, welche sich um die Sonne bewegt, und die Ebene der Ekliptik an einer Stelle trifft, deren Entfernung von der Sonne der Entfernung der Erde von letzterer zu der Zeit, wo sie sich an demselben Orte befindet, gleich ist. Geht alsdann unsere Atmosphäre zu dieser Zeit durch diese Gruppe von Körpern, so wirkt sie auf einen Theil derselben, wie auf die Aerolithen, wodurch das in Rede stehende Phänomen hervorgebracht wird. Wenn diese Gruppe von Körpern nicht eine sehr beträchtliche Ausdehnung längs ihrer Bahn hat, d. h. wenn

§. 112. Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir nun noch die Wahrscheinlichkeitsformeln zusammenstellen, welche darin, so wie in dem vorhergehenden Kapitel, abgeleitet sind. Die sehr groß vorausgesetzte Anzahl der Versuche wird durch μ ausgedrückt; sie besteht aus zwei Theilen m und n, welche ebenfalls als sehr große Zahlen angenommen werden. Die Formeln sind desto genauer, je größer diese Zahl μ ist, und sie würden völlig genau sein, wenn μ unendlich groß wäre.

1) Es seien p und q die constanten Wahrscheinlichkeiten der beiden entgegengesetzten Ereignisse E und F während der ganzen Dauer der Versuche, so daß $p+q=1$ ist, und U die Wahrscheinlichkeit, daß bei den $\mu=m+n$ Versuchen das Ereigniß E, $m$mal und das Ereigniß F, $n$mal stattfindet; so hat man (§. 69):

$$U=\left(\frac{\mu p}{m}\right)^m\left(\frac{\mu q}{n}\right)^n\sqrt{\frac{\mu}{2\pi m n}}. \qquad (a)$$

Diese Formel reducirt sich nach §. 79. auf:

$$U=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}e^{-v^2},$$

wenn man

$$m=\mu p-v\sqrt{2\mu p q},\ n=\mu q+v\sqrt{2\mu p q}$$

nimmt, wo v eine positive oder negative, aber gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Größe ist, und unter dieser Form findet sie auch statt, wenn sich die Wahrscheinlichkeiten von E und F von einem Versuche zum andern ändern, indem man alsdann nach der Formel (2) in §. 95. für p

---

ihr, von der Sonne aus gesehener scheinbarer Durchmesser nicht weit größer ist, als der der Erde, so muß, wenn dieses Phänomen immer zu derselben Jahreszeit stattfinden soll, die Geschwindigkeit dieser Art zersprengter Planeten von der der Erde wenig verschieden sein, weswegen die große Axe und Excentricität der Bahn dieser Körpergruppe doch sehr von der großen Axe und Excentricität unserer Erdbahn verschieden sein kann, und alsdann haben die Perturbationen der elliptischen Bewegung das Zusammentreffen dieser Körpergruppe mit der Erde seit einiger Zeit möglich und für die Zukunft unmöglich machen können. Wenn dagegen die in Rede stehende Körpergruppe einen continuirlichen Ring um die Sonne bildet, so kann ihre Circulationsgeschwindigkeit von der der Bewegung der Erde um die Sonne sehr verschieden sein, und die durch die Wirkungen der Planeten verursachten Verrückungen dieser Körpergruppen im Himmelsraume können das in Rede stehende Phänomen ebenfalls wieder zu verschiedenen Zeiten möglich oder unmöglich machen.

und q die **mittleren** Werthe nimmt, welche sich aus der ganzen Reihe der μ successiven Versuche ergeben.

2) Wenn die Ereignisse E und F bei den μ Versuchen resp. m und n mal stattfinden und ihre Wahrscheinlichkeiten p und q unbekannt sind, und U' die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daſſ diese Ereignisse bei $\mu' = m' + n'$ künftigen Versuchen resp. m' und n' mal stattfinden werden, wo die Zahlen m' und n' den Zahlen m und n proportional sind, so daſſ:

$$m' = \frac{\mu' m}{\mu}, \; n' = \frac{\mu' n}{\mu}$$

ist; so hat man nach §. 71. für jeden Werth von μ':

$$U' = \sqrt{\frac{\mu}{\mu + \mu'}} \, U_{,}, \qquad (b)$$

wo U' die Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses bezeichnet, welche stattfinden würde, wenn die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ zuverlässig die Wahrscheinlichkeiten von E und F wären, d. h. es ist der Kürze wegen:

$$\frac{1.2.3\ldots\mu'}{1.2.3\ldots m'.1.2.3\ldots n'} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{m'} \left(\frac{n}{\mu}\right)^{n'} = U_{,}$$

gesetzt.

3) Wenn die constanten Wahrscheinlichkeiten p und q von E und F gegeben sind und P die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daſſ das Ereigniſſ E bei $\mu = m + n$ Versuchen **wenigstens** m mal und das Ereigniſſ F **höchstens** n mal stattfindet; so hat man nach §. 77:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-t^2} dt + \frac{(\mu + n)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi \mu m n}} e^{-k^2}, \\ P &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-t^2} dt + \frac{(m + n)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi \mu m n}} e^{-k^2} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

wo k eine positive Gröſſe ist, deren Quadrat:

$$k^2 = n \log \frac{n}{q(\mu + 1)} + (m + 1) \log \frac{m + 1}{p(\mu + 1)}$$

ist, und die erste oder zweite Formel angewandt wird, jenachdem $\frac{q}{p} > \frac{n}{m+1}$, oder $\frac{q}{p} < \frac{n}{m+1}$ ist.

4) Wenn R die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daſſ die Ereignisse E und F bei μ Versuchen resp. eine Anzahl von Malen stattfinden, welche zwischen den Grenzen:

$$\mu p \mp u\sqrt{2\mu p q},\ \mu q \pm u\sqrt{2\mu p q}$$

liegen, wo u eine gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine positive Größe ist; so hat man nach §. 79:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}e^{-u^2}, \qquad (d)$$

und umgekehrt, wenn die Wahrscheinlichkeiten p und q unbekannt sind, und die Ereignisse E und F bei $\mu = m + n$ Versuchen resp. m und n mal stattgefunden haben; so hat man nach §. 83:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \sqrt{\frac{\mu}{2\pi m n}}\,e^{-u^2} \qquad (e)$$

für die Wahrscheinlichkeit, daſſ die Werthe von p und q resp. zwischen den Grenzen:

$$\frac{m}{\mu} \pm \frac{u}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}},\ \frac{n}{\mu} \mp \frac{u}{\mu}\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$$

liegen.

5) In zwei sehr langen resp. aus μ und μ' Versuchen bestehenden Versuchsreihen finde das Ereigniſſ E resp. m und m' mal statt und das Ereigniſſ F resp. n und n' mal, u bezeichne eine resp. gegen $\sqrt{\mu}$ und $\sqrt{\mu'}$ sehr kleine positive Größe und ϖ sei die Wahrscheinlichkeit, daſſ die Differenz $\frac{m}{\mu} - \frac{m'}{\mu'}$ zwischen die Grenzen:

$$\mp \frac{u\sqrt{2(\mu^3 m'n' + \mu'^3 mn)}}{\mu\mu'\sqrt{\mu\mu'}}$$

fällt, und daſſ dasselbe mit der Differenz $\frac{n}{\mu} - \frac{n'}{\mu'}$ hinsichtlich dieser mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Grenzen der Fall ist; so hat man nach §. 87:

$$\varpi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}dt + \sqrt{\frac{\mu\mu'}{2\pi m'n'(\mu+\mu')}}\,e^{-\frac{u^2(\mu^3 m'n' + \mu'^3 mn)}{\mu^2 m'n'(\mu+\mu')}} \qquad (f).$$

Da auch fast $\frac{m}{\mu} = \frac{m'}{\mu'}$ und $\frac{n}{\mu} = \frac{n'}{\mu'}$ ist, so kann man, ohne die Werthe von ϖ merklich zu verändern, in dem letzten Gliede von ϖ, welches immer ein sehr kleiner Bruch ist, die Buchstaben μ', m', n' für μ, m, n und umgekehrt diese für jene setzen. Diese Formel entspricht, wenn man ihr letztes Glied unberücksichtigt lässt (§. **109**), dem allgemeinen Falle, wo sich die Wahrscheinlichkeiten von E und F von einem Versuche zum andern ändern, wofern in den beiden Versuchsreihen die bekannten oder unbekannten möglichen Ursachen dieser Ereignisse keine Veränderung erfahren, d. h. wofern die Existenz dieser Ursachen dieselbe Wahrscheinlichkeit behält, und jede derselben dem Stattfinden des Ereignisses E, so wie dem von F immer dieselbe Wahrscheinlichkeit gibt.

6) Wenn die Ereignisse E und F bei μ Versuchen resp. wieder m und n mal stattfinden, so seien allgemein m_1 und n_1 die Zahlen, welche ausdrücken, wie vielmal zwei andere entgegengesetzte Ereignisse E_1 und F_1 bei einer ebenfalls sehr großen Anzahl μ_1 von Versuchen stattfinden, und wir wollen:

$$\frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m}{\mu} = \delta$$

setzen, wo δ ein sehr kleiner positiver oder negativer Bruch ist. Ferner wollen wir die unbekannten und als constant vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten des Stattfindens von E und E_1 mit p und p_1 bezeichnen, und mit λ die Wahrscheinlichkeit, dass p_1 wenigstens um eine Größe, die einem sehr kleinen positiven und gegebenen Bruche ε gleich ist, größer ist als p. Bezeichnet alsdann u eine positive Größe, und setzt man:

$$u = \pm \frac{(\varepsilon - \delta)\mu\mu_1 \sqrt{\mu\mu_1}}{\sqrt{2(\mu^3 m_1 n_1 + \mu_1^3 mn)}},$$

jenachdem der Factor $\varepsilon - \delta$ positiv oder negativ ist; so hat man nach §. **88**:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2} dt, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2} dt, \qquad (g)$$

indem sich der erste Ausdruck auf den Fall bezieht, wo die Differenz $\varepsilon - \delta$ positiv ist, und der zweite auf den Fall, wo diese Differenz negativ ist. Diese Formeln drücken auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass die unbekannte Wahrscheinlichkeit p des Stattfindens von E das

durch die Beobachtung gegebene Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ um einen ebenfalls gegebenen Bruch ϖ übertrifft. Zu dem Zwecke braucht man nur:

$$u = \pm \left(\omega - \frac{m}{\mu}\right) \frac{\mu\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$$

zu setzen und die erste oder zweite Formel zu nehmen, jenachdem die Differenz $\omega - \frac{m}{\mu}$ eine positive oder negative Größe ist.

7) Wenn die Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse E und F sich von einem Versuche zum andern ändern, so seien p_i und q_i ihre Werthe für den $i$ten Versuch, so daß $p_i + q_i = 1$ ist für alle Indices i. Indem sich die Summen Σ von $i=1$ bis $i=\mu$ erstrecken, wollen wir der Kürze wegen:

$$\frac{1}{\mu}\Sigma p_i = p, \quad \frac{1}{\mu}\Sigma q_i = q, \quad \frac{2}{\mu}\Sigma p_i q_i = k^2$$

setzen. Ferner seien m und n wieder die Zahlen, welche ausdrücken, wievielmal die Ereignisse E und F in den μ Versuchen stattfinden und u sei eine positive, gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Größe; so hat man nach §. **96**:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{k\sqrt{\pi\mu}}e^{-u^2} \qquad (h)$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{n}{\mu}$ zwischen den Grenzen:

$$p \mp \frac{ku}{\sqrt{\mu}}, \quad q \pm \frac{ku}{\sqrt{\mu}}$$

liegen, was in dem besondern Falle constanter Wahrscheinlichkeiten mit der Formel (d) übereinstimmt.

8) Wenn irgend eine Größe A alle zwischen den Grenzen $h \mp g$ liegende Werthe bekommen kann, und alle diese Werthe gleich wahrscheinlich und die allein möglichen sind, so sei P die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Reihe von i Versuchen die Summe der erhaltenen Werthe von A zwischen gegebenen Grenzen $c \mp \varepsilon$ liegt. Alsdann ist nach §. **99**:

$$2(2g)^i P = \frac{r - r_\prime}{1.2.3\ldots i}, \qquad (i)$$

wenn man der Kürze wegen:

$$\Gamma = \pm (ih+ig-c+\varepsilon)^i \mp i(ih+ig-2g-c+\varepsilon)^i$$
$$\pm \frac{i.i-1}{1.2}(ih+ig-4g-c+\varepsilon)^i$$
$$\mp \frac{i.i-1.i-2}{1.2.3}(ih+ig-6g-c+\varepsilon)^i \pm etc.,$$
$$\Gamma_{,} = \pm (ih+ig-c-\varepsilon)^i \mp i(ih+ig-2g-c-\varepsilon)^i$$
$$\pm \frac{i.i-1}{1.2}(ih+ig-hg-c-\varepsilon)^i$$
$$\mp \frac{i.i-1.i-2}{1.2.3}(ih+ig-6g-e-\varepsilon)^i \pm etc.$$

setzt und in jedem Gliede das obere oder untere Zeichen nimmt, je-nachdem die darin vorkommende zur Potenz i erhobene Größe positiv oder negativ ist. g und ε sind positive Größen, aber h und c können positive oder negative Größen sein.

9) Wenn man die Summe der Werthe von A, welche bei einer sehr großen Anzahl μ von Versuchen stattfinden, mit s bezeichnet, so hat man nach §. 101 für jedes Wahrscheinlichkeitsgesetz der möglichen Werthe von A bei jedem Versuche, und auf welche Weise sich auch dieses Gesetz von einem Versuche zum andern ändern mag, immer:

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\mu}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt \qquad (k)$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß der mittlere Werth $\frac{s}{\mu}$ von A zwischen die Grenzen:

$$k \mp \frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$$

fällt, wo u eine positive und gegen $\sqrt{\mu}$ sehr kleine Größe ist, und k und k Größen sind, wovon die zweite positiv ist, und welche von den Wahrscheinlichkeiten der Werthe von A während der ganzen Dauer der Versuche abhängig sind. Wenn diese Wahrscheinlichkeiten constant, für alle zwischen gegebenen Grenzen a und b liegende Werthe von A gleich und für alle außerhalb dieser Grenzen liegende Werthe Null sind; so hat man:

$$k = \tfrac{1}{2}(a+b),\ h = \frac{b-a}{2\sqrt{6}}.$$

Wenn A nur eine endliche Anzahl möglicher Werthe c_1, c_2, c_3, $\ldots c_\nu$ hat, und diese ν constanten Werthe gleich wahrscheinlich sind, so ist:

$$k = \frac{1}{\nu}(c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\nu),$$

$$h = \frac{1}{2\nu^2}[\nu(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_\nu^2) - (c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\nu)^2].$$

10) Es sei λ_n der Werth von A, welcher bei dem $n$ten Versuche stattgefunden hat. Wir wollen:

$$\frac{1}{\mu}\Sigma\lambda_n = \lambda, \; \frac{1}{\mu}\Sigma(\lambda_n - \lambda)^2 = \tfrac{1}{2}l^2$$

setzen, wo sich die Summen Σ von $n=1$ bis $n=\mu$ erstrecken. Ferner wollen wir annehmen, daß die Ursachen aller möglichen Werthe von A keine Veränderung erfahren, sowohl hinsichtlich ihrer resp. Wahrscheinlichkeiten, als hinsichtlich der Wahrscheinlichkeiten, welche sie jedem dieser Werthe ertheilen. Alsdann gibt es eine gewisse Größe γ, welcher sich der mittlere Werth $\frac{s}{\mu}$ von A fortwährend desto mehr nähert, je größer μ wird, und welche derselbe erreichen würde, wenn μ unendlich würde, und die Formel (k) drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daß diese Größe γ zwischen den bekannten Grenzen:

$$\frac{s}{\mu} \mp \frac{ul}{\sqrt{\mu}}$$

liegt (§. 106).

11) In einer zweiten Reihe von einer sehr großen Anzahl μ' von Versuchen sei s' die Summe der Werthe von A und l' der Werth der sich auf die erste Versuchsreihe beziehenden Größe l für diese zweite Versuchsreihe, so drückt die Formel (k) nach §. 107 ebenfalls die Wahrscheinlichkeit aus, daß die Differenz $\frac{s'}{\mu'} - \frac{s}{\mu}$ der beiden mittleren Werthe von A zwischen den Grenzen:

$$\pm \frac{u\sqrt{\mu l'^2 + \mu' l^2}}{\sqrt{\mu\mu'}}$$

liegt, oder da sehr nahe $l' = l$ ist, so drückt diese Formel auch die

Wahrscheinlichkeit aus, dass der sich aus der zweiten Versuchsreihe ergebende mittlere Werth $\frac{s'}{\mu'}$ zwischen den Grenzen:

$$\frac{s}{\mu} \mp \frac{u\, l\sqrt{\mu + \mu'}}{\sqrt{\mu\mu'}}$$

liegt, welche nur von den Resultaten der ersten Versuchsreihe und der gegebenen Größe u abhängen und desto enger sind, je größer μ' gegen μ ist.

12) Zur Bestimmung des Werthes derselben Größe A hat man mehrere Versuchsreihen angestellt, welche aus sehr großen Anzahlen $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ von Versuchen bestehen; die Summen der Werthe von A, welche man in diesen successiven Versuchsreihen erhalten hat, sind resp. $s, s', s'', \ldots$; die vorhergehende Größe l bezieht sich immer auf die erste Versuchsreihe und $l', l'', \ldots$ bezeichnen die analogen Größen für die folgenden Versuchsreihen; es wird vorausgesetzt, dass sich die Ursachen der Fehler von einer Versuchsreihe zur andern verändern, aber dass dennoch alle mittlern Werthe $\frac{s}{\mu}, \frac{s'}{\mu'}, \frac{s''}{\mu''}, \ldots$ ohne Ende gegen dieselbe unbekannte Größe γ, welche der wahre Werth von A sein würde, wenn diese Ursachen die Fehler von gleicher Größe und entgegengesetztem Zeichen in einer oder mehrern der Beobachtungsreihen nicht ungleich wahrscheinlich machten, convergiren, je größer die Zahlen $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ werden. Alsdann drückt die Formel (k) nach §. **108** wieder die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Größe γ zwischen den Grenzen:

$$\frac{sq}{\mu} + \frac{s'q'}{\mu'} + \frac{s''q''}{\mu''} + etc. \mp \frac{u}{D},$$

liegt, worin der Kürze wegen:

$$\frac{\mu}{l^2} + \frac{\mu'}{l'^2} + \frac{\mu''}{l''^2} + etc. = D^2,$$

$$\frac{\mu}{D^2 l^2} = q, \ \frac{\mu'}{D^2 l'^2} = q', \ \frac{\mu''}{D^2 l''^2} = q'', \ etc.$$

gesetzt ist. Ferner ist die Größe $\frac{sq}{\mu} + \frac{s'q'}{\mu'} + \frac{s''q''}{\mu''} + etc.$, d. h. die Summe der resp. mit den Größen $q, q', q'', \ldots$ multiplicirten mittleren Werthe $\frac{s}{\mu}, \frac{s'}{\mu'}, \frac{s''}{\mu''}, \ldots$, der vortheilhafteste Näherungswerth von γ, welchen man aus der Verbindung aller Beobachtungsreihen

ableiten kann, d. h. der Werth dieser Unbekannten, dessen Fehlergrenzen $\mp \frac{u}{D}$ die möglichst kleinste Ausdehnung haben für einen gegebenen Werth von u oder bei einem gleichen Grade der Wahrscheinlichkeit.

13) Wenn endlich die Ursachen des Stattfindens eines Ereignisses E während der Versuche dieselben bleiben, wie bei der Formel (f) näher erörtert ist; so convergirt das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ der Zahl von Malen, worin das Ereigniss E stattfindet, zur Gesammtzahl der Versuche fortwährend gegen eine bestimmte Größe r, welche es in aller Strenge erreichen würde, wenn μ unendlich groß würde, und wenn man in der Formel (f) das letzte Glied unberücksichtigt läßt, so drückt sie, oder auch die Formel (k), die Wahrscheinlichkeit aus, daß der unbekannte Werth von r zwischen die Grenzen:

$$\frac{m}{\mu} \mp \frac{u\sqrt{2m(\mu-m)}}{\mu\sqrt{\mu}}$$

fällt.

§. **113.** Zur Vervollständigung dieser Formeln müßten nun noch die hinzugefügt werden, welche sich auf die Wahrscheinlichkeit der Werthe einer oder mehrerer Größen beziehen, die aus einer sehr großen Anzahl linearer und eben so vielen Beobachtungen entsprechender Gleichungen abgeleitet sind; allein wir verweisen in dieser Beziehung auf die Théorie analytique des probabilités. Laplace hat durch Anwendung derselben auf ein System von **126** Bedingungsgleichungen für die Bewegung des Saturns in der Länge, welche von Bouvard gebildet sind, und durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf diese Gleichungen gefunden, daß man **1000000** gegen **1** wetten kann, daß die Masse des Jupiters, wenn die der Sonne zur Einheit genommen wird, nicht um mehr, als $\frac{1}{100}$ des Bruches $\frac{1}{1070}$ größer oder kleiner als derselbe sein kann.*) Jedoch haben spätere Beobachtungen einer andern Art für diese Masse fast den Bruch $\frac{1}{1050}$ gegeben, welcher den Bruch $\frac{1}{1070}$ ungefähr um $\frac{1}{50}$ seines Werthes übersteigt, was also die Unrichtigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beweisen schiene. Hinsichtlich des Werthes $\frac{1}{1050}$ für die Masse des Jupiters, welcher von Encke aus den Perturbationen des Kometen von der Periode von **1204** Tagen, von Gauß und Nicolai aus denen der Vesta und der Juno und von Airy aus den Elongationen der

*) Premier supplément à la Théorie analytique des probabilités, page **24**. oder Anhang IV.

Jupiterstrabanten, welche derselbe neuerlich gemessen hat, abgeleitet ist, kann kein Zweifel stattfinden. Wenn die Laplace'schen Rechnungen mit einer sich der Gewissheit sehr nähernden Wahrscheinlichkeit für die Masse des Jupiters einen Werth gegeben haben, welcher um $\frac{1}{50}$ kleiner ist, als der wahre Werth, so darf man daraus doch nicht schließen, dass der Jupiter den Saturn nicht so stark anziehe, als seine eigenen Satelliten, die Kometen und die kleinen Planeten, und dieser Fehler rührt auch von keiner Unrichtigkeit der Formeln für die Wahrscheinlichkeit, wovon Laplace Gebrauch gemacht hat, her; sondern es sind Gründe vorhanden, welche annehmen lassen, dass Laplace die Masse des Jupiters etwas zu klein gefunden hat, weil in dem so complicirten Ausdrucke für die Perturbationen des Jupiters, woran bereits mehrere Correctionen vorgenommen sind, und welcher deren noch andere bedürfen kann, einige unrichtige Glieder vorkommen. Dieser wichtige Punkt in der Mechanik des Himmels wird durch das Resultat der Arbeit, womit sich Bouvard gegenwärtig beschäftigt, um seine schon so genauen Tafeln der Bewegungen des Saturns und Jupiters ganz von Neuem zu bilden, ohne Zweifel näher beleuchtet werden.

Fünftes Kapitel.

Anwendung der allgemeinen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Entscheidungen der Geschworenengerichte und der Urtheile der Tribunale. *)

§. 114. Bei einer so feinen Untersuchung wird es zweckmäßig sein, zuerst die einfachsten Fälle zu betrachten, ehe wir die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit umfassen.

Wir wollen daher zuerst annehmen, dass nur ein einziger Geschworener vorhanden sei, und die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte schuldig sei, wenn er vor diesen Geschworenen gestellt wird, mit k bezeichnen, welche aus der Voruntersuchung und der darauf erfolgten Anklage entspringt. Ferner wollen wir die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Geschworene bei seiner Entscheidung nicht irret, mit u bezeich-

*) Diese Aufgabe ist auch in einer von Ostrograski 1834 in der Petersburger Akademie der Wissenschaften gelesenen Abhandlung behandelt; allein der Verfasser hat, nach dem uns von ihm zugesandten gedruckten Auszuge zu urtheilen, die Aufgabe aus einem ganz andern Gesichtspunkte betrachtet, als wir.

nen, und wenn dieses der Fall ist, die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Angeklagte wird verurtheilt werden, γ nennen. Dieses Ereigniſſ findet statt, wenn der Angeklagte schuldig ist und der Geschworene sich nicht irret, oder wenn der Angeklagte unschuldig ist und der Geschworene sich irret. Nach der Regel in §. **5** wird die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles durch das Product aus k und u und die des zweiten Falles durch das Product aus $1-k$ und $1-u$ ausgedrückt. Nach der Regel in §. **10** hat man also für die vollständige Wahrscheinlichkeit der Verurtheilung des Angeklagten:

$$\gamma = ku + (1-k)(1-u). \qquad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit seiner Freisprechung ist also $= 1-\gamma$. Dieses Ereigniſſ findet statt, wenn der Angeklagte schuldig ist und der Geschworene sich irret, oder wenn der Angeklagte unschuldig ist, und der Geschworene sich nicht irret, und da die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Fälle durch die Producte $k(1-u)$ und $(1-k)u$ ausgedrückt werden; so hat man die Gleichung:

$$1-\gamma = k(1-u) + (1-k)u,$$

welche sich auch aus der vorhergehenden ergibt. Zieht man diese letzte Gleichung von der ersten ab, so erhält man:

$$2\gamma - 1 = (2k-1)(2u-1),$$

woraus erhellet, daſſ die Größe $2\gamma - 1$ mit $2k-1$ oder $2u-1$ zugleich verschwindet und positiv oder negativ ist, jenachdem die Größen $2k-1$ und $2u-1$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Es ist auch:

$$\gamma = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(2k-1)(2u-1),$$

d. h. γ ist um die Hälfte des positiven oder negativen Productes $(2k-1)(2u-1)$ größer, als $\frac{1}{2}$.

Nach der Entscheidung des Geschworenen lassen sich nur zwei Voraussetzungen machen, d. h. man kann annehmen, daſſ der Angeklagte entweder schuldig, oder daſſ er unschuldig ist. Die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Hypothesen werden, wie die aller übrigen hypothetischen Ursachen, nach der Regel in §. **34** bestimmt. Da übrigens die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten der Einheit gleich ist, so braucht nur eine bestimmt zu werden.

Wenn der Angeklagte verurtheilt ist, so sei p die Wahrscheinlichkeit der ersten Voraussetzung oder seiner Schuld. Alsdann hat man nach der angeführten Regel:

$$p = \frac{ku}{ku + (1-k)(1-u)}; \tag{2}$$

denn das beobachtete Ereigniß ist hier die Verurtheilung des Angeklagten, wofür die Wahrscheinlichkeit, wie wir eben gesehen haben, in dieser ersten Voraussetzung $= ku$ und in der entgegengesetzten Voraussetzung, oder seiner Unschuld, $= (1-k)(1-u)$ ist.

Wenn der Angeklagte freigesprochen ist, so sei q die Wahrscheinlichkeit der zweiten Hypothese oder seiner Unschuld. Da das beobachtete Ereigniß alsdann die Freisprechung des Angeklagten ist, wofür die Wahrscheinlichkeit, wie wir eben gesehen haben, in dieser Voraussetzung $= (1-k)u$ und in der entgegengesetzten Voraussetzung $= k(1-u)$ ist; so hat man nach der angeführten Regel:

$$q = \frac{(1-k)u}{(1-k)u + k(1-u)}. \tag{3}$$

Erwägt man, daß die Nenner der Ausdrücke von p und q die Werthe von γ und $1-\gamma$ sind, so hat man:

$$p = \frac{ku}{\gamma},\ q = \frac{(1-k)u}{1-\gamma},$$

woraus folgt:

$$u = p\gamma + q(1-\gamma),$$

als ein Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, daß sich der Geschworene nicht irret, dessen Richtigkeit leicht nachzuweisen ist. Denn dieser Umstand kann auf zwei verschiedene Weisen stattfinden, nämlich wenn der Angeklagte verurtheilt wird und schuldig ist, oder wenn er freigesprochen wird und unschuldig ist. Nun ist aber nach der Regel in §. 9 für die Wahrscheinlichkeit eines aus zwei einfachen Ereignissen zusammengesetzten Ereignisses, wenn die resp. Wahrscheinlichkeiten der einfachen Ereignisse gegenseitigen Einfluß auf einander haben, die Wahrscheinlichkeit der ersten Art des Nichtirrens des Geschworenen das Product aus γ und p und die der zweiten Art das Product aus $1-\gamma$ und q. Folglich ist auch der vollständige Werth von u die Summe dieser beiden Producte. Nach dem Ausspruche des Urtheiles des Geschworenen ist die Wahrscheinlichkeit, daß er sich nicht geirret hat, nichts anders, als p, wenn der Angeklagte verurtheilt ist, und $= q$, wenn er freigesprochen ist. Wenn k nicht $= \frac{1}{2}$ ist, so kann sie nur $= u$ sein, wie vorher, wenn entweder $u = 0$, oder $u = 1$ ist.

Diese Formeln enthalten die vollständige Auflösung des Problemes

für den Fall eines einzigen Geschworenen, und die Aufgabe ist alsdann keine andere, als die der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines von einem Zeugen bezeugten Factums, mit welcher Aufgabe wir uns bereits in §. 36 beschäftigt haben. Die Schuld des Angeklagten ist hier das Factum, welches wahr oder falsch sein kann. Vor dem Ausspruche des Geschworenen hatte man einen gewissen Grund, zu glauben, dass dieses Factum wahr sei, welcher aus den schon damals vorhandenen Daten entsprang; k war die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit des Factums und $1-k$ die der Unschuld des Angeklagten. Nach der Entscheidung des Geschworenen haben sich die Data für die Wahrheit des Factums um eins vermehrt, wodurch sich k in eine andere Wahrscheinlichkeit p verwandelt, wenn der Geschworene entschieden oder bezeugt hat, dass der Angeklagte schuldig sei, und $1-k$ verwandelt sich in eine Wahrscheinlichkeit q, wenn er bezeugt hat, dass der Angeklagte unschuldig sei. In dem einen und in dem andern Falle ist einleuchtend, dass die frühern Wahrscheinlichkeiten k und $1-k$ haben zunehmen müssen, wenn es wahrscheinlicher ist, dass sich der Geschworene nicht geirret hat, als dass er sich geirret hat, und diese Wahrscheinlichkeiten haben im entgegengesetzten Falle abnehmen müssen, d. h. sie haben zu- oder abgenommen, jenachdem $u>\frac{1}{2}$ oder $u<\frac{1}{2}$ ist. Dieses ergibt sich in der That aus den Ausdrücken von p und q, woraus folgt:

$$p=k+\frac{k(1-k)(2u-1)}{\gamma},$$

$$q=1-k-\frac{k(1-k)(2u-1)}{1-\gamma},$$

und folglich ist $p>$ oder $<k$ und $q<$ oder $>1-k$, jenachdem $u>$ oder $<\frac{1}{2}$ ist. In dem Falle, wo $u=\frac{1}{2}$ ist, haben sich die frühern Wahrscheinlichkeiten k und $1-k$ nicht geändert. Diese letzten Ausdrücke für p und q geben:

$$p\gamma+q(1-\gamma)=k\gamma+(1-k)(1-\gamma),$$

und da der erste Theil dieser Gleichung $=u$ ist, so hat man auch:

$$u=k\gamma+(1-k)(1-\gamma),$$

welche Gleichung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass sich der Geschworene nicht irret, dienen könnte, wenn man durch irgend ein Mittel die Wahrscheinlichkeit γ der Verurtheilung außer der Wahrscheinlichkeit k der Schuld a priori bestimmen könnte. Hiervon überzeugt man sich

auch, wenn man bemerkt, daß sich der Geschworene nicht irret, wenn der Angeklagte schuldig ist und verurtheilt wird, oder wenn er unschuldig ist und freigesprochen wird.

Wenn $k=\frac{1}{2}$ ist, so reduciren sich die ersten Werthe von p und q unmittelbar auf $p=u$ und $q=u$, und in der That kann, da a priori kein Grund vorhanden ist, eher die Schuld, als die Unschuld des Angeklagten anzunehmen, nach der Entscheidung des Geschworenen der Grund, das eine oder das andere zu glauben, nicht von der Wahrscheinlichkeit verschieden sein, daß sich der Geschworene nicht irret. Wenn $k=1$ ist, d. h. wenn die Schuld des Angeklagten als a priori gewiß angenommen wird, so hat man $p=1$ und $q=0$ und alsdann ist diese Schuld auch nach der Entscheidung des Geschworenen noch gewiß, von welcher Beschaffenheit die Entscheidung desselben und seine Wahrscheinlichkeit u, sich nicht zu irren, auch sein mag. Dasselbe findet hinsichtlich der Unschuld des Angeklagten statt, wenn $k=0$, d. h. wenn diese Unschuld a priori gewiß ist. Aber in den beiden Fällen ist es nicht gewiß, daß der Angeklagte verurtheilt oder freigesprochen wird; man hat im ersten Falle $\gamma=u$ und im zweiten $\gamma=1-u$ für die Wahrscheinlichkeit seiner Verurtheilung, welche folglich der Wahrscheinlichkeit gleich ist, daß sich der Geschworene nicht irret, wenn $k=1$ ist, und daß er sich irret, wenn $k=0$ ist.

§. **115.** Wir wollen nun annehmen, daß der Angeklagte nach der Entscheidung des ersten Geschworenen dem Urtheile eines zweiten unterworfen werde, dessen Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, durch u' bezeichnet werden soll. Es kommt alsdann darauf an, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, daß der Angeklagte durch beide Geschworene verurtheilt, von dem einen freigesprochen und von dem andern verurtheilt, oder von beiden freigesprochen werde, welche Wahrscheinlichkeiten wir resp. mit c, b, a bezeichnen wollen.

Es sei γ' die Wahrscheinlichkeit, daß der durch den ersten Geschworenen verurtheilte Angeklagte auch durch den zweiten verurtheilt werde. Bemerkt man, daß γ die Wahrscheinlichkeit der ersten Verurtheilung ist, so hat man:

$$c=\gamma\gamma'$$

als die Wahrscheinlichkeit zweier successiver Verurtheilungen; aber wenn der Angeklagte vor den zweiten Geschworenen gestellt wird, so entspringt schon aus der ersten Verurtheilung für die Schuld des Angeklagten die Wahrscheinlichkeit p; der Werth von γ ergibt sich folglich aus der Formel (1), wenn man darin p und u' für k und u setzt, welches

$$\gamma'=pu'+(1-p)(1-u')$$

gibt, woraus vermöge der Formeln (1) und (2) folgt:

$$c = k u u' + (1 - k)(1 - u)(1 - u').$$

Durch eine ähnliche Betrachtung findet man:

$$a = k(1 - u)(1 - u') + (1 - k) u u',$$

und wenn man diese beiden Formeln addirt, so erhält man:

$$a + c = u u' + (1 - u)(1 - u')$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Geschworenen dasselbe Urtheil fällen, sei es nun verdammend, oder freisprechend, und es ist zu bemerken, daß diese Totalwahrscheinlichkeit von der der Schuld des Angeklagten vor dem zweifachen Urtheile unabhängig ist.

Wenn der Angeklagte von dem ersten Geschworenen freigesprochen wird, und man bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß er von dem zweiten verurtheilt werden wird, mit $\gamma_{,}$, so drückt das Product $(1-\gamma)\gamma_{,}$ die Wahrscheinlichkeit aus, daß diese beiden entgegengesetzten Urtheile successive und in dieser Ordnung stattfinden werden. Ferner ist $1 - q$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Angeklagte schuldig ist, wenn er vor den zweiten Geschworenen gestellt wird, nachdem er von dem ersten freigesprochen ist. Der Werth von $\gamma_{,}$ ergibt sich folglich aus der Formel (1), wenn man darin $1 - q$ und u' für k und u setzt, wodurch man

$$\gamma_{,} = (1 - q) u' + q(1 - u'),$$

oder vermöge der durch die Formeln (1) und (3) gegebenen Werthe von $1 - \gamma$ und q:

$$(1-\gamma)\gamma_{,} = k(1 - u) u' + (1 - k)(1 - u') u$$

erhält. Offenbar erhält man durch die Vertauschung der Buchstaben u und u' in diesem Ausdrucke die Wahrscheinlichkeit, daß die Urtheile der beiden Geschworenen einander entgegengesetzt sein werden, aber in einer der vorhin angenommenen entgegengesetzten Ordnung. Addirt man diese Wahrscheinlichkeit zu der vorhergehenden, so erhält man:

$$b = (1 - u) u' + (1 - u') u$$

für die vollständige Wahrscheinlichkeit zweier entgegengesetzter Urtheile, welche in einer beliebigen Ordnung ausgesprochen werden. Sie ist, wie die zweier gleicher Urtheile, von k unabhängig. Wenn $u = \frac{1}{2}$ und $u' = \frac{1}{2}$ ist, so sind beide auch $= \frac{1}{2}$ und in allen Fällen ist ihre Summe $a + b + c = 1$, wie es der Fall sein muß.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte schuldig ist, nachdem er von zwei Geschworenen verurtheilt ist, wird durch die Formel (2) ausgedrückt, wenn man p und u' für k und u setzt, und die Wahrscheinlichkeit seiner Unschuld, nachdem er durch zwei Geschworene freigesprochen ist, ergibt sich aus der Formel (3) durch die Verwandlung von k und u in $1-q$ und u'. Bezeichnet man diese beiden Wahrscheinlichkeiten mit p' und q', so hat man folglich:

$$p' = \frac{pu'}{pu' + (1-p)(1-u')},$$

$$q' = \frac{qu'}{qu' + (1-q)(1-u')}$$

und nach den durch dieselben Formeln (2) und (3) gegebenen Werthen von p und q verwandeln sich diese Werthe von p' und q' in:

$$p' = \frac{kuu'}{kuu' + (1-k)(1-u)(1-u')},$$

$$q' = \frac{(1-k)uu'}{(1-k)uu' + k(1-u)(1-u')}.$$

Ferner sei $p_{,}$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte schuldig ist, nachdem er von dem ersten Geschworenen freigesprochen und von dem zweiten verurtheilt ist, und $q_{,}$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte unschuldig ist, wenn er von dem ersten Geschworenen verurtheilt und von dem zweiten freigesprochen ist. Der Werth von $p_{,}$ ergibt sich aus der Formel (2), wenn man darin u' für u setzt und für k die Wahrscheinlichkeit $1-q$, dass der Angeklagte nicht unschuldig ist, nachdem er von dem ersten Geschworenen freigesprochen ist. Ebenso erhält man die Wahrscheinlichkeit $q_{,}$, wenn man in der Formel (3) u und k in u' und p verwandelt. Man hat folglich:

$$p_{,} = \frac{(1-q)u'}{(1-q)u' + q(1-u')}, \quad q' = \frac{(1-p)u'}{(1-p)u' + p(1-u')},$$

oder vermöge derselben Formeln (2) und (3):

$$p_{,} = \frac{k(1-u)u'}{k(1-u)u' + (1-k)(1-u')u},$$

$$q_{,} = \frac{(1-k)(1-u)u'}{(1-k)(1-u)u' + k(1-u')u}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der von dem ersten Geschworenen verurtheilte und von dem zweiten freigesprochene Angeklagte schuldig ist,

ist $=1-q_{,}$. Außerdem ist einleuchtend, daſſ sie sich aus $p_{,}$ durch Vertauschung der Buchstaben u und u' ergeben muſſ, was in der That stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit der Unschuld des von dem ersten Geschworenen freigesprochenen und von dem zweiten verurtheilten Angeklagten, oder $1-p_{,}$ ergibt sich ebenso aus dem Ausdrucke von $q_{,}$, wenn man darin u und u' vertauscht.

In dem Falle, wo $u'=u$ ist, hat man $p_{,}=k$ und $q_{,}=1-k$, was wirklich der Fall sein muſſ; denn zwei entgegengesetzte Urtheile von zwei Geschworenen, für welche die Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, dieselbe ist, können den Grund zur Annahme der Schuld oder Unschuld des Angeklagten vor diesen Entscheidungen nicht verändern.

§. **116.** Diese Schlüsse ließen sich leicht auf die successiven Entscheidungen einer beliebigen Anzahl von Geschworenen, wovon für jeden die Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, gegeben ist, ausdehnen; allein man gelangt auf folgende Weise einfacher zum Resultate.

Um die Begriffe zu firiren, wollen wir drei Geschworene betrachten. Es seien u, u', u'' die Wahrscheinlichkeiten, daſſ sie sich nicht irren und k, wie vorhin, die Wahrscheinlichkeit vor ihrer Entscheidung, daſſ der Angeklagte schuldig ist.

Soll der Angeklagte bei der Einstimmigkeit der Geschworenen verurtheilt werden, so muſſ er entweder schuldig sein und keiner der drei Geschworenen sich irren, oder er muſſ unschuldig sein, und die Geschworenen irren sich alle drei. Die vollständige Wahrscheinlichkeit dieser Verurtheilung ist also:

$$kuu'u''+k(1-u)(1-u')(1-u'')$$

Ebenso hat man für die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Angeklagte bei der Einstimmigkeit der drei Geschworenen freigesprochen werden wird:

$$k(1-u)(1-u')(1-u'')+(1-k)uu'u''.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines einstimmigen Urtheiles der Geschworenen, sei es verdammend oder freisprechend, wird folglich durch die Summe dieser beiden Größen, d. h. durch:

$$uu'u''+(1-u)(1-u')(1-u'')$$

ausgedrückt, und sie ist daher unabhängig von k, was auch für jede beliebige Anzahl von Geschworenen stattfinden würde.

Der Angeklagte kann auf drei verschiedene Arten von zwei Geschworenen verurtheilt und von dem dritten freigesprochen werden, jenachdem dieser dritte derjenige ist, dessen Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, u, u' oder u'' ist. Ebenso kann der Angeklagte auf drei

verschiedene Arten von zwei Geschworenen freigesprochen und von dem dritten verurtheilt werden, welche ebenfalls dem Falle entsprechen, wo dieser dritte Geschworene der ist, dessen Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, durch u, u' oder u'' ausgedrückt wird. Man sieht leicht ein, daß die Wahrscheinlichkeiten dieser 6 Combinationen durch:

$$ku'u''(1-u)+(1-k)(1-u')(1-u'')u,$$
$$kuu''(1-u')+(1-k)(1-u)(1-u'')u',$$
$$kuu'(1-u'')+(1-k)(1-u)(1-u')u'',$$
$$k(1-u')(1-u'')u+(1-k)u'u''(1-u),$$
$$k(1-u)(1-u'')u'+(1-k)uu''(1-u'),$$
$$k(1-u)(1-u')u''+(1-k)uu'(1-u''),$$

ausgedrückt werden. Bildet man die Summe dieser 6 Größen, so erhält man den vollständigen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, daß das Urtheil nicht bei der Einstimmigkeit der Geschworenen gefällt wird, nämlich:

$$\begin{aligned} u'u''(1-u)+uu''(1-u')+uu'(1-u'') \\ +(1-u')(1-u'')u+(1-u)(1-u'')u' \\ +(1-u)(1-u')u'' \end{aligned}$$

und er ist, wie man sieht, von k unabhängig.

Die Summe der Totalwahrscheinlichkeiten einer einstimmigen und einer nicht einstimmigen Entscheidung der drei Geschworenen muß der Einheit gleich sein, und in der That leisten die vorhin für diese Wahrscheinlichkeiten gefundenen Ausdrücke dieser Bedingung Genüge.

Wenn das Urtheil gefällt ist, so ergibt sich leicht die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten nach demselben, welche im Allgemeinen von dieser Wahrscheinlichkeit vor der Urtheilsfällung verschieden ist. Wenn z. B. der Angeklagte von zwei Geschworenen, für welche die Wahrscheinlichkeiten, daß sie sich nicht irren, durch u und u' ausgedrückt werden, verurtheilt und von dem dritten freigesprochen wird; so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in der Voraussetzung seiner Schuld $= kuu'(1-u'')$ und in der entgegengesetzten Voraussetzung $=(1-k)(1-u)(1-u')u''$. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Angeklagte schuldig ist, wird folglich nach der Regel in §. 34 ausgedrückt durch:

$$\frac{kuu'(1-u'')}{kuu'(1-u'')+(1-k)(1-u)(1-u')u''}.$$

In dem Falle, wo $u'=u''$ ist, wird sie von dem gemeinschaftlichen Werthe von u' und u'' unabhängig, und dieselbe, als wenn die Ver-

urtheilung von dem einen Geschworenen ausgesprochen wäre, für welchen u die Wahrscheinlichkeit ist, sich nicht zu irren; und in der That können, wenn dieser letzte Geschworene sein Urtheil ausgesprochen hat, die verschiedenen Urtheile der beiden andern Geschworenen den Grund zu der Annahme, dass der Angeklagte schuldig oder unschuldig sei, für uns weder vermehren noch vermindern; denn es würde kein Grund vorhanden sein, weswegen diese verschiedenen Urtheile die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten eher vermehren, als vermindern sollten, weil die Wahrscheinlichkeiten, dass sich diese beiden letztern Geschworenen nicht irren, als gleich angenommen sind.

Diese Formeln würden auch auf den Fall anwendbar sein, wo die Geschworenen statt successive und ohne weitere Communication unter einander ihr Urtheil abzugeben, mit einander verbunden wären und erst nach stattgehabter Berathung ihr Urtheil fällten; aber da durch die gegenseitige Berathung der Geschworenen eine genauere Einsicht in das vorliegende Factum bewirkt und im Allgemeinen ihre Wahrscheinlichkeiten, sich nicht zu irren, vergrößert werden; so können die Werthe von u, u', u'', welche sich auf diese beiden Fälle beziehen, nicht dieselben sein, und müssen sich im zweiten Falle weniger von der Einheit entfernen, als im ersten.

§. 117. Wir wollen nun insbesondere den Fall betrachten, wo die Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, für alle Geschworenen dieselbe ist, worauf wir alsdann den allgemeinen Fall, wenn es sich um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Anzahl der Verurtheilungen bei einer sehr großen Anzahl von Urtheilen handelt, zurückführen werden.

Es sei also u diese gegebene Wahrscheinlichkeit, dass sich jeder der Geschworenen nicht irret, n die Anzahl der Geschworenen, k die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten vor der Fällung ihres Urtheiles, i eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ oder 0 und γ_i die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte von $n-i$ Geschworenen verurtheilt und von i Geschworenen freigesprochen wird.

Soll dieses zusammengesetzte Ereigniss stattfinden, so müssen, wenn der Angeklagte schuldig ist, $n-i$ Geschworene sich nicht irren und i Geschworene sich irren, oder wenn der Angeklagte unschuldig ist, so müssen sich $n-i$ Geschworene irren und i Geschworene nicht. Die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles ist das Product aus $k u^{n-i} (1-u)^i$ und der Zahl, welche ausdrückt, wie vielmal man die sich irrenden i Geschworenen aus der Zahl n aller Geschworenen nehmen kann; und ebenso ist die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Fall das Product aus $(1-k) u^i (1-u)^{n-i}$ und der Zahl, welche angibt, wie vielmal die $n-i$ sich irrenden Geschworenen aus der Gesammtzahl n

genommen werden können, welche Zahl dieselbe ist, als im ersten Falle und zwar der Anzahl der verschiedenen Combination von n Elementen zu je i oder zu je $n-i$ gleich. Bezeichnet man diese Zahl durch N_i, so hat man:

$$N_i = \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-i+1}{1.2.3 \ldots i}$$

und hieraus ergibt sich der vollständige Werth von γ_i:

$$\gamma_i = N_i [k u^{n-i} (1-u)^i + (1-k) u^i (1-u)^{n-i}]. \qquad (4)$$

Wenn man $n-i > i$ annimmt und:

$$n - 2i = m$$

setzt, so ist der Angeklagte bei der Stimmenmehrheit von m Stimmen verurtheilt. Wenn er von i Geschworenen verurtheilt und von den $n-i$ übrigen Geschworenen freigesprochen wird, so ist er bei einer Stimmenmehrheit von m Stimmen freigesprochen. Die Wahrscheinlichkeit dieser Freisprechung, welche wir mit δ_i bezeichnen wollen, ergibt sich aus dem Werthe von γ_i, wenn man darin die Zahlen $n-i$ und i vertauscht, wodurch der Coefficient N_i nicht geändert wird. Man hat folglich:

$$\delta_i = N_i [k u^i (1-u)^{n-i} + (1-k) u^{n-i} (1-u)^i]. \qquad (5)$$

Addirt man diese beiden letzten Gleichungen, so kommt:

$$\gamma_i + \delta_i = N_i [u^{n-i} (1-u)^i + u^i (1-u)^{n-i}],$$

eine von k unabhängige Größe, so daß die Wahrscheinlichkeit eines, bei einer gegebenen Stimmenmehrheit m gefällten Urtheiles, sei es verdammend oder freisprechend, nicht von der vor dieser Entscheidung präsumirten Schuld des Angeklagten abhängig ist. In dem besondern Falle, wo $u = \frac{1}{2}$ ist, sind die Wahrscheinlichkeiten γ_i und δ_i einzeln von k unabhängig und ihr gemeinschaftlicher Werth ist:

$$\gamma_i = \delta_i = \frac{1}{2} N_i.$$

Sie sind auch für jeden Werth von u einander gleich, wenn $k = \frac{1}{2}$ ist.

§. 118. Es sei c_i die Wahrscheinlichkeit, daß der Angeklagte wenigstens von $n-i$ Stimmen verurtheilt und höchstens von i Stimmen freigesprochen wird, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer Verurtheilung

bei einer Mehrheit von wenigstens m Stimmen. Ferner sei d_i die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte **wenigstens** von $n-i$ Stimmen freigesprochen und **höchstens** von i Stimmen verurtheilt wird.

Nach der Regel in §. 10 hat man:

$$c_i = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_i,$$
$$d_i = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_i,$$

und vermöge der vorhergehenden Formeln ergibt sich hieraus:

$$\left.\begin{aligned} c_i &= k\,U_i + (1-k)\,U_i, \\ d_i &= k\,Vi + (1-k)\,V_i, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wenn man der Kürze wegen:

$$N_0\,u^n + N_1\,u^{n-1}(1-u) + N_2\,u^{n-2}(1-u)^2 + \ldots$$
$$+ N_i u^{n-i}(1-u)^i = U_i,$$
$$N_0\,(1-u)^n + N_1\,(1-u)^{n-1}\,u + N_2\,(1-u)^{n-2}u^2 + \ldots$$
$$+ N_i\,u^i\,(1-u)^{n-i} = V_i$$

setzt, so dass U_i eine gegebene Function von u ist und V_i der Werth derselben, wenn man darin $1-u$ für u setzt. Zu gleicher Zeit hat man:

$$c_i + d_i = U_i + V_i$$

für die von k unabhängige Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte bei einer Mehrheit von **wenigstens** m Stimmen verurtheilt oder freigesprochen wird.

Wenn man in dem Ausdrucke von d_i die Zahl $n-i-1$ für i setzt, so ergibt sich daraus:

$$U_i + V_{n-i-1} = 1, \; c_i + d_{n-i-1} = 1,$$

und in der That wird der Angeklagte, wenn zur Verurtheilung wenigstens $n-i$ Stimmen erforderlich sind, freigesprochen, wenn höchstens $n-i-1$ Stimmen gegen ihn sind, so dass eins der beiden Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten c_i und d_{n-i-1} sind, nothwendig stattfinden muss.

Wenn n eine ungerade Zahl ist und man $n = 2i+1$ hat, also $m=1$, so ist:

$$U_i + V_i = [u + (1-u)]^n = 1, \; c_i + d_i = 1,$$

so daß der Angeklagte zuverlässig wenigstens bei einer Mehrheit von einer Stimme verurtheilt, oder freigesprochen wird, was für sich klar ist.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ist die möglichst kleinste Stimmenmehrheit $m=2$ und entspricht $n=2i+2$. Alsdann hat man:

$$U_i+V_i=[u+(1-u)]^n-N_{i+1}\,u^{i+1}(1-u)^{i+1},$$

woraus folgt:

$$c_i+d_i=1-\frac{2i+2.2i+1.2i\ldots i+2}{1.2.3\ldots i+1}[u(1-u)]^{i+1}.$$

Es ist also nicht gewiß, daß der Angeklagte bei einer Majorität von wenigstens zwei Stimmen verurtheilt oder freigesprochen wird, was an und für sich einleuchtend ist, weil es auch möglich ist, daß gleich viel Geschworene für seine Verurtheilung und für seine Freisprechung stimmen.

Die Wahrscheinlichkeit für diesen einen Fall wird erhalten, wenn man den vorhergehenden Werth von c_i+d_i von der Einheit abzieht; sie ist von k unabhängig, und wenn man sie mit H_i bezeichnet, so läßt sich der Ausdruck derselben auf folgende Form bringen:

$$H_i=\frac{1.2.3\ldots2i+2\,[u(1-u)]^{i+1}}{(1.2.3\ldots i+1)^2}.$$

Das Maximum des Productes $u(1-u)$ entspricht $u=\frac{1}{2}$ und ist $=\frac{1}{4}$. Diese Wahrscheinlichkeit H_i nimmt also desto mehr ab, je weiter sich u von $\frac{1}{2}$ entfernt. Sie nimmt auch fortwährend ab, je größer i wird. Denn aus ihrem Ausdrucke ergibt sich:

$$H_{i+1}=\frac{2i+3.2i+4.u(1-u)}{(i+1)^2}H_i,$$

und vermöge des Maximums $\frac{1}{4}$ von $u(1-u)$ ergibt sich hieraus, daß das Verhältniß von H_{i+1} zu H_i immer kleiner, als die Einheit ist. Der größte Werth von H_i entspricht $u=\frac{1}{2}$ und $i=0$ und ist $=\frac{1}{2}$.

Wenn $i+1$ eine große Zahl ist, so hat man nach §. 67:

$$1.2.3\ldots i+1=$$
$$(i+1)^{i+1}e^{-(i+1)}\sqrt{2\pi(i+1)}\left[1+\frac{1}{12(i+1)}+etc.\right],$$
$$1.2.3\ldots 2i+2=$$
$$(2i+2)^{2i+2}e^{-(2i+2)}\sqrt{2\pi(2i+2)}\left[1+\frac{1}{12(2i+2)}+etc.\right],$$

woraus folgt:

$$H_i = \frac{[4u(1-u)]^{i+1}}{\sqrt{\pi(i+1)}}\left[1 - \frac{1}{8(i+1)} + etc.\right]$$

als Näherungswerth von H_i, welcher, wie man sieht, ein sehr kleiner Bruch ist, wenn u merklich von $\frac{1}{2}$ oder $4u(1-u)$ von der Einheit verschieden ist. Für $u=\frac{1}{2}$, und wenn man z. B. $i+1=6$ oder $n=12$ nimmt, gibt diese auf ihre beiden ersten Glieder reducirte Formel den Näherungswerth von $H_i = \frac{230,94\ldots}{1024}$, welcher sehr wenig von dem genauen Werthe $\frac{231}{1024}$ verschieden ist, obgleich $i+1$ keine sehr beträchtliche Zahl ist.

Da die Summe $U_i + V_i$ höchstens der Einheit gleich ist, so ist, wenn man sie mit G_i bezeichnet, die Differenz $1-G_i$ positiv oder Null, und da sich der Ausdruck von c_i auf die Form:

$$c_i = k - k(1-G_i) - (2k-1)V_i$$

bringen läßt, so folgt, daß, wenn $2k-1>0$ oder $k>\frac{1}{2}$ ist, auch $c_i<k$ ist. In den gewöhnlichen Fällen, wo vor der Entscheidung der Geschworenen mehr Grund vorhanden ist, die Schuld, als die Unschuld des Angeklagten anzunehmen, ist folglich die Wahrscheinlichkeit seiner Verurtheilung bei einer Mehrheit von wenigstens einer oder von mehrern Stimmen, d. h. bei einer beliebigen Stimmenmehrheit, immer kleiner, als diese frühere Wahrscheinlichkeit seiner Schuld. Wird z. B. angenommen, daß man 4 gegen 1 wetten kann, daß der Angeklagte schuldig ist, so kann man, wenn er vor das Geschworenengericht gestellt wird, nur weniger als 4 gegen 1 wetten, daß er verurtheilt wird.

Dieser Satz ist, wie man sieht, von der Wahrscheinlichkeit des Irrthumes der Geschworenen oder von dem von der Einheit verschiedenen Werthe von u unabhängig. Für $u=1$ hat man $U_i=1$, $V_i=0$, $c_i=k$, $d_i=1-k$, für jeden Werth von i. Für $u=0$ hat man ebenso $U_i=0$, $V_i=1$, $c_i=1-k$ und $d_i=k$. Es ist einleuchtend, daß für diese beiden äußersten Werthe von u die Verurtheilung oder Freisprechung nur bei der Einstimmigkeit der Geschworenen stattfinden kann, was in der That auch aus den Formeln (4) und (5) folgt, welche alsdann $\gamma_i=0$ und $\delta_i=0$ geben, ausgenommen für $i=0$.

§. 119. Indem wir die frühern Beziehungen beibehalten, wollen

wir die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Angeklagte schuldig ist, wenn er durch $n-i$ gegen i Geschworene, d. h. bei der Mehrheit von m Stimmen verurtheilt ist, mit p_i bezeichnen und die Wahrscheinlichkeit seiner Unschuld, wenn er bei dieser Stimmenmehrheit freigesprochen ist, mit q_i, oder mit andern Worten, p_i sei die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des bei der Stimmenmehrheit von m Stimmen bei einer Anzahl n Geschworenen ausgesprochenen Urtheiles, wenn es verdammend ist, und q_i, wenn es ein freisprechendes ist. Im ersten Falle ist die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses oder der Verurtheilung $=N_i k u^{n-i} (1-u)^i$ oder $=N_i(1-k)(1-u)^{n-i} u^i$, jenachdem der Angeklagte schuldig ist, oder nicht, und nach der Regel in §. **34** hat man folglich:

$$p_i=\frac{k u^{n-i}(1-u)^i}{k u^{n-1}(1-u)^i+(1-k)(1-u)^{n-i} u^i}, \qquad (7)$$

wenn man den dem Zähler und Nenner dieses Bruches gemeinschaftlichen Factor N_i hinweglässt. Ebenso findet man für den Fall der Freisprechung:

$$q_i=\frac{(1-k)u^{n-i}(1-u)^i}{(1-k)u^{n-i}(1-u)^i+k(1-u)^{n-i} u^i}. \qquad (8)$$

Wenn man $k=\frac{1}{2}$ setzt, so hat man $p_i=q_i$ und in der That ist einleuchtend, daſſ die Richtigkeit des bei derselben Stimmenmehrheit gefällten Verdammungs- oder Freisprechungsurtheiles dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, wenn a priori kein Grund vorhanden ist, welcher eher die Schuld, als die Unschuld des Angeklagten annehmen lässt. Für $u=\frac{1}{2}$ hat man $u^{n-i}(1-u)^i=(1-u)^{n-i}u^i$, und folglich für jeden Werth von n und i, wie es auch der Fall sein muſſ, $p_i=k$ und $q_i=1-k$.

Setzt man in den Formeln (7) und (8):

$$u=\frac{t}{1+t},\ 1-u=\frac{1}{1+t},$$

und bemerkt, daſſ $n=m+2i$ ist, so hat man:

$$p_i=\frac{kt^m}{kt^m+1-k},\quad q_i=\frac{(1-k)t^m}{(1-k)t^m+k},$$

woraus erhellet, daſſ die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit eines Urtheiles unter übrigens gleichen Umständen nur von der Stimmenmehr-

heit m, bei welcher es gefällt ist, und nicht von der Gesammtzahl n der Geschworenen abhängt; und in der That würden gleiche Anzahlen entgegengesetzter Stimmen, vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit des Irrthumes für alle Geschworenen gleich ist, den Grund zur Annahme der Richtigkeit oder Unrichtigkeit des Urtheiles weder vermehren, noch vermindern können. Aber dieses Resultat setzt nothwendig die Wahrscheinlichkeit u, daß sich die Geschworenen nicht irren, als vor der Entscheidung gegeben voraus, und es würde, wie man weiter unten sehen wird, nicht mehr dasselbe sein, wenn diese Wahrscheinlichkeit nach dem gefällten Urtheile aus der Anzahl der für und gegen den Angeklagten sprechenden Stimmen abgeleitet werden müßte.

Für einen gegebenen Werth von u verdient z. B. ein bei der Mehrheit von einer einzigen Stimme gefälltes Urtheil, wie groß die ungerade Anzahl der Geschworenen auch sein mag, nicht mehr und nicht weniger Zutrauen, als wenn es von einem einzigen Geschworenen gefällt wäre; aber die Wahrscheinlichkeit, daß ein solches Verdammungs- oder Freisprechungsurtheil stattfinden wird, nimmt desto mehr ab, je größer die Gesammtzahl der Geschworenen wird. Denn diese Wahrscheinlichkeit wird durch die Summe der Formeln (4) und (5), worin man $n = 2i + 1$ setzt, ausgedrückt, und wenn man sie mit ϖ_i bezeichnet, so erhält man mit Berücksichtigung des Werthes von N_i:

$$\varpi_i = \frac{1.2.3\ldots 2i+1\,[u(1-u)]^i}{(1.2.3\ldots i)^2\,(i+1)};$$

folglich:

$$\varpi_{i+1} = \frac{2i+3}{2i+4} . 4u(1-u)\,\varpi_i,$$

und da $4u(1-u)$ die Einheit nicht übersteigen kann, so folgt, daß immer $\varpi_{i+1} < \varpi_i$ ist. Vergleicht man diesen Werth von ϖ_i mit dem von Π_i, so sieht man, daß der erste den zweiten in dem Verhältnisse von 1 zu $2u(1-u)$, welches für jeden Werth von i dasselbe bleibt, übertrifft.

§. 120. Wenn man blos weiß, daß der Angeklagte **wenigstens** bei einer Mehrheit von m Stimmen verurtheilt ist, so daß die Stimmenmehrheit resp. m, $m+2$, $m+4$, ... bis $m+2i$ oder die Einstimmigkeit sein kann, so sieht man leicht ein, daß die Wahrscheinlichkeit seiner Schuld größer ist, als p_i, und wir wollen sie mit P_i bezeichnen.

In der Voraussetzung, daß der Angeklagte schuldig ist, ist die

Wahrscheinlichkeit seiner bereits stattgehabten Verurtheilung oder des beobachteten Ereignisses nach dem Vorhergehenden $= k U_i$ und in der Voraussetzung seiner Unschuld ist sie $= (1 - k) V_i$. Es ist folglich:

$$P_i = \frac{k U_i}{k U_i + (1 - k) V_i}. \qquad (9)$$

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit der Unschuld des Angeklagten, wenn derselbe bei dieser Stimmenmehrheit von wenigstens m Stimmen freigesprochen ist, mit Q_i, so findet man ebenso:

$$Q_i = \frac{(1 - k) U_i}{(1 - k) U_i + k V_i}. \qquad (10)$$

Die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit eines bei einer Mehrheit von wenigstens m Stimmen gefällten Verdammungs- oder Freisprechungsurtheiles wird ebenfalls durch P_i oder Q_i ausgedrückt. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten sind nicht, wie die Wahrscheinlichkeiten p_i und q_i, von der Gesammtzahl n der Geschworenen unabhängig, und sie hängen blos von m oder $n - 2i$ ab. Um sie numerisch mit einander zu vergleichen, wollen wir $k = \frac{1}{2}$ nehmen, wodurch die Größen P_i und Q_i, sowie p_i und q_i einander gleich werden, und wir wollen voraussetzen, dass vor der Entscheidung die Unschuld des Angeklagten dieselbe Wahrscheinlichkeit habe, als seine Schuld. Ferner wollen wir $u = \frac{3}{4}$ setzen, so dass man 3 gegen 1 wetten kann, dass sich jeder Geschworene nicht irret. Nimmt man für n die gewöhnliche Anzahl der Geschworenen, indem man $n = 12$ und $i = 5$ setzt; so findet man zunächst:

$$p_i = \frac{9}{10}, \; 1 - p_i = \frac{1}{10},$$

ferner:

$$U_i = 7254 \,.\, \frac{3^7}{4^{12}}, \; V_i = 239122 \,.\, \frac{1}{4^{12}},$$

und hieraus ergibt sich sehr nahe:

$$P_i = \frac{403}{409}, \; 1 - P_i = \frac{6}{409}.$$

Hieraus erhellet, dass in diesem Beispiele die Wahrscheinlichkeit $1 - P_i$ der Unrichtigkeit eines bei der Mehrheit von wenigstens 2 Stimmen ausgesprochenen Verdammungsurtheiles kaum $\frac{1}{7}$ der Wahrscheinlichkeit

$1-p_i$ der Unrichtigkeit des bei dieser Stimmenmehrheit von 2 Stimmen oder von 7 Stimmen gegen 5 ausgesprochenen Verdammungsurtheiles beträgt.

Die Formeln (4), (5), (6), (7), (8), (9) und (10) lassen sich auch leicht auf den Fall anwenden, wo der vor das betrachtetete Geschworenengericht gestellte Angeklagte bereits von einem andern Geschworenengerichte verurtheilt, oder freigesprochen ist. Zu dem Zwecke nimmt man für die in diesen Formeln vorkommende Größe k die aus dem ersten Urtheile entspringende und nach einer der erwähnten Formeln bestimmte Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten.

§. 121. Wenn $n-i$ und i sehr große Zahlen sind, so muss man sich zur Berechnung der Werthe von U_i und V_i der Näherungsmethoden bedienen. Zu dem Zwecke wollen wir bemerken, dass die Größe U_i, wenn man $1-u=v$ setzt, die Summe der $i+1$ ersten Glieder der nach den steigenden Potenzen von v geordneten Entwickelung von $(u+v)^n$ ist. Sie muss folglich mit der Formel (8) in §. 73 übereinstimmen, wenn man in dieser u, v, i, n statt p, q, n, μ setzt. Man hat folglich nach den Formeln (15) in §. 77:

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\theta^\infty e^{-x^2}dx + \frac{(n+i)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi n i(n-i)}}e^{-\theta^2}, \\ U_i &= 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\theta^\infty e^{-x^2}dx + \frac{(n+i)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi n i(n-i)}}e^{-\theta^2}, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

wo θ eine positive Größe ist, deren Quadrat:

$$\theta^2 = i\log\frac{i}{v(n+1)} + (n+1-i)\log\frac{n+1-i}{u(n+1)}$$

ist, und wo der erste oder zweite dieser beiden Ausdrücke für U_i genommen werden muss, jenachdem $\frac{v}{u}$ größer oder kleiner ist, als das Verhältniss $\frac{i}{n+1-i}$.

Wenn der Angeklagte verurtheilt ist und alle Stimmenmehrheiten von der kleinsten bis zu der Einstimmigkeit stattfinden können, so ist die Zahl $n+1$ und das Verhältniss $\frac{i}{n+1-i}$ resp. fast $=2i$ und $=1$. Man muss also die erste oder die zweite der Formeln (11) anwenden, jenachdem $v>u$, oder $v<u$ ist, und wenn u und v beträchtlich von $\frac{1}{2}$ verschieden sind, oder $4uv$ von der Einheit; so hat man auch sehr nahe:

$$\theta^2 = i \log \frac{1}{4uv}.$$

Da alsdann i eine sehr große Zahl ist, so wird der Werth von θ hinreichend beträchtlich, um die in den Formeln (11) vorkommenden Integrale und Exponentialgrößen unmerklich zu machen. Die Größe U_i reducirt sich also auf die Einheit, oder auf Null, jenachdem u größer oder kleiner als v ist, und da in dem Falle, welchen wir untersuchen, die Summe von U_i und V_i genau oder sehr nahe der Einheit gleich ist, jenachdem i ungerade oder gerade ist; so folgt, daſſ $V_i = 0$ ist, wenn man $u > v$ hat und $V_i = 1$ für $u < v$. Hieraus folgt, daſſ, wenn die Wahrscheinlichkeit k der Schuld des Angeklagten vor der Entscheidung kein sehr kleiner Bruch ist, die Wahrscheinlichkeit P_i seiner Schuld, nachdem er durch ein aus einer sehr großen Anzahl n Geschworenen bestehendes Geschworenengericht verurtheilt ist, sich sehr der Gewiſſheit nähert, wenn die Wahrscheinlichkeit v des Irrthumes jedes Geschworenen merklich kleiner ist, als die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit u, welches daher kommt, daſſ es bei dieser großen Anzahl n von Geschworenen sehr unwahrscheinlich ist, daſſ das Urtheil bei einer kleinen Stimmenmehrheit ausgesprochen ist. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit P_i der Richtigkeit eines Urtheiles ein sehr kleiner Bruch und die Unschuld des Angeklagten sehr wahrscheinlich, wenn u beträchtlich kleiner ist, als v, und wenn außerdem k kein der Einheit sich sehr nähernder Bruch ist. Die Wahrscheinlichkeiten c_i der Verurtheilung und d_i der Freisprechung, welche die Formeln (6) geben, sind sehr wenig von k und $1-k$ verschieden, wenn $u > v$ ist, oder im Gegentheil von $1-k$ und k, wenn $u < v$ ist.

In dem Falle, wo $u = v = \frac{1}{2}$ ist, und $n = 2i+1$ oder $n = 2i+2$ gesetzt wird, jenachdem n gerade oder ungerade ist, ist das Verhältniſſ $\frac{i}{n+1-i}$ etwas kleiner, als $\frac{v}{u}$, oder als die Einheit; man muſſ also die erste der Formeln (11) anwenden, und da der Werth von θ ein sehr kleiner Bruch ist, so hat man sehr nahe:

$$U_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi i}} - \frac{\theta}{\sqrt{\pi}},$$

wenn man das Quadrat von θ, sowie die Glieder, worin i als Divisor vorkommen würde, unberücksichtigt läſſt und erwägt, daſſ alsdann

$$\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \theta$$

ist.

Wenn n ungerade ist, $n=2i+1$ und $u=v=\frac{1}{2}$ gesetzt wird, so erhält man:

$$\theta^2 = -i \log\left(1+\frac{1}{i}\right) - (i+2)\log\left(1-\frac{1}{i+2}\right).$$

Entwickelt man die Logarithmen in Reihen, so ergibt sich hieraus mit dem Grade von Annäherung, wobei wir stehen bleiben:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{i}},\ U_i = \tfrac{1}{2}.$$

Da die Summe von V_i und U_i der Einheit gleich sein muss, so ist auch $V_i=\frac{1}{2}$, und man hat $P_i=k$, wie es der Fall sein muss, wie groß übrigens die Anzahl der Geschworenen auch sein mag, wenn die Wahrscheinlichkeit ihres Irrens und Nichtirrens für alle gleich ist. Wenn n eine gerade Zahl ist, und man $n=2i+2$, $u=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{2}$ setzt, so hat man

$$\theta^2 = -i \log\left(1+\frac{3}{2i}\right) - (i+3)\log\left(1-\frac{3}{2i+6}\right),$$

woraus folgt:

$$\theta = \frac{3}{2\sqrt{i}},\ U_i = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi i}}.$$

Aber nach dem Werthe von H_i in §. 118 hat man in diesem Falle:

$$U_i + V_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi i}},$$

folglich:

$$V_i = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi i}},$$

und da diese Werthe von U_i und V_i einander gleich sind, so ergibt sich wie im vorhergehenden Falle $P_i=k$. Die betrachtete Wahrscheinlichkeit c_i der Verurtheilung ist von k unabhängig und $=U_i$ oder etwas kleiner, als $\frac{1}{2}$.

§. 122. Wir wollen wieder annehmen, dass das Geschworenengericht aus einer beliebigen Anzahl n von Geschworenen besteht; aber dass jetzt die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens jedes Geschworenen v verschiedene und ungleich wahrscheinliche Werthe bekommen kann. Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$ die Werthe dieser Wahrscheinlichkeiten für

einen ersten Geschworenen, $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots x'_\nu$ diese Werthe für einen zweiten, $x''_1, x''_2, x''_3, \ldots x''_\nu$ dieselben Werthe für einen dritten Geschworenen, u. s. f. Ferner wollen wir allgemein mit $X_i, X'_{i_\prime}, X''_{i_{\prime\prime}}, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, daß die Wahrscheinlichkeiten $x_i, x'_{i_\prime}, x''_{i_{\prime\prime}}, \ldots$ stattfinden, und welche zugleich die Wahrscheinlichkeiten der correspondirenden Wahrscheinlichkeiten $1 - x_i$, $1 - x'_{i_\prime}, 1 - x''_{i_{\prime\prime}}, \ldots$ sind. Da eine der Wahrscheinlichkeiten x_1, $x_2, x_3, \ldots x_\nu$ zuverlässig stattfindet, dasselbe für eine der Wahrscheinlichkeiten $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots x'_\nu$, sowie für eine der Wahrscheinlichkeiten $x''_1, x''_2, x''_3, \ldots x''_\nu$, u. s. f., gilt; so muß man haben:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_\nu = 1$$
$$X'_1 + X'_2 + X'_3 + \ldots + X'_\nu = 1$$
$$X''_1 + X''_2 + X''_3 + \ldots X''_\nu = 1,$$
$$etc. \ldots etc.$$

Wenn man folglich:

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 + \ldots + X_\nu x_\nu = u,$$
$$X'_1 x'_1 + X'_2 x'_2 + X'_3 x'_3 + \ldots X'_\nu x'_\nu = u'$$
$$X''_1 x''_1 + X''_2 x''_2 + X''_3 x''_3 + \ldots + X''_\nu x''_\nu = u'''$$
$$etc. \ldots etc.$$

setzt, so hat man zu gleicher Zeit:

$$X_1 (1 - x_1) + X_2 (1 - x_2) + \ldots\ldots$$
$$+ X_\nu (1 - x_\nu) = 1 - u,$$
$$X'_1 (1 - x'_1) + X'_2 (1 - x'_2) + \ldots$$
$$+ X'_\nu (1 - x'_\nu) = 1 - u',$$
$$X''_1 (1 - x''_1) + X''_2 (1 - x''_2) + \ldots$$
$$+ X''_\nu (1 - x''_\nu) = 1 - u'',$$
$$etc. \ldots etc.$$

und $u, u', u'' \ldots$ sind die mittleren Wahrscheinlichkeiten, daß sich der 1ste, 2te, 3te, ... Geschworene nicht irret, und folglich $1 - u$, $1 - u'$, $1 - u''$, ... die mittleren Werthe der Wahrscheinlichkeiten, daß sich der 1ste, 2te, 3te, ... Geschworene irret.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich **keiner** der n Geschworenen, für welche die Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens resp. $x_i, x'_{i_\prime}, x''_{i_{\prime\prime}}, \ldots$ sind, irret, das Product aus diesen letzten Wahr=

scheinlichkeiten und ihren resp. Wahrscheinlichkeiten X_i, $X'_{i'}$, $X''_{i''}$, ..., und bezeichnet man sie mit Π; so hat man folglich:

$$\Pi = X_i\, X'_{i'}\, X''_{i''} \dots\dots x_i\, x'_{i'}\, x''_{i''} \dots\dots$$

Es sei P die Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Geschworener irret, von welcher Beschaffenheit die seiner möglichen Wahrscheinlichkeiten, sich nicht zu irren, welche wirklich stattfindet, auch sein mag; so ist nach der Regel in §. 10 P die Summe der $n\nu$ Werthe von Π, welche man erhält, wenn man darin successive jede der Zahlen 1, 2, 3, ... ν für jede der n Zahlen i, i', i'', ... setzt. Nun ist aber leicht einzusehen, dass diese Summe das Product der n Mittelgrößen u, u', u'', ... ist, so dass man für beliebige Werthe der Zahlen n und ν

$$P = u\,u'\,u'' \dots$$

hat.

Für die beliebigen Wahrscheinlichkeiten x_i, $x'_{i'}$, $x''_{i''}$, ... des Nichtirrens ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein einziger Geschworener irret, aus dem Werthe von Π, wenn man für den ersten Geschworenen $1 - x_i$ statt x, für den zweiten $1 - x'_{i'}$ statt $x'_{i'}$, *etc.* setzt. Bezeichnet man die diesen Wahrscheinlichkeiten x_i, $x'_{i'}$, $x''_{i''}$, ... entsprechende Totalwahrscheinlichkeit, dass sich ein einziger Geschworener irret, mit Π', so hat man folglich:

$$\Pi' = X_i X'_{i'} X''_{i''} \, etc. \, [(1 - x_i)\, x'_{i'}\, x''_{i''} \, etc.$$
$$+ x_i (1 - x'_{i'})\, x''_{i''} \, etc. + x_i x'_{i'} (1 - x''_{i''}) \, etc. + etc.].$$

Bezeichnet man ferner mit P' die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein einziger Geschworener irret, indem man für jeden Geschworenen alle möglichen Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens in Betracht zieht, so ist P' die Summe der $n\nu$ Werthe von Π', welche man erhält, wenn man darin successive für jeden der n Indices i, i', i'', ... alle die Zahlen 1, 2, 3, ... ν setzt, und es ist leicht einzusehen, dass diese Summe nur von den mittleren Werthen u, u', u'', ... abhängt und durch:

$$P' = (1 - u)\, u'\, u'' \, etc. + u\,(1 - u')\, u'' \, etc.$$
$$+ u\,u'\,(1 - u'') \, etc. + etc.$$

ausgedrückt wird.

Schließt man auf diese Weise weiter fort, so gelangt man zu folgendem allgemeinen Satze: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich von n Geschworenen $n - i$ nicht irren, und dass sich i davon irren, ist dieselbe,

als wenn die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für jeden Geschworenen nur einen einzigen Werth hätte, nämlich den Werth u für den ersten, den Werth u' für den zweiten, den Werth u'' für den dritten, *etc.* Wenn also diese mittleren Wahrscheinlichkeiten $u, u', u'', \ldots$ ungleich sind, so werden die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten einer Verurtheilung bei gegebenen Stimmenmehrheiten und die der Schuld des Angeklagten durch die auf eine beliebige Anzahl n von Geschworenen ausgedehnten Regeln in §. 116 bestimmt. Wenn sie alle einander gleich sind, so werden die in Rede stehenden Wahrscheinlichkeiten durch die Formeln (4), (5), (6), (7), (8), (9) und (10) ausgedrückt, indem man darin für u die allen Geschworenen gemeinschaftliche mittlere Wahrscheinlichkeit setzt.

Man kann sich die Möglichkeit, dass für jeden Geschworenen mehrere ungleich wahrscheinliche Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens stattfinden können, deutlich vorstellen, wenn man annimmt, dass die Liste, woraus jeder Geschworene genommen werden muss, in ν Klassen von Personen abgetheilt ist, so dass alle Personen von derselben Klasse dieselbe Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, haben. Für die Liste, woraus der erste Geschworene genommen werden muss, sei x_i die einer der Klassen entsprechende Wahrscheinlichkeit und X_i das Verhältniss der Anzahl der Personen dieser Klasse zu der Anzahl der auf der ganzen Liste befindlichen Personen; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich dieser Geschworene nicht irret, $= x_i$, wenn er dieser Klasse angehört und X_i ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses der Fall ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit x_i. Wenn der zweite Geschworene aus einer andern Liste genommen werden muss, und $x'_{i'}$ ist die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für die Personen einer der Klassen dieser Liste, und $X'_{i'}$ das Verhältniss ihrer Anzahl zu der Anzahl der auf der ganzen Liste befindlichen Personen; so ist x'_i die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Geschworene sich nicht irret, wenn er dieser Klasse angehört, und $X'_{i'}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dieser Klasse angehört, oder die Wahrscheinlichkeit dieser Wahrscheinlichkeit $x'_{i'}$, u. s. f. Wenn die Geschworenen einer Session des Assisenhofes ganz zufällig aus derselben Liste genommen werden, worauf sich alle Personen befinden, welche innerhalb des Bezirkes dieses Assisenhofes Geschworene werden können, so folgt, dass vor der Ziehung der Loose die mittlern Wahrscheinlichkeiten $u, u', u'', \ldots$ einander gleich sind. Der mittlere gemeinschaftliche Werth kann übrigens in den Bezirken verschiedener Assisenhöfe nicht derselbe sein; aber wenn Entscheidungen zu machen wären, wobei das Geschworenengericht aus einem in einem bestimmten Theile des Landes genom-

menen Geschworenen, aus einem zweiten, aus einem andern Theile des Landes genommenen Geschworenen, u. s. f. bestehen müsste, so könnten die mittleren Wahrscheinlichkeiten u, u', u'', ... verschieden sein. Aber in allen diesen Fällen darf man die mittleren Wahrscheinlichkeiten, welche vor der Ziehung der Geschworenen stattfinden, nicht mit den Wahrscheinlichkeiten verwechseln, dass die durch das Loos zu Geschworenen bestimmten Personen sich nicht irren, wenn die Ziehung geschehen ist, und wir werden sogleich auf diese wesentliche Unterscheidung wieder zurückkommen.

§. 123. Wenn die Zahl ν der möglichen Wahrscheinlichkeiten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ unendlich groß ist, so ist die Wahrscheinlichkeit jeder derselben unendlich klein. Es ist alsdann Xdx die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens eines beliebigen zufällig auf einer gegebenen Liste genommenen Geschworenen $= x$ ist. Ferner sei u das Mittel aus allen möglichen Wahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung ihrer resp. Wahrscheinlichkeiten, so verwandelt sich die Summe, welche der Einheit gleich sein muss und die, welche nach dem Vorhergehenden den Werth von u bilden muss, in ein von $x=0$ bis $x=1$ genommenes bestimmtes Integral, so dass man hat:

$$\int_0^1 X dx = 1, \int_0^1 x X dx = u.$$

Die positive Größe X kann eine ganz willkürliche continuirliche oder discontinuirliche Function von x sein, wofern sie nur der ersten dieser Gleichungen Genüge leistet. Für jeden gegebenen Ausdruck von X gibt es einen ganz bestimmten Zahlenwerth von u; aber jedem gegebenen Werthe von u entsprechen unendlich viele verschiedene Ausdrücke von X, oder unendlich viele verschiedene Wahrscheinlichkeitsgesetze.

Wenn alle Werthe von x von $x=0$ bis $x=1$ gleich möglich sind, so ist die Größe X von x unabhängig und muss der Einheit gleich sein, um der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen zu genügen, und vermöge der zweiten hat man alsdann $u=\frac{1}{2}$. Wenn die Größe X von $x=0$ bis $x=1$ so zunimmt, dass die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für einen Geschworenen selbst desto wahrscheinlicher ist, je mehr sie sich der Gewissheit nähert, wenn ferner X gleichförmig zunimmt, und man setzt:

$$X = \alpha x + \beta,$$

wo α und β zwei positive Constanten sind; so hat man alsdann:

$$\int_0^1 X dx = \tfrac{1}{2}\alpha + \beta = 1,$$

folglich:

$$\mathfrak{C}=1-\tfrac{1}{2}\alpha,\ X=1-\tfrac{1}{2}\alpha+\alpha x,$$

was erfordert, daſſ $\alpha>2$ iſt. Hieraus folgt:

$$u=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{12}\alpha,$$

ſo daſſ die mittlere Wahrſcheinlichkeit weder größer, als $\frac{2}{3}$, noch kleiner, als $\frac{1}{2}$ ſein kann, welche Werthe $\alpha=2$ und $\alpha=0$ entſprechen.

Wir wollen ferner annehmen, daſſ X ſich nach einer geometriſchen Progreſſion ändert, wenn x um gleiche Incremente wächſt, und:

$$X=\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}e^{\alpha x}$$

ſetzen, welcher Werth der Bedingung $\int_0^1 X dx=1$ für jeden Werth der Conſtante α Genüge leiſtet, und worin e, wie gewöhnlich, die Baſis des neperſchen Logarithmenſyſtemes bezeichnet. Wir haben:

$$u=\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha},$$

woraus folgt, daſſ die mittlere Wahrſcheinichkeit u, wenn man α von $\alpha=-\infty$ bis $\alpha=\infty$ wachſen läſſt, in dieſem Falle alle möglichen Werthe von $u=0$ bis $u=1$ annehmen kann, und für $\alpha=-\infty$, $\alpha=0$, $\alpha=\infty$ hat man $u=0$, $u=\frac{1}{2}$, $u=1$.

Wenn die verſchiedenen Wahrſcheinlichkeiten des Nichtirrens zwiſchen engern Grenzen als Null und die Einheit liegen müſſen, z. B. wenn x nicht unter $\frac{1}{2}$ herabſinken darf und außerdem über $\frac{1}{2}$ alle Werthe deſſelben gleich möglich ſein ſollen, ſo nimmt man für X eine discontinuirliche Function, welche man auf dieſe Weiſe beſtimmt. Wir wollen mit ε eine poſitive und endliche, aber ſehr kleine Größe bezeichnen und fx ſei eine Function, welche von $x=\frac{1}{2}-\varepsilon$ bis $x=\frac{1}{2}$ ſich ſehr ſchnell ändert, für alle zwiſchen $x=0$ und $x=\frac{1}{2}-\varepsilon$ liegenden Werthe von x verſchwindet, und welche von $x=\frac{1}{2}$ bis $x=1$ einen gegebenen conſtanten Werth g hat. Alsdann wollen wir:

$$X=fx$$

ſetzen, ſo iſt nach der Natur dieſer Function fx:

$$\int_0^1 X dx=\tfrac{1}{2}g+\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} fx\, dx,$$

und wegen $\int_0^1 X dx=1$ hat man folglich:

$$\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} fx\,dx = 1 - \tfrac{1}{2}g,$$

wozu erforderlich ist, dass g nicht größer als **2** wird, weil fx nur positive Werthe haben kann. In dem Integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} x fx\,dx$$

kann man das außerhalb fx stehende x als eine constante Größe $= \frac{1}{2}$ betrachten; es ist also auch:

$$\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} x fx\,dx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}g,$$

und wenn man bemerkt, dass:

$$\int_0^1 x fx\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} x fx\,dx + \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} x fx\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x fx\,dx$$

ist; so folgt:

$$\int_0^1 x fx\,dx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}g + \tfrac{1}{2}g - \tfrac{1}{8},$$

oder wenn man reducirt:

$$u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}g.$$

In diesem Falle kann also die mittlere Wahrscheinlichkeit den Werth $u = \frac{3}{4}$, welcher $g = 2$ entspricht, nicht überschreiten, noch kleiner werden, als $u = \frac{1}{2}$, welcher Werth $g = 0$ entspricht.

Auf diese Weise könnte man in Beziehung auf die Form der Function X unendlich viele verschiedene Voraussetzungen machen. Wenn eine derselben gewiss wäre, so wäre es der correspondirende Werth der mittleren Wahrscheinlichkeit u auch. Wenn sie dagegen alle möglich sind, so sind ihre resp. Wahrscheinlichkeiten unendlich klein, und dasselbe gilt hinsichtlich der verschiedenen Werthe der mittleren Wahrscheinlichkeit, welche sich aus diesen Hypothesen ergeben. Der letzte Fall findet statt, wenn die verschiedenen Werthe, welche die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens eines Geschworenen annehmen kann, uns unbekannt sind und wir auch das Gesetz ihrer Wahrscheinlichkeiten nicht kennen, so dass wir in Beziehung auf dieses Gesetz alle möglichen Voraussetzungen machen können, wodurch die mittlere Wahrscheinlichkeit ungleich wahrscheinliche Werthe bekommt. Bezeichnet man alsdann die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Wahrscheinlichkeit genau $= u$ ist, mit $\varphi u\,du$, so

ist φu eine continuirliche oder discontinuirliche Function von solcher Beschaffenheit, dass $\int_0^1 \varphi u du = 1$ ist, und die eben in Beziehung auf X gemachten Bemerkungen lassen sich auch auf sie anwenden.

§. 124. Die vorhergehenden Formeln würden die vollständigen Auflösungen aller Aufgaben geben, welche der Gegenstand dieses Kapitels darbieten kann, wenn man die Wahrscheinlichkeit k der Schuld des Angeklagten vor der Entscheidung der Geschworenen und in jeder Angelegenheit für jeden Geschworenen die Wahrscheinlichkeit kännte, dass sich derselbe nicht irret, oder vielmehr, wenn, wofern diese Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens mehrere mögliche Werthe hat, alle diese Werthe, sowie ihre resp. Wahrscheinlichkeiten gegeben wären, oder endlich, wenn, wofern dieser Werthe sehr viel sind, und jeder eine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit hat, die Function bekannt wäre, welche das Gesetz ihrer Wahrscheinlichkeiten ausdrückt. Aber keins dieser durchaus erforderlichen Elemente ist uns a priori gegeben. Die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten, bevor er vor das Geschworenengericht gestellt wird, ist wegen der Voruntersuchung und der darauf erfolgten Anklage desselben ohne Zweifel größer, als die Wahrscheinlichkeit seiner Unschuld. Es ist also auch anzunehmen, dass k größer ist, als $\frac{1}{2}$; aber um wie viel? Dieses können wir zum Voraus nicht wissen, weil es von der Geschicklichkeit und der Strenge der mit der Voruntersuchung beauftragten Personen abhängt und bei verschiedenen Arten der Verbrechen verschieden sein kann. Auch können wir vor dem Ziehen der Loose nicht wissen, welche von den auf der Liste stehenden Bürgern Geschworene werden können, so wenig als nach der Ziehung die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Geschworener nicht irret. Denn sie ist bei jedem Geschworenen von seinen Einsichten, von seiner Meinung hinsichtlich des Unterdrückens dieses oder jenes Verbrechens, von seinem durch das Alter oder das Geschlecht des Angeklagten erregten Mitleide, u. s. f., abhängig, und alle diese Umstände, welche uns unbekannt sind, und welche außerdem nicht in Zahlen ausgedrückt werden können, haben auf die Urtheile der Geschworenen Einfluss. Um also von den vorhergehenden Formeln Gebrauch machen zu können, müssen die darin vorkommenden unbekannten Elemente eliminirt werden, und dies ist der Gegenstand, womit wir uns nun beschäftigen wollen.

§. 125. Wir wollen den Fall betrachten, wo die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für alle Geschworene gleich ist. Es wird vorausgesetzt, dass sie vor der Entscheidung unbekannt ist und alle möglichen Werthe von 0 bis 1 annehmen kann, und die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit eines Werthes u dieser Wahrscheinlichkeit soll mit $\varphi u du$

bezeichnet werden. Wenn dieser Werth gewiss wäre, d. h. wenn die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für jeden Geschworenen zuverlässig $= u$ wäre; so würde die Wahrscheinlichkeit, dass der schuldige oder unschuldige Angeklagte von $n - i$ Stimmen verurtheilt und von den übrigen i Stimmen freigesprochen wird, durch die Formel (4) ausgedrückt, wo n die Gesammtzahl der Geschworenen und k die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten vor der Urtheilsfällung ist. Die Wahrscheinlichkeit dieser Stimmenvertheilung wird folglich wirklich durch das Product aus dieser Formel und $\varphi u\,du$ ausgedrückt, und wenn diese Vertheilung der Stimmen wirklich stattgefunden hat, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die allen Geschworenen gemeinschaftliche Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens $= u$ ist, durch das Product aus der Formel (4) und $\varphi u\,du$ dividirt durch die Summe aller Werthe dieses Productes, welche allen Werthen der Größe u von $u = 0$ bis $u = 1$ entsprechen, ausgedrückt (§. 43), so dass wir, wenn wir diese unendlich kleine Wahrscheinlichkeit mit $\omega_i du$ bezeichnen:

$$\omega_i = \frac{\left[k u^{n-1}(1-u)^i + (1-k) u^i (1-u)^{n-i}\right] \varphi u}{\int_0^1 \left[k u^{n-i}(1-u)^i + (1-k) u^i (1-u)^{n-i}\right] \varphi u\, du}$$

erhalten, indem wir den von u unabhängigen Factor N_i der Formel (4), welcher im Zähler und Nenner von ω_i zugleich vorkommen würde, hinweglassen. Wenn man die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens zwischen gegebenen Grenzen l und l' gelegen hat, mit λ_i bezeichnet; so wird diese Größe durch das von $u = l$ bis $u = l'$ genommene Integral von $\omega_i du$ ausgedrückt, und man hat folglich:

$$\lambda_i = \frac{k\int_l^{l'} u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du + (1-k)\int_l^{l'} u^i (1-u)^{n-i} \varphi u\, du}{k\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du + (1-k)\int_0^1 u^i (1-u)^{n-i} \varphi u\, du}. \quad (12)$$

Wenn n eine gerade Zahl ist und eine gleiche Stimmenvertheilung stattfindet, so hat man $n = 2i$ und folglich:

$$\lambda_i = \frac{\int_l^{l'} u^i (1-u)^i \varphi u\, du}{\int_0^1 u^i (1-u)^i \varphi u\, du},$$

so dass die Wahrscheinlichkeit λ_i alsdann von der Größe k, wovon sie

im Allgemeinen bei einer ungleichen Stimmenvertheilung abhängt, unabhängig ist. Wenn zwei beliebige, von den Grenzwerthen **0** und **1** oder von dem mittleren Werthe $\frac{1}{2}$ gleich weit entfernte Werthe von u gleich wahrscheinlich sind, so dass $\varphi(1-u)=\varphi u$ ist; so folgt:

$$\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du = \int_0^1 u^i (1-u)^{n-i} \varphi u\, du.$$

Wenn ferner $l<\frac{1}{2}$ und $l'=1-l$ ist, so hat man auch:

$$\int_l^{l'} u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du = \int_l^{l'} u^i (1-u)^{n-i} \varphi u\, du,$$

und die Formel (**12**) verwandelt sich folglich in:

$$\lambda_i = \frac{\int_l^{1-l} u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du}{\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du}$$

und ist wieder von k unabhängig, auf welche Weise sich die Gesammtzahl der Stimmen auch vertheilen mag, oder welche Werthe die Zahlen $n-i$ und i auch haben mögen.

Setzt man in der Formel (**12**) $l=\frac{1}{2}$ und $l'=1$ und bezeichnet ihren Werth alsdann mit λ'_i; so erhält man:

$$\lambda'_i = \frac{k\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du + (1-k)\int_{\frac{1}{2}}^1 u^i(1-u)^{n-i} \varphi u\, du}{k\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du + (1-k)\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i} \varphi u\, du}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit u zwischen $\frac{1}{2}$ und **1** liegt, oder größer als $\frac{1}{2}$ ist. Setzt man ebenso $l=0$ und $l'=\frac{1}{2}$ und bezeichnet alsdann den daraus entstehenden Werth der Formel (**12**) mit λ''_i, so erhält man:

$$\lambda''_i = \frac{k\int_0^{\frac{1}{2}} u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du + (1-k)\int_0^{\frac{1}{2}} u^i(1-u)^{n-i} \varphi u\, du}{k\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du + (1-k)\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i} \varphi u\, du}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass u kleiner ist als $\frac{1}{2}$. Da nun die Wahrscheinlichkeit, dass genau $u=\frac{1}{2}$ ist, unendlich klein ist, so muss die Summe der beiden Größen λ'_i und λ''_i der Einheit gleich sein, was

unmittelbar einleuchtet, wenn man bemerkt, daß ihre Nenner gleich sind, daß die Summe der in ihren Zählern mit k multiplicirten Integrale dem im Nenner mit k multiplicirten Integrale gleich ist, und daß dasselbe in Beziehung auf die mit $1-k$ multiplicirten Integrale stattfindet.

§. 126. Da die Wahrscheinlichkeit, daß die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens jedes Geschworenen bei einer Entscheidung, wo der Angeklagte von $n-i$ Geschworenen verurtheilt und von den übrigen i Geschworenen freigesprochen ist, $=u$ gewesen ist, durch $\omega_i du$ und die Wahrscheinlichkeit, daß der Angeklagte nach der Urtheilsfällung schuldig ist, durch die Größe p_i in §. 119 ausgedrückt wird, wenn diese Wahrscheinlichkeit zuverlässig $=u$ wäre; so folgt aus den Regeln in §. 5 und §. 10, daß die Wahrscheinlichkeit der Schuld durch das von $u=0$ bis $u=1$ genommene Integral des Productes $p_i\omega_i du$ ausgedrückt wird. Bezeichnet man sie also mit ζ_i und berücksichtigt die Ausdrücke von ω_i und p_i, so erhält man:

$$\zeta_i=\frac{k\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i\varphi u\,du}{k\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i\varphi u\,du+(1-k)\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i}\varphi u\,du} \quad (13)$$

Diese Wahrscheinlichkeit ζ_i wird mit k zu gleicher Zeit $=0$ oder $=1$. Bringt man ihren Ausdruck unter die Form:

$$\zeta_i=k+\frac{k(1-k)\left[\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i\varphi u\,du-\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i}\varphi u\,du\right]}{k\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i\varphi u\,du+(1-k)\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i}\varphi u\,du},$$

so sieht man, daß für jeden andern Werth von k die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten nach der Urtheilsfällung größer oder kleiner ist, als zuvor, jenachdem das erste der beiden Integrale:

$$\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i\varphi u\,du \text{ und } \int_0^1 u^i(1-u)^{n-i}\varphi u\,du$$

größer oder kleiner, als das zweite ist. Wenn sie einander gleich sind, was immer für $n=2i$ und für $\varphi(1-u)=\varphi u$ der Fall ist, so hat man $\zeta_i=k$, und in der That kann die Wahrscheinlichkeit, daß der Angeklagte schuldig ist, auf keine Weise durch ein Urtheil verändert werden, bei welchem eine gleiche Vertheilung der Stimmen für und gegen denselben stattfand, so wie auch nicht durch eine Entscheidung, bei welcher die Werthe u und $1-u$ oder $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}(1-2u)$ der Wahrschein-

lichkeit des Nichtirrens der Geschworenen als gleich wahrscheinlich angenommen werden.

Der Werth von ζ_i hängt in jedem andern Falle nicht blos, wie der von p_i, von der Stimmenmehrheit m, oder $n-2i$, bei welcher das Urtheil ausgesprochen ist, und von der Größe k ab, sondern er hängt auch von der Gesammtzahl n der Geschworenen und von dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeiten, dass sich die Geschworenen nicht irren, welches durch die Function φu ausgedrückt wird, ab.

Wenn z. B. eine Verurtheilung von einem aus **201** Geschworenen bestehenden Geschworenengerichte nur bei einer Majorität von einer Stimme ausgesprochen ist, oder, wenn der Angeklagte in einem andern Falle von einem einzigen Geschworenen verurtheilt ist, und es ist gewiss, dass die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für diesen einen Geschworenen und für jeden der **201** übrigen dieselbe gewesen ist; so hat die Richtigkeit des Urtheiles in beiden Fällen genau dieselbe Wahrscheinlichkeit, nur ist im ersten Falle, wenn diese Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens merklich von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, das beobachtete Ereigniss ein ungewöhnliches, dessen Wahrscheinlichkeit sehr gering ist, und welches sehr selten stattfinden wird, und wenn diese Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens $=\frac{1}{2}$ ist; so ist die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles nach dem Ausdrucke von ϖ_i in §. **119** etwas größer, als $\frac{1}{9}$. Aber wenn die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Geschworenen sich nicht irret, uns vor der Entscheidung unbekannt ist und wir sie aus dem ausgesprochenen Urtheile selbst ableiten wollen, so ist die Schuld des Angeklagten weit weniger wahrscheinlich, wenn er von **101** Geschworenen verurtheilt und von **100** andern Geschworenen freigesprochen wird, als wenn er nur von einem einzigen Geschworenen verurtheilt worden wäre. Hiermit ist jedoch nicht gesagt, dass die Entscheidung von **101** Geschworenen gegen **100** an und für sich weniger richtig sei, als die eines einzigen Geschworenen, sondern nur, dass die Vertheilung von **201** Stimmen in zwei nur um eine Einheit verschiedene Theile es sehr wahrscheinlich macht, dass die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens wenig von $\frac{1}{2}$ verschieden gewesen ist, ohne Zweifel wegen der Schwierigkeit der Sache selbst.

§. **127.** Um sich von der Bedeutung, welche man den Formeln (**12**) und (**13**) beilegen muss, einen genauen Begriff zu bilden, muss man sich eine Person denken, welche vor der Entscheidung des Geschworenengerichtes einen gewissen, durch die Wahrscheinlichkeit k ausgedrückten Grund habe, den Angeklagten für schuldig zu halten, welche keinen der n Geschworenen kennt, so wie auch die Sache nicht, welche sie beurtheilen sollen, sondern welche blos weiß, dass man die Geschworenen

zufällig aus der allgemeinen Liste genommen hat. Für diese Person ist die Wahrscheinlichkeit, daſſ sich ein Geschworener in seinem Urtheile nicht geirret hat, für alle Geschworenen gleich (§. 122), aber ihr unbekannt. Vor der Entscheidung kann sie für die Unbekannte u alle möglichen Werthe von $u=0$ bis $u=1$ annehmen. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, welche diese Person der Veränderlichen u beilegt, wird, wie sich durch allgemeine Betrachtungen, in die wir hier nicht weiter eingehen wollen, zeigen läſſt, durch $\varphi u du$ ausgedrückt, und φu ist eine gegebene Function, welche der Bedingung $\int_0^1 \varphi u du = 1$ genügen muſſ, weil der Werth von u zuverläſſig zwischen den Grenzen dieses Integrales liegt. Nachdem das Urtheil ausgesprochen ist und die gedachte Person weiß, daſſ der Angeklagte von i Geschworenen freigesprochen und von den übrigen $n-i$ Geschworenen verurtheilt ist, ist diese Kenntniſſ ein neues Datum, wornach für diese Person die Wahrscheinlichkeit λ_i, daſſ die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens eines Geschworenen bei dieser Entscheidung für alle Geschworenen zwischen den Grenzen l und l' liegt, vorhanden ist. Der Grund zu der Annahme der Schuld des Angeklagten hat ebenfalls zu- oder abgenommen; die Wahrscheinlichkeit k, welche denselben vor der Entscheidung ausdrückte, ist nach derselben ζ_i geworden und sie würde für eine andere Person, welche andere Kenntnisse über die fragliche Angelegenheit hätte, eine andere sein, weswegen man sie nicht mit der Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten selbst verwechseln muſſ. Diese letztere ist von k und von der Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens der Geschworenen, welche für jeden derselben nach den verschiedenen Graden seiner Fähigkeiten und nach der Beschaffenheit der zu untersuchenden Angelegenheit verschieden ist, abhängig. Wenn die Zahlenwerthe von u, u', u'' ... dieser Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für alle Geschworenen, so wie der Werth von k gegeben wären, so ließe sich die wahre Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten nach der Urtheilsfallung durch die auf den Fall von n Geschworenen ausgedehnten Regeln in §. 116 berechnen; aber da es nicht möglich ist, diese Werthe a priori zu kennen; so lassen sich auch diese Regeln nicht anwenden.

Wenn man blos weiß, daſſ der Angeklagte bei einer Stimmenmehrheit von wenigstens m oder $n-2i$ Stichmen verurtheilt ist, so daſſ diese Stimmenmehrheit $m+2$, $m+4, \ldots$ bis zur Einstimmigkeit hat tragen können, und man bezeichnet in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit, daſſ die allen Geschworenen gemeinschaftliche Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens zwischen den Grenzen l' und l gelegen hat, mit Y_i und die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Angeklagte schuldig sei, mit Z_i; so erhält man

die Ausdrücke von Y_i und Z_i durch dieselben Betrachtungen, als die für λ_i und ζ_i angestellten, indem man aber die Werthe von c_i und P_i (§. 118 und §. 120) statt der Werthe γ_i und p_i, deren wir uns bei der Ableitung der Formeln (12) und (13) bedient haben, anwendet. Auf diese Weise findet man:

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= \frac{k\int_0^1 U_i \varphi u\, du + (1-k)\int_l^{l'} V_i \varphi u\, du}{k\int_0^1 U_i \varphi u\, du + (1-k)\int_0^1 V_i \varphi u\, du} \\ Z_i &= \frac{k\int_0^1 U_i \varphi u\, du}{k\int_0^1 U_i \varphi u\, du + (1-k)\int_0^1 V_i \varphi u\, du}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Man könnte diese Ausdrücke, so wie die Formeln (12) und (13), verallgemeinern und sie auch auf den Fall ausdehnen, wo man wüsste, dass ein Theil n' der n Geschworenen zufällig auf einer ersten Liste, ein anderer Theil n'' auf einer zweiten Liste *etc.* genommen ist und wo vorausgesetzt würde, dass für die erste Liste ein Werth u' der mittleren Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens eine Wahrscheinlichkeit $=\varphi' u' du'$, für die zweite Liste ein Werth u'' dieser mittleren Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit $\varphi'' u'' du''$, u. s. f. hat. Allein diese Erweiterung bietet weder Schwierigkeit, noch eine nützliche Anwendung dar, und wir wollen deshalb die complicirten Formeln, auf welche sie führt, hier nicht mittheilen.

§. 128. Wenn i und $n-i$ sehr große Zahlen sind, so muss man sich zur Berechnung der Näherungswerthe der in den Formeln (12), (13) und (14) vorkommenden Integrale der Methode in §. 67 bedienen. Wir wollen zunächst die in den Formeln (12) und (13) vorkommenden Integrale betrachten.

Von $u=0$ bis $u=1$ hat das Product $u^{n-i}(1-u)^i$ nur ein einziges Maximum, dessen Werth wir mit $\mathfrak{E}$ und den entsprechenden Werth von u mit α bezeichnen wollen Alsdann ist:

$$\alpha = \frac{n-i}{n}, \quad \mathfrak{E} = \frac{i^i (n-i)^{n-i}}{n^n}.$$

Ferner wollen wir

$$u^{n-i}(1-u)^i = \mathfrak{E}\, e^{-x^2}$$

setzen, oder indem wir die Logarithmen nehmen:

$$x^2 = \log \mathfrak{E} - (n-i) \log u - i \log (1-u).$$

Die Veränderliche x wächst fortwährend von $x = -\infty$ bis $x = \infty$, die Werthe $x = -\infty$, $x = 0$, $x = \infty$ entsprechen $u = 0$, $u = \alpha$, $u = 1$ und die Grenzen des Integrales in Beziehung auf x sind $\pm\infty$, wenn die sich auf u beziehenden 0 und 1 sind. Allgemein, wenn man die Grenzen in Beziehung auf x, welche den Grenzen l und l' in Beziehung auf u entsprechen, mit λ und λ' bezeichnet, so hat man nach den vorhergehenden Werthen von $\mathfrak{E}$ und x^2:

$$\lambda = \pm \sqrt{(n-i) \log \frac{n-i}{ln} + i \log \frac{i}{(1-l)n}},$$

$$\lambda' = \pm \sqrt{(n-i) \log \frac{n-i}{l'n} + i \log \frac{i}{(1-l')n}}.$$

Da die Werthe von λ und λ', wenn l und l' größer sind, als α, positiv sein müssen, so nimmt man die oberen Zeichen der Wurzelgrößen; die untern Zeichen dagegen, wenn l und l' kleiner sind, als α, und wenn $l < \alpha$ und $l' > \alpha$ ist, so nimmt man das obere Zeichen der zweiten und das untere der ersten Wurzelgröße, damit der Werth von λ negativ und der von λ' positiv wird.

Um u durch eine nach den steigenden Potenzen von x geordnete Reihe auszudrücken, seien γ, γ', γ'', ... die constanten Coefficienten, und wir wollen:

$$u = \alpha + \gamma x + \gamma' x^2 + \gamma'' x^3 + etc.$$

setzen; so ergibt sich hieraus mit Berücksichtigung der Werthe von α, $\mathfrak{E}$ und x^2:

$$x^2 = \frac{n^3}{2i(n-i)} (\gamma x + \gamma' x^2 + \gamma'' x^3 + etc.)^2$$

$$+ \frac{n^4 (n-2i)}{3 i^2 (n-i)^2} (\gamma x + \gamma' x^2 + \gamma'' x^3 + etc.)^3 + etc.$$

und wenn man die Coefficienten derselben Potenzen von x in den beiden Theilen dieser Gleichung einander gleich setzt; so ergeben sich die Werthe von γ, γ', γ'', vermittelst welcher man:

$$u = \alpha + x \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}} - \frac{2x^2(n-2i)}{3n^2} + etc.$$

und zugleich:

$$du = \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}\,dx - \frac{4x(n-2i)}{3n^2} + etc.$$

erhält.

Wenn die Function φu auf der einen oder andern Seite des besondern Werthes α von u nicht sehr schnell abnimmt, so kann man nachdem man den Reihenausdruck von u in diese Function substituirt hat, dieselbe auch nach den Potenzen von $u-\alpha$ und folglich nach den Potenzen von x entwickeln. Auf diese Weise erhält man:

$$\varphi u = \varphi\alpha + \left[x\sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^2}} - etc.\right]\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}} - etc.\right]^2\frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} + etc.$$

Vermöge dieser verschiedenen Werthe enthält der Reihenausdruck von:

$$\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du.$$

die von $x=-\infty$ bis $x=\infty$ genommenen Integrale des mit den geraden oder ungeraden Potenzen von x multiplicirten Differenzials $e^{-x^2}dx$. Die Integrale mit den geraden Potenzen von x haben bekannte Werthe, die übrigen verschwinden und da die Zahlen i und $n-i$ von derselben Größenordnung, als n sind; so erscheint die in Rede stehende Reihe nach Größen von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n\sqrt{n}}, \frac{1}{n^2\sqrt{n}}, \ldots$ geordnet. Bleiben wir bei dem ersten Gliede derselben stehen und bemerken, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ ist, so erhalten wir:

$$\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i \varphi u\, du = \frac{i^i (n-i)^{n-i}\sqrt{2\pi i(n-i)}}{n^{n+1}\sqrt{n}}\,\varphi\left(\frac{n-i}{n}\right),$$

woraus sich durch Vertauschung der Zahlen i und $n-i$ ergibt:

$$\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i}\varphi u\, du = \frac{i^i(n-i)^{n-i}\sqrt{2\pi i(n-i)}}{n^{n+1}\sqrt{n}}\,\varphi\left(\frac{i}{n}\right).$$

Wenn man mit δ eine positive und gegen $\sqrt{n}$ sehr kleine Größe bezeichnet, ferner:

$$l = \frac{n-i}{n} - \delta\sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}},\quad l' = \frac{n-i}{n} + \delta\sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}$$

setzt, und die in den Ausdrücken von λ und λ' vorkommenden Logarithmen in Reihen entwickelt; so findet man $\lambda = -\delta$ und $\lambda' = \delta$, indem man die Glieder von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{\sqrt{n}}$ vernachlässigt. Hiernach hat man:

$$\int_l^{l'} u^{n-i} (1-u)^i \varphi u \, du =$$

$$\frac{i^i (n-i)^{n-i} \sqrt{2i(n-i)}}{n^{n+1} \sqrt{n}} \varphi\left(\frac{n-i}{n}\right) \int_{-\delta}^{\delta} e^{-x^2} dx$$

bis auf Größen von der Ordnung von $\frac{1}{n}$ genau. Je mehr δ zunimmt, desto mehr nähert sich das Integral in Beziehung auf x dem Werthe $\sqrt{\pi}$, und damit es nur sehr wenig davon verschieden ist, braucht man für δ nur eine Zahl, wie 2 oder 3 zu nehmen. Für die Grenzen l oder l', welche beide merklich größer oder kleiner, als $\frac{n-i}{n}$ sind, würde das Integral nach u fast Null sein.

Bezeichnet man mit ε eine positive und gegen $\sqrt{n}$ sehr kleine Größe, setzt:

$$l = \frac{i}{n} - \varepsilon \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}, \quad l' = \frac{i}{n} + \varepsilon \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}},$$

so erhält man ebenso:

$$\int_l^{l'} u^i (1-u)^{n-i} \varphi u \, du =$$

$$\frac{i^i (n-i)^{n-i} \sqrt{2i(n-i)}}{n^{n+1} \sqrt{n}} \varphi\left(\frac{i}{n}\right) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2} dx.$$

Wenn die Grenzen l und l' merklich größer oder kleiner, als $\frac{i}{n}$ wären, so würde das Integral in Beziehung auf u fast Null sein.

Wenn die Brüche $\frac{n-i}{n}$ und $\frac{i}{n}$ merklich von einander verschieden sind, so sind die vorhergehenden Werthe von l und l' ebenfalls von dem Werthe $\frac{i}{n}$ von u, welcher dem Maximum von $u^i (1-u)^{n-i}$

entspricht, verschieden, wodurch das, diesen Grenzen entsprechende Integral:

$$\int_l^{l'} u^i (1-u)^{n-i} \varphi u \, du$$

fast auf Null reducirt wird, und zu gleicher Zeit sind diese letzten Werthe von l und l' auch merklich von dem Werthe von $\frac{n-i}{n}$ von u, welcher dem Maximum von $u^{n-i}(1-u)^i$ entspricht, verschieden, wodurch das andern Grenzen entsprechende Integral:

$$\int_l^{l'} u^{n-i} (1-u)^i \varphi u \, du$$

ebenfalls auf Null reducirt wird.

§. **129.** Substituirt man also in die Formel (**13**) die Näherungswerthe der darin vorkommenden Integrale und läßt die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren hinweg, so bekommt man:

$$\zeta_i = \frac{k\varphi\left(\frac{n-i}{n}\right)}{k\varphi\left(\frac{n-i}{n}\right) + (1-k)\varphi\left(\frac{i}{n}\right)}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Angeklagter schuldig ist, wenn er von einem aus einer sehr großen Anzahl n von Geschworenen bestehenden Geschworenengerichte bei der Mehrheit von m oder $n-2i$ Stimmen verurtheilt ist. Man sieht, daß diese Wahrscheinlichkeit von dem Verhältnisse von i zu n, oder wenn man will, von dem Verhältnisse von $n-i$ zu i und nicht von der Differenz dieser Zahlen abhängt, wie die Wahrscheinlichkeit p_i, welche in dem Falle stattfindet, wo die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens der Geschworenen a priori gegeben ist (§. **119**). Wenn z. B. der Angeklagte bei einem aus **1500** Geschworenen bestehenden Geschworenengerichte von **1000** Stimmen verurtheilt und von **500** freigesprochen wird, oder wenn er von einem aus **150** Geschworenen bestehenden Geschworenengerichte durch **100** Stimmen verurtheilt und durch die **50** übrigen freigesprochen wird; so ist die Wahrscheinlichkeit ζ_i in diesen beiden Fällen dieselbe, aber die Wahrscheinlichkeit p_i sehr verschieden. Wenn dagegen das erste Geschworenengericht aus **1050** Geschworenen bestände, wovon **550** den Angeklagten verurtheilt und **500** ihn freigesprochen hätten, während das zweite Geschworenengericht und dessen Entscheidung ungeändert bleiben,

so würde die Wahrscheinlichkeit p_i nicht geändert werden und die Wahrscheinlichkeit ζ_i könnte für beide Fälle sehr verschieden sein.

Wenn der Angeklagte verurtheilt ist, so ist $\frac{n-i}{n} > \frac{1}{2}$ und $\frac{i}{n} < \frac{1}{2}$. Wenn man nun annimmt, daß die Function φu unter $u = \frac{1}{2}$ fast Null ist, d. h. wenn man eine mittlere Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens, welche $< \frac{1}{2}$ oder kleiner als die des Irrens wäre, als ganz unwahrscheinlich betrachtet, und wenn sich ferner der Bruch k der Null nicht sehr nähert; so kann man das zweite Glied des Nenners von ζ_i gegen das erste vernachlässigen, und folglich ist alsdann $\zeta_i = 1$ oder wenigstens eine sich der Gewißheit sehr nähernde Wahrscheinlichkeit.

Vermittelst der Näherungswerthe der in der Formel (12) vorkommenden Integrale und unter der Voraussetzung, daß die Brüche $\frac{n-i}{n}$ und $\frac{i}{n}$ nicht sehr wenig von einander verschieden sind, erhält man:

$$\lambda_i = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} k\varphi\left(\frac{n-i}{n}\right) \int_{-\delta}^{\delta} e^{-x^2} dx}{k\varphi\left(\frac{n-i}{n}\right) + (1-k)\varphi\left(\frac{i}{n}\right)}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß bei dem gegen den Angeklagten gefällten Urtheile die allen Geschworenen gemeinschaftliche Wahrscheinlichkeit ihres Nichtirrens zwischen den Grenzen:

$$\frac{n-i}{n} \mp \delta \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}$$

gelegen hat. In derselben Voraussetzung, in welcher eins der beiden in dem Zähler der Formel (12) vorkommenden Integrale verschwindet, hat man:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} k\varphi\left(\frac{i}{n}\right) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2} dx}{k\varphi\left(\frac{n-i}{n}\right) + (1-k)\varphi\left(\frac{i}{n}\right)}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß diese Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen:

$$\frac{i}{n} \mp \varepsilon \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}$$

gelegen hat.

Man kann den Größen δ und ε hinreichend große Werthe gebe ohne dass sie deshalb sehr beträchtlich werden, damit die Integrale Beziehung auf x sehr wenig von $\sqrt{\pi}$ verschieden sind. Alsdann die Summe dieser beiden Werthe von λ_i auch sehr wenig von d Einheit verschieden und es ist fast gewiss, dass die mittlere Wahrschei lichkeit u entweder zwischen den ersten Grenzen, welche sich wenig vo dem Bruche $\frac{n-i}{n} > \frac{1}{2}$ entfernen, oder zwischen den letzten Grenze welche sich wenig von dem Bruche $\frac{i}{n} < \frac{1}{2}$ entfernen, gelegen ha Wenn man annimmt, dass $\varphi\left(\frac{i}{n}\right)$ sehr klein ist, oder gegen $\varphi\left(\frac{n-i}{n}\right.$ vernachlässigt werden kann, so wird der zweite Fall ausgeschlossen, un man kann es als fast gewiss annehmen, dass sich der Werth von sehr wenig von dem Verhältnisse $\frac{n-i}{n}$ entfernt hat, oder mit ander Worten, dass sich die Wahrscheinlichkeiten u und $1-u$ des Nichtirren und des Irrens der Geschworenen, wie die Zahlen $n-i$ und i de verurtheilenden und freisprechenden Stimmen verhalten haben.

Hiernach scheint es, dass die Wahrscheinlichkeit ζ_i, statt sich fa auf die Einheit zu reduciren, sehr wenig von dem Werthe von p_i fü $u = \frac{n-i}{n}$ verschieden sein müsste. Aber man muss bemerken, dass man wenn die Wahrscheinlichkeit p_i dem Falle entspricht, wo die Wahrscheinlichkeit u zuverlässig nur einen einzigen möglichen Werth hat, annehmen müsste, dass φu nur innerhalb eines unendlich kleinen Intervalles zu beiden Seiten des möglichen Werthes von u Werthe $=0$ hätte, und dass diese Function in der Nähe dieses Werthes sehr schnell abnähme, um diesen Fall auf den dem Ausdrucke von ζ_i entsprechenden zurückzuführen. Nun haben wir aber aus der Analyse im vorhergehenden §. gesehen, dass sich die Function φu nicht auf diese Weise zu beiden Seiten des Werthes $\frac{n-i}{n}$ von u ändert, und folglich ist der aus dieser Analyse abgeleitete Ausdruck von ζ_i nicht auf den Fall anwendbar, welchem der Ausdruck von p_i in §. 119 entspricht. Man kann übrigens bemerken, dass dieser in der Formel (13) enthalten ist. Denn wenn man im Allgemeinen durch v den einzigen möglichen Werth von u und mit η eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, und für φu eine Function nimmt, welche für alle nicht zwischen $v \mp \eta$ liegende Werthe von u Null ist; so reduciren sich die Grenzen der in

der Formel (13) vorkommenden Integrale auf $v \mp \eta$. Innerhalb derselben sind die Factoren $u^{n-i}(1-u)^i$ und $u^i(1-u)^{n-i}$ constant, und wenn man sie aus dem Integralzeichen $\int$ heraustreten lässt, und dann das Integral $\int_{v-\eta}^{v+\eta} \varphi u\, du$, welches ein gemeinschaftlicher Factor des Zählers und Nenners des Ausdruckes (13) ist, hinweglässt, so stimmt derselbe mit der auf den Fall von $u = v$ angewandten Formel (7) überein.

Wenn die beiden Brüche $\frac{n-i}{n}$ und $\frac{i}{n}$ nicht merklich von einander verschieden sind, und man nimmt $\varepsilon = \delta$; so beziehen sich die vorhergehenden Werthe von λ_i auf dieselben Grenzen der Wahrscheinlichkeit u; aber ihr gemeinschaftlicher Werth ist von den vorhergehenden verschieden, von k unabhängig und $= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-x^2} dx$, weil in diesem besondern Falle die beiden im Zähler, sowie die im Nenner des Ausdruckes (12) vorkommenden Integrale fast einander gleich sind.

§. 130. Um die Näherungswerthe der in den Formeln (14) vorkommenden Integrale zu bestimmen, muss man die von U_i und V_i vermittelst der Formeln (11) ausdrücken.

Da die erste dieser letztern stattfindet, wenn $\frac{1-u}{u}$ größer ist, als $\frac{i}{n+1-i}$ und die zweite im entgegengesetzten Falle; so folgt, dass die erste von $u = 0$ bis $u = \alpha$ und die zweite von $u = \alpha$ bis $u = 1$ stattfindet, wenn man n für $n+1$ nimmt und $\frac{n-i}{i} = \alpha$ setzt. Nach der Gleichung, welche die in diesen Formeln (11) vorkommende Größe θ bestimmt, hat man:

$$u^{n-i}(1-u)^i = \frac{i^i (n-i)^{n-i}}{n^n} e^{-\theta^2},$$

d. h. dieselbe Gleichung, welche man zwischen u und x hatte, und woraus folgt:

$$u = \alpha + \theta \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3} - \frac{2\theta^2(n-2i)}{3n^2} + etc.}$$

Aber da θ immer eine positive Größe sein muss (§. 121), so sind seine Werthe $\theta = \infty$, $\theta = 0$, $\theta = \infty$ für $u = 0$, $u = \alpha$, $u = 1$. Indem die Veränderliche u von $u = 0$ bis $u = \alpha$ wächst, nimmt die Verän=

derliche θ von $\theta=\infty$ bis $\theta=0$ ab, und wenn u wieder von $u=$
bis $u=1$ wächst, so nimmt die Veränderliche θ von $\theta=0$ bis $\theta=\infty$ zu

Hiernach ist vermöge der Formeln (11):

$$\int_0^\alpha U_i \varphi u\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^0 \left(\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx \right) \varphi u \frac{du}{d\theta} d\theta + \frac{(n+i)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi n i (n-i)}} \int_\infty^0 e^{-\theta^2} \varphi u \frac{du}{d\theta} d\theta,$$

$$\int_0^1 U_i \varphi u du = \int_\alpha^1 \varphi u du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \left(\int_\theta e^{-x^2} dx \right) \varphi u \frac{du}{d\theta} d\theta + \frac{(n+i)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi n i (n-i)}} \int_0^\infty e^{-\theta^2} \varphi u \frac{du}{d\theta} d\theta.$$

Die Werthe dieser einfachen und doppelten Integrale in Beziehung auf θ erhält man in convergirenden Reihen, wenn man unter den Zeichen $\int$ die vorhergehende Reihe für u und ihren Differenzialcoefficienten für $\frac{du}{d\theta}$ setzt und auch φu in eine Reihe entwickelt, was voraussetzt, dass sich diese Function auf der einen oder andern Seite des besondern Werthes α von u nicht sehr schnell ändert. Wenn man die Glieder von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{n}$ vernachlässigt, so kann man blos:

$$u = \alpha + \theta \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}, \quad \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}, \quad \varphi u = \varphi \alpha$$

setzen, wo die Wurzelgröße $\sqrt{\frac{2i(n-i)}{n^3}}$ das doppelte Zeichen $\pm$ haben kann. Das obere Zeichen nimmt man in den Integralen, worin die Veränderliche θ wächst und das untere Zeichen in denen, wo sie abnimmt. Verwandelt man alsdann das Zeichen dieser letztern in das entgegengesetzte und kehrt die Ordnung ihrer Grenzen um, so erhält man:

$$\int_0^\alpha U_i \varphi u du = \varphi \alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \int_0^\infty \left(\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx \right) d\theta,$$

$$\int_\alpha^1 U_i \varphi u du =$$

$$\int_\alpha^1 \varphi u du - \varphi \alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \int_0^\infty \left(\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx \right) d\theta,$$

und wenn man diese beiden Formeln addirt, so ergibt sich:

$$\int_0^1 U_i \varphi u\, du = \int_\alpha^1 \varphi u\, du.$$

Allgemein, wenn man mit a und $a_{,}$ zwei solche Werthe von u bezeichnet, daß $a < \alpha$ und $a_{,} > \alpha$ ist, und mit b und $b_{,}$ die $u = a$ und $u = a_{,}$ entsprechenden positiven Werthe von θ; so hat man bei dem Grade von Annäherung, wobei wir stehen bleiben:

$$\int_a^\alpha U_i \varphi u\, du = \varphi\alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \int_0^b \left(\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx\right) d\theta,$$

$$\int_\alpha^{a_{,}} U_i \varphi u\, du = \int_\alpha^{a_{,}} \varphi u\, du -$$

$$\varphi\alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \int_0^{b_{,}} \left(\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx\right) d\theta.$$

Durch das Verfahren der theilweisen Integration erhält man ferner:

$$\int_0^b \left(\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx\right) d\theta = b \int_b^\infty e^{-x^2} dx + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} e^{-b^2},$$

$$\int_0^{b_{,}} \left(\int_\theta^\infty e^{-x^2} dx\right) d\theta = b_{,} \int_{b_{,}}^\infty e^{-x^2} dx + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} e^{-b_{,}^2},$$

und folglich:

$$\int_a^\alpha U_i \varphi u du = \varphi\alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \left(b \int_b^\infty e^{-x^2} dx + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} e^{-b^2}\right),$$

$$\int_\alpha^{a_{,}} U_i \varphi u\, du =$$

$$\int_\alpha^{a_{,}} \varphi u\, du - \varphi\alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \left(b_{,} \int_{b_{,}}^\infty e^{-x^2} dx + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} e^{-b_{,}^2}\right).$$

Setzt man nun in den Formeln (11) V_i für U_i und verwandelt folglich u in $1-u$ (§. 118), so findet die erste statt, wenn $\frac{u}{1-u}$ größer ist, als $\frac{i}{n+1-i}$, d. h. von $u = 1 - \alpha$ bis $u = 1$, indem man n für $n+1$ nimmt und wieder $\alpha = \frac{n-i}{n}$ setzt, und die zweite von $u = 0$ bis $u = 1 - \alpha$. Bezeichnet man durch θ' den Werth von θ,

wenn man darin u in $1-u$ verwandelt und läſſt wieder die Glieder von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{n}$ unberückſichtigt, ſo erhält man zunächſt:

$$\int_{1-\alpha}^{1} V_i \varphi u\, du = \varphi(1-\alpha)\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}\int_0^\infty \left(\int_{\theta'}^\infty e^{-x^2} dx\right) d\theta'$$

$$\int_0^{1-\alpha} V_i \varphi u\, du =$$

$$\int_0^{1-\alpha} \varphi u\, du - \varphi(1-\alpha)\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}\int_0^\infty \left(\int_{\theta'}^\infty e^{-x^2} dx\right) d\theta',$$

und folglich:

$$\int_0^1 V_i \varphi u\, du = \int_0^{1-\alpha} \varphi u\, du.$$

Bezeichnen alsdann a' und $a_{\prime}'$ zwei ſolche Werthe von u, daſſ $a' < 1-\alpha$ und $a_{\prime}' > 1-\alpha$ iſt, und b', $b_{\prime}'$ die aus der Gleichung:

$$(1-u)^{n-i} u^i = \frac{i^i (n-i)^{n-i}}{n^3} e^{-\theta'^2}$$

abgeleiteten Werthe von θ', welche $u = a'$ und $u = a_{\prime}'$ entſprechen; ſo hat man auch:

$$\int_{1-\alpha}^{a'_{\prime}} V_i \varphi u\, du =$$

$$\varphi(1-\alpha)\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}\left(b'_{\prime}\int_{b'_{\prime}}^\infty e^{-\theta'^2} d\theta' + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} e^{-b'^2_{\prime}}\right),$$

$$\int_{a'}^{1-\alpha} V_i \varphi u\, du = \int_{a'}^{1-\alpha} \varphi u\, du$$

$$-\varphi(1-\alpha)\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}\left(b'\int_{b'}^\infty e^{-\theta'^2} d\theta' + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} e^{-b'^2}\right).$$

§. 131. Nachdem die Näherungswerthe der in den Formeln (14) vorkommenden Integrale auf dieſe Weiſe beſtimmt ſind, erhalten wir:

$$Z_i = \frac{k\int_\alpha^1 \varphi u\, du}{k\int_\alpha^1 \varphi u\, du + (1-k)\int_0^{1-\alpha} \varphi u\, du}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Angeklagte schuldig ist, wenn er wenigstens von $n-i$ Stimmen eines aus einer sehr großen Anzahl n Geschworenen bestehenden Geschworenengerichtes ist verurtheilt worden. Wenn das Verhältniſſ $\alpha = \frac{n-i}{n}$ alsdann größer, als $\frac{1}{2}$ ist, und man nimmt an, daſſ die Function φu für kleinere Werthe von u als $\frac{1}{2}$ einen unmerklichen oder verschwindenden Werth hat; so ist dieses auch mit dem Integrale $\int_0^{1-\alpha} \varphi u\, du$ der Fall, und wenn k kein sehr kleiner Bruch ist, so ist der Werth von Z_i fast der Einheit gleich. In dem Falle, wo für alle Werthe von u, $\varphi(1-u) = \varphi u$ ist, hat man:

$$\int_0^{1-\alpha} \varphi u\, du = -\int_0^{\alpha} \varphi(1-u)\, du = \int_\alpha^1 \varphi u\, du,$$

wodurch der Werth von Z_i auf k reducirt wird, wie es sein muſſ.

Wenn man $a = 1-\alpha$ und $a_{\prime}{}' = \alpha$ nimmt, so sind die correspondirenden Werthe b und $b_{\prime}{}'$ von θ und θ' einander gleich. Bezeichnet man diesen gemeinschaftlichen Werth mit c und berücksichtigt die Bedeutung von a; so ist c die durch die Gleichung:

$$(n-i)^i\, i^{n-i} = i^i (n-i)^{n-i} e^{-c^2}$$

bestimmte positive Größe, und man hat:

$$\int_{1-\alpha}^{\alpha} U_i \varphi u\, du = \varphi\alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \left(c\int_c^\infty e^{-x^2} dx + \tfrac{1}{2} - e^{-c^2} \right)$$

$$\int_{1-\alpha}^{\alpha} V_i \varphi u\, du =$$

$$\varphi(1-\alpha) \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \left(c\int_c^\infty e^{-x^2} dx + \tfrac{1}{2} - e^{-c^2} \right),$$

woraus folgt:

$$Y_i = \frac{k\varphi\alpha + (1-k)\varphi(1-\alpha)}{k\int_\alpha^1 \varphi u du + (1-k)\int_0^{1-\alpha} \varphi u du} \times$$

$$\left(c\int_c^\infty e^{-x^2} dx + \tfrac{1}{2} - e^{-c^2} \right) \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}$$

als die Wahrscheinlichkeit, daſſ bei der in Rede stehenden Verurtheilung die allen Geschworenen gemeinschaftliche Wahrscheinlichkeit u des Nicht-

irrens zwischen $1-\alpha$ und α, d. h. zwischen $\frac{i}{n}$ und $\frac{n-i}{n}$ gelegen hat. Diese Wahrscheinlichkeit ist wegen des sehr kleinen Factors $\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}$ sehr klein, woraus folgt, dass es im Gegentheil sehr wahrscheinlich ist, dass die Wahrscheinlichkeit u größer als a oder kleiner als $1-a$ gewesen ist.

Um dieses darzuthun, wollen wir $a_{,}=1$ und $a_{,}'=1$ nehmen, so sind die correspondirenden Werthe von θ und θ' resp. $b_{,}=\infty$ und $b_{,}'=\infty$; folglich ist:

$$\int_\alpha^1 U_i\varphi u\,du=\int_\alpha^1\varphi u\,du-\tfrac{1}{2}\varphi\alpha\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}},$$

$$\int_{1-\alpha}^1 V_i\varphi u\,du=\tfrac{1}{2}\varphi(1-\alpha)\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}.$$

Wenn man von diesem letzten Integrale den vorhergehenden Werth von $\int_{1-\alpha}^\alpha V_i\varphi u\,du$ abzieht, so kommt:

$$\int_\alpha^1 V_i\varphi u\,du=\varphi(1-\alpha)\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}\left(e^{-c^2}-c\int_c^\infty e^{-x^2}dx\right),$$

und vermöge der Werthe von $\int_\alpha^1 U_i\varphi u\,du$, $\int_\alpha^1 V_i\varphi u\,du$ erhält man:

$$Y_i=\frac{k\int_\alpha^1\varphi u\,du-\left[\frac{1}{2}k\varphi\alpha-(1-k)\varphi(1-\alpha)\left(e^{-c^2}-c\int_c^\infty e^{-x^2}dx\right)\right]}{k\int_\alpha^1\varphi u\,du+(1-k)\int_0^{1-\alpha}\varphi u\,du}\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit u zwischen $u=\alpha$ und $u=1$ gelegen hat, oder größer als α gewesen ist. Setzt man ferner $a=0$ und $a'=0$, so hat man auch $b=\infty$ und $b'=\infty$; folglich:

$$\int_0^{1-\alpha}V_i\varphi u\,du=\int_0^{1-\alpha}\varphi u\,du-\tfrac{1}{2}\varphi(1-\alpha)\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}},$$

$$\int_0^\alpha U_i\varphi u\,du=\tfrac{1}{2}\varphi\alpha\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}},$$

Zieht man von diesem letzten Integrale den vorhergehenden Werth von $\int_{1-\alpha}^{\alpha} U_i \varphi u\, du$ ab, so erhält man:

$$\int_0^{1-\alpha} U_i \varphi u\, du = \varphi\alpha \sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}} \left(e^{-c^2} - c\int_c^{\infty} e^{-x^2} dx\right),$$

und aus den Werthen von $\int_0^{1-\alpha} U_i \varphi u\, du$ und $\int_0^{1-\alpha} V_i \varphi u\, du$ folgt:

$$Y_i =$$

$$\frac{(1-k)\int_0^{1-\alpha} \varphi u\, du - \left[\frac{1}{2}(1-k)\varphi(1-\alpha) - k\varphi\alpha\left(e^{-c^2} - c\int_c e^{-x^2} dx\right)\right]\sqrt{\frac{2i(n-i)}{\pi n^3}}}{k\int_0^1 \varphi u\, du + (1-k)\int_{\alpha}^{1-\alpha} \varphi u\, du}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß die Wahrscheinlichkeit u zwischen $u = 0$ und $u = 1 - \alpha$ gelegen hat, oder kleiner als $1 - \alpha$ gewesen ist. Die Summe der beiden letzten Werthe von Y_i ist sehr nahe der Einheit gleich, was bewiesen werden sollte. Wenn die Werthe von φu für $u < \frac{1}{2}$ Null oder unmerklich sind, so ist der letzte Werth von Y_i sehr klein. und der vorhergehende sehr wenig von der Gewißheit (Einheit) verschieden. In allen Fällen ist die Summe der drei vorhin berechneten Werthe von $Y_i = 1$, wie es der Fall sein muß.

§. 132. Selbst wenn die Anzahl n der Geschworenen sehr groß ist, muß man nach dem Vorhergehenden in Beziehung auf die Function φu oder über das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens der Geschworenen eine Voraussetzung machen, um die Wahrscheinlichkeit bestimmen zu können, daß ein Angeklagter schuldig ist, wenn er von $n - i$ Stimmen freigesprochen und von i Stimmen verurtheilt ist, und dieses ist in dem gewöhnlichen Falle, wo die Zahl n nicht sehr beträchtlich ist, um so mehr nothwendig.

Die Voraussetzung, welche Laplace in dieser Beziehung gemacht hat, besteht in der Annahme, daß die Function φu für alle kleinern Werthe von u, als $\frac{1}{2}$ Null sei, und daß sie für alle größern Werthe von u, als $\frac{1}{2}$ denselben Werth habe, d. h. daß jede Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens, welche kleiner ist, als die des Irrens der Geschworenen, als unmöglich angesehen wird, und daß die Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens der Geschworenen, welche größer sind, als die des Irrens derselben, alle gleich wahrscheinlich sind. Diese Voraussetzung ist

gestattet; denn der Bedingung $\int_0^1 \varphi u\, du = 1$ wird auf die im Vorhergehenden (§. 123) angegebene Weise genügt. Das Mittel aus den möglichen Werthen von u oder $\int_0^1 u \varphi u\, du$ liegt alsdann zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ und ist für $u > \frac{1}{2}$ von dem Werthe von φu abhängig.

Da in dieser Voraussetzung für $u < \frac{1}{2}$ die Function $\varphi u = 0$ ist und für $u > \frac{1}{2}$ eine constante Größe, so reduciren sich die Grenzen der in der Formel (13) vorkommenden Integrale auf $u = 0$ und $u = \frac{1}{2}$, man kann φu aus dem Integralzeichen $\int$ heraustreten lassen, und da:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{i} (1 - u)^{n-i} du = \int_0^{\frac{1}{2}} u^{n-i} (1 - u)^{i} du$$

ist; so verwandelt sich diese Formel in:

$$\zeta_i = \frac{k \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{n-i} (1-u)^{i} du}{k \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{n-i} (1-u)^{i} du + (1-k) \int_0^{\frac{1}{2}} u^{n-i} (1-u)^{i} du}$$

indem man im Zähler und Nenner den constanten gemeinschaftlichen Factor φu hinweglässt.

Da Laplace die Wahrscheinlichkeit k der Schuld des Angeklagten vor der Urtheilsfällung nicht in Betracht gezogen hat, so muss man, um diese Formel mit der seinigen übereinstimmend zu machen, annehmen, dass die Schuld des Angeklagten weder mehr, noch weniger wahrscheinlich ist, als seine Unschuld, und folglich $k = \frac{1}{2}$ setzen, wodurch man erhält:

$$\zeta_i = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{n-i} (1-u)^{i} du}{\int_0^{1} u^{n-i} (1-u)^{i} du}.$$

Man hätte folglich auch:

$$1 - \zeta_i = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} u^{n-i} (1-u)^{i} du}{\int_0^{1} u^{n-i} (1-u)^{i} du},$$

oder, wenn man die Integrationen verrichtet:

$$1-\zeta_i=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{n+1}{1}+\frac{n+1.n}{1.2}+\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n+1.n.n-1\ldots n-i+2}{1.2.3\ldots i}\right) \quad (15)$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß der Angeklagte unschuldig ist, wenn er bei einer Mehrheit von $n-2i$ Stimmen eines aus n Geschworenen bestehenden Geschworenengerichtes verurtheilt ist.

Diese Formel ist in der That die von Laplace*) erhaltene. Die zwischen den Klammern stehende Größe besteht aus $i+1$ Gliedern und reducirt sich für $i=0$ auf die Einheit, woraus sich $\frac{1}{2^{n+1}}$ als die Wahrscheinlichkeit der Unrichtigkeit einer bei der Einstimmigkeit der Geschworenen ausgesprochenen Verurtheilung ergibt. Nimmt man k nicht gleich $\frac{1}{2}$ und setzt $i=0$, so erhält man für dieselbe Wahrscheinlichkeit die Größe:

$$1-\zeta_i=\frac{1-k}{k.2^{n+1}-(2k-1)}=\frac{1}{2^{n+1}}\left[1-\frac{(2k-1)(2^{n+1}-1)}{k.2^{n+1}-(2k-1)}\right],$$

welche größer oder kleiner als $\frac{1}{2^{n+1}}$ ist, jenachdem k kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Wenn man in dem gewöhnlichen Falle, wo $n=12$ ist, successive $i=0$, $=1$, $=2$, $=3$, $=4$, $=5$ setzt; so gibt die Formel (15) die Brüche:

$$\frac{1}{8192},\ \frac{14}{8192},\ \frac{92}{8192},\ \frac{378}{8192},\ \frac{1093}{8192},\ \frac{2380}{8192}$$

für die Wahrscheinlichkeit der Unrichtigkeit der von 12 Geschworenen bei 11 Stimmen gegen 1, 10 gegen 2, 9 gegen 3, 8 gegen 4 und 7 gegen 5 ausgesprochene Verurtheilung. Bei der kleinsten Stimmenmehrheit ist die Wahrscheinlichkeit des Irrthumes fast $=\frac{2}{7}$, so daß bei einer sehr großen Anzahl von Angeklagten bei der Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5 es sehr wahrscheinlich ist, daß $\frac{2}{7}$ nicht hätten verurtheilt werden müssen, und bei der Stimmenmehrheit von 8 Stimmen gegen 4 beträgt diese Anzahl fast $\frac{1}{8}$ der Angeklagten.

Wendet man die Laplace'sche Hypothese auf die Formel (12) an,

---

*) Premier supplément à la Théorie analytique des probabilités, page 33.

bezeichnet mit δ eine positive Größe, welche den Werth $\frac{1}{2}$ nicht überschreitet und setzt $k=\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{2}$, $l'=\frac{1}{2}+\delta$, so erhält man:

$$\lambda_i=\frac{\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} u^{n-i}(1-u)^i du}{\int_0^1 u^{n-i}(1-u)^i du}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens der Geschworenen, welche nach der Voraussetzung nicht unter $\frac{1}{2}$ herabsinken kann, bei einer von $n-i$ gegen i Geschworene ausgesprochenen Verurtheilung zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}+\delta$ gelegen hat. Die Integrationen lassen sich ohne Schwierigkeit bewerkstelligen. In dem Falle von $i=0$ oder der Einstimmigkeit der Geschworenen hat man:

$$\lambda_i=\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^{n+1}.$$

Wenn man z. B. $n=12$ und $\delta=0{,}448$ nimmt, so findet man ungefähr $\lambda_i=\frac{1}{2}$, so dass man 1 gegen 1 wetten kann, dass die Wahrscheinlichkeit u zwischen den Grenzen 0,5 und 0,948 gelegen hat. Setzt man $\delta=\frac{1}{4}$ und i nicht $=0$; so hat man:

$$\lambda_i=\frac{1}{4^{n+1}}\Big[3^{n+1}-1+\frac{n+1}{1}(3^n-3)+\frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}(3^{n-1}-3^2)+\ldots$$
$$+\frac{n+1\,.\,n\ldots n-i+2}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i}(3^{n-i+1}-3^i)\Big]$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit u zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ näher, als der Einheit gelegen hat. Für $n=12$ und $i=5$ ist der Werth dieser Größe $=0{,}915\ldots$, so dass man etwas mehr als 10 gegen 1 wetten kann, dass diese Wahrscheinlichkeit u in dem Falle der kleinsten Stimmenmehrheit kleiner, als $\frac{3}{4}$ gewesen ist.

§. 133. Da die Formel (15) aus einer andern abgeleitet ist, worin die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens für alle Geschworene dieselbe war, so kann diese Größe nicht die jedem der n Geschworenen, welche über den Angeklagten geurtheilt haben, entsprechende Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens sein, obgleich Laplace dieses nicht bemerkt hat; sondern sie muss diese mittlere Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf die allgemeine Liste, woraus diese n Geschworenen zufällig genommen sind, ausdrücken (§. 122). Unter den auf dieser Liste verzeichneten Personen befinden sich ohne Zweifel welche, für die die Wahrschrinlich-

keit des Nichtirrens, wenigstens bei schwierigen Fällen, kleiner, als $\frac{1}{2}$ oder als die Wahrscheinlichkeit des Irrens ist.

Die Laplace'sche Voraussetzung fordert also, dass ihre Anzahl immer klein genug ist, damit die mittlere Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens kleiner bleibt als $\frac{1}{2}$. Ferner setzt dieser berühmte Geometer voraus, dass über $\frac{1}{2}$ die Werthe dieser mittleren Wrhrscheinlichkeit des Nichtirrens von $u = \frac{1}{2}$ bis $u = 1$ alle gleich wahrscheinlich sind. Der einzige Grund, welchen er für diese zweifache Voraussetzung angibt, besteht darin, dass das Urtheil des Geschworenen sich immer mehr zur Wahrheit, als zum Irrthume hinzuneigen strebe. Aber wenn man von diesem Prinzipe ausgeht, so kann man blos daraus den Schluss ziehen, dass die Function φu, durch welche wir das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Werthe der mittleren Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens der Geschworenen ausgedrückt haben, für die größern Werthe von u als $\frac{1}{2}$ einen größern Werth haben muss, als für die Werthe von u, welche kleiner sind, als $\frac{1}{2}$. Diese Bedingung kann aber auf unendlich viele verschiedene Arten erfüllt werden, ohne dass man $\varphi u = 0$ für $u < \frac{1}{2}$ und diese Function φu für $u > \frac{1}{2}$ als eine constante Größe zu betrachten braucht. Die eben untersuchte Hypothese ist also a priori nicht hinreichend motivirt und sie ist wegen der Folgerungen, welche sich daraus ergeben, wie man sogleich sehen wird, ganz unzulässig.

Denn da die Formel (15), welche eine von den nothwendigen Folgerungen aus dieser Hypothese ist, nichts enthält, was von der Fähigkeit der auf der allgemeinen Liste der Geschworenen verzeichneten Personen abhängt; so würde Jemand, welcher z. B. wüsste, dass zwei Verurtheilungen bei derselben Stimmenmehrheit und derselben Anzahl, aber aus zwei verschiedenen Listen genommener Geschworenen stattgefunden haben, denselben Grund für die Annahme der Unrichtigkeit dieser beiden Urtheile haben, obgleich er wüsste, dass die auf der ersten Liste verzeichneten Personen weit mehr Fähigkeit zur Beurtheilung der fraglichen Angelegenheit besitzen, als die auf der zweiten Liste angegebenen Personen, was jedoch durchaus nicht anzunehmen ist.

Wenn der Bruch $\frac{i}{n}$ kleiner, als $\frac{1}{2}$ und der Angeklagte bei der Mehrheit von $n - i$ Stimmen gegen i verurtheilt ist, so ist die Größe $\varphi\left(\frac{i}{n}\right) = 0$ oder unmerklich in der eben untersuchten Hypothese, so dass sich die Wahrscheinlichkeit ζ_i der Schuld des Angeklagten sehr der Einheit näherte, wenn die Zahl n sehr groß ist, und zwar, wie groß der Unterschied zwischen $n - i$ und i auch sein möchte (129). Wenn

z. B. das Geschworenengericht aus 1000 Geschworenen bestånde und der Angeklagte von 520 Geschworenen verurtheilt und von 480 freigesprochen wåre, so můsste man das Factum seiner Schuld als fast gewiss betrachten, obgleich es von 480 Geschworenen, fůr welche die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens nach der Voraussetzung dieselbe ist, als fůr die ůbrigen 520 Geschworenen, verneint ist. Schon diese Folgerung ist hinreichend, die Hypothese zu verwerfen, woraus sie abgeleitet ist; denn Niemand wůrde einem solchen Urtheile ein großes Zutrauen und besonders nicht dasselbe Zutrauen, als der fast bei der Einstimmigkeit von 1000 Geschworenen ausgesprochenen Entscheidung schenken. Wenn sich die Einsicht der auf der allgemeinen Liste der Geschworenen verzeichneten Personen åndert, wenn sie in einem Lande grőßer ist, als in einem andern, und wenn sie fůr die verschiedenen Arten der Verbrechen verschieden ist; so nimmt nach dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens der Geschworenen fůr die dieser letztern Wahrscheinlichkeiten, welche sich der Einheit am meisten nåhern und fůr die, welche am wenigsten von $\frac{1}{2}$ verschieden sind, in demselben Verhåltnisse zu, was aber durchaus nicht stattfindet. Wenn die Fåhigkeit der Geschworenen fůr eine richtige Beurtheilung aus irgend einer Ursache zunimmt, so erlangen die sich der Gewissheit am meisten nåhernden Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens der Geschworenen eine grőßere Wahrscheinlichkeit, als sie vorher hatten, und das Gegentheil findet fůr die statt, welche sich am weitesten von der Einheit entfernen. Wenn man fůr φu eine Function nimmt, welche diese Bedingungen erfůllen kann, und welche außerdem fůr die unter $u = \frac{1}{2}$ liegenden Werthe von u nicht absolut Null oder unmerklich ist; so kann man die eben erwåhnten Schwierigkeiten beseitigen, allein diese Bedingungen sind zur Bestimmung der Function φu unzureichend. Denn es gibt unendlich viele verschiedene Formen dieser continuirlichen oder discontinuirlichen Function, welche diesen Bedingungen genůgen; aber auf sehr verschiedene Werthe der durch die Formel (13) fůr dieselbe Anzahl n von Geschworenen und fůr denselben Unterschied zwischen den Zahlen $n - i$ und i ausgedrůckten Wahrscheinlichkeit ζ_i fůhren.

Man kann also, wenn man diese Zahlen bei einer einzelnen Verurtheilung kennt, und die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten vor der Entscheidung $k = \frac{1}{2}$ oder jedem andern Bruche gleich annimmt, wie bereits bemerkt worden, die wirkliche Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit dieses Urtheiles, welche von der Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens jedes einzelnen Geschworenen, und die uns vőllig unbekannt ist, abhångt, dennoch nicht bestimmen. Aber man muss es auch als eine Unmőglichkeit betrachten, diese Wahrscheinlichkeit fůr irgend eine Person

zu berechnen, welche blos weiß, dass die n Geschworenen zufällig aus der allgemeinen Liste genommen sind, und für welche der Grund zur Annahme der Richtigkeit des Urtheiles nur noch von der gemeinschaftlichen mittleren Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens der aus dieser Liste genommenen n Geschworenen abhängen würde (§. 122). Denn zu dieser Berechnung würde es erforderlich sein, in Beziehung auf das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Werthe der mittleren Wahrscheinlichkeit u von 0 bis 1 eine besondere Voraussetzung zu machen, welche weder die Laplacesche, noch irgend eine andere, einer hinreichenden Motivirung fähige würde sein können. Wenn also die auf dieser Liste genommenen Geschworenen nur ein einziges Urtheil gefällt hätten, so würden sich die vorhergehenden Formeln durchaus nicht anwenden lassen und dasselbe würde auch noch bei einer geringen Anzahl gefällter Urtheile der Fall sein. Allein wie wir wissen, sind durch die successive aus derselben allgemeinen Liste zufällig genommenen Geschworenen im Gegentheil sehr große Anzahlen von Verurtheilungen und Freisprechungen, deren Verhältnisse bekannt sind, ausgesprochen, und hierauf gründet sich, wie wir sogleich sehen werden, die Anwendung der Formeln (4), (5), (6), (7), (8), (9) und (10), welche nur zwei unbekannte Constanten k und u enthalten und folglich nur zwei Beobachtungsdata erfordern, mit deren Bestimmung wir uns zunächst beschäftigen wollen.

§. 134. Die allgemeine Liste der Bürger, welche Geschworene werden können, enthalte eine beliebige Anzahl von Namen, jedes Geschworenengericht bestehe aus n Geschworenen, welche ganz zufällig aus dieser allgemeinen Liste genommen sind, die Geschworenengerichte von einem oder mehrern Jahren sollen eine sehr große Anzahl μ verurtheilt oder freigesprochen haben und a_i sei die Anzahl, welche von diesen Angeklagten durch diese Geschworenengerichte bei der Stimmenmehrheit von wenigstens $n-i$ Stimmen gegen i verurtheilt sind, was voraussetzt, dass $i=0$, oder eine der kleineren Zahlen als $\frac{1}{2}n$ sei. Die Wahrscheinlichkeit einer Verurtheilung vor der Urtheilsfällung muss sich von einem Urtheile zum andern ändern; aber von welcher Beschaffenheit diese Veränderung auch sei, so ist das Mittel aus den unbekannten Werthen dieser Wahrscheinlichkeit, welche bei den μ ausgesprochenen Urtheilen stattfinden, doch höchst wahrscheinlich sehr nahe dem Verhältnisse $\frac{a_i}{\mu}$ gleich (§. 95). Die Werthe dieser mittleren Wahrscheinlichkeit und dieses Verhältnisses ändern sich ferner sehr wenig mit der als sehr groß vorausgesetzten Zahl μ, und wenn diese Zahl immer größer wird, so convergiren diese Werthe ohne Ende gegen einen bestimmten constanten Werth, welchen sie erreichen würden, wenn μ unendlich werden könnte,

und die verschiedenen Ursachen einer bei der in Rede stehenden Stimmenmehrheit ausgesprochenen Verurtheilung keine Veränderung erfahren hätten. Dieser besondere Werth, welchen wir mit R_i bezeichnen wollen, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, welche alle möglichen Ursachen dieser Verurtheilung oder des betrachteten Ereignisses seinem Stattfinden ertheilen, indem jede dieser Wahrscheinlichkeiten durch die resp. Wahrscheinlichkeiten dieser Ursachen multiplicirt wird (§. 104). Die Aufzählung und die Berechnung des Einflusses dieser Ursachen a priori würde unmöglich sein; allein wir brauchen auch diese Ursachen nicht zu kennen, sondern wir brauchen blos anzunehmen, dass sich weder ihre eigenen respectiven Wahrscheinlichkeiten, noch die Wahrscheinlichkeiten, welche sie den Verurtheilungen ertheilen, verändern, und die Beobachtung selbst lehrt uns, ob diese Voraussetzung der Wahrheit gemäß ist. Bezeichnet man in diesem Falle mit a'_i die Anzahl der Verurtheilungen bei der Stimmenmehrheit von wenigstens $n-i$ gegen i Stimmen, welche bei einer andern sehr großen Anzahl μ' von Angeklagten stattfinden, so ist die Differenz $\frac{a'_i}{\mu'}-\frac{a_i}{\mu}$ sehr wahrscheinlich ein sehr kleiner Bruch (§. 109), und wenn dieses nicht der Fall ist, so ist man zu der Annahme berechtigt, dass in dem Intervalle der beiden Urtheilsreihen irgend eine merkliche Veränderung in den Ursachen der Verurtheilungen stattgefunden hat. Der Calcul kann uns übrigens nur von dem Stattfinden dieser Veränderung benachrichtigen, ohne uns die Natur derselben kennen zu lehren.

Was wir in Beziehung auf die bei der Mehrheit von wenigstens $n-i$ Stimmen gegen i ausgesprochenen Urtheile gesagt haben, ist auch auf die gerade bei dieser Stimmenmehrheit ausgesprochenen Urtheile anwendbar. Wenn man die Anzahl dieser letzten Verurtheilungen bei μ Angeklagten mit b_i bezeichnet, so gibt es auch einen constanten Werth r_i, welchem sich das Verhältniss $\frac{b_i}{\mu}$ ohne Ende nähert, je größer μ wird und welchen es erreichen würde, wenn μ unendlich werden könnte, vorausgesetzt, dass die Ursachen der Verurtheilungen keine Veränderungen erfahren haben, und wenn b'_i diese Anzahl der Verurtheilungen für die Anzahl μ' der Angeklagten bezeichnet; so ist die Differenz $\frac{b'_i}{\mu'}-\frac{b_i}{\mu}$ sehr wahrscheinlich ein sehr kleiner Bruch. Es ist offenbar:

$$a_i=b_i+b_{i-1}+b_{i-2}+\ldots+b_0,$$
$$a'_i=b'_i+b'_{i-1}+b'_{i-2}+\ldots+b'_0$$
$$R_i=r_i+r_{i-1}+r_{i-2}+\ldots+r_0.$$

Alsdann wollen wir für α eine gegen $\sqrt{\mu}$ und gegen $\sqrt{\mu'}$ sehr kleine positive Größe nehmen und:

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\infty e^{-x^2}\, dx$$

setzen.

Nach den Formeln in §. 112 ist diese Größe P die gemeinschaftliche Wahrscheinlichkeit gewisser Grenzen der beiden Unbekannten R_i und r_i und der Differenzen $\frac{a'_i}{\mu'} - \frac{a_i}{\mu}$ und $\frac{b'_i}{\mu'} - \frac{b_i}{\mu}$, nämlich:

$$\frac{a_i}{\mu} \mp \alpha \sqrt{\frac{2\, a_i (\mu - a_i)}{\mu^3}} \qquad (a)$$

für die erste Unbekannte,

$$\frac{b_i}{\mu} \mp \alpha \sqrt{\frac{2\, b_i (\mu - b_i)}{\mu^3}} \qquad (b)$$

für die zweite Unbekannte;

$$\mp \alpha \sqrt{\frac{2\, a_i (\mu - a_i)}{\mu^3} + \frac{2\, a'_i (\mu' - a'_i)}{\mu'^3}} \qquad (c)$$

für die erste Differenz, und:

$$\mp \alpha \sqrt{\frac{2\, b_i (\mu - b_i)}{\mu^3} + \frac{2\, b'_i (\mu' - b'_i)}{\mu'^3}} \qquad (d)$$

für die zweite Differenz.

Unter übrigens gleichen Umständen nehmen die Amplituden dieser Grenzen, wenn die Zahlen μ und μ' immer größer werden, fast im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln dieser großen Zahlen ab, weil die Größen a_i und b_i fast wie die Zahl μ und die Größen a'_i und b'_i wie die Zahl μ' wachsen. Diese Grenzen sind auch um so enger, je kleiner die Größe α ist; aber ihre Wahrscheinlichkeit P nimmt mit α zu gleicher Zeit ab.

§. 135. Die Zahlendata, wovon wir Gebrauch machen wollen, sind aus den von der französischen Regierung publicirten Comptes généraux de l'Administration de la iustice criminelle genommen.

Von 1825 bis 1830 incl. sind die Anzahlen der jährlich vor die Geschworenengerichte gelangten Criminalprocesse für ganz Frankreich resp.:

$$5121,\ 5301,\ 5287,\ 5721,\ 5506,\ 5068$$

und die Zahlen der in diesen Criminalprocessen angeklagten Personen resp.:

$$6652,\ 6988,\ 6929,\ 7396,\ 7373,\ 6962$$

gewesen, welches jährlich ungefähr 7 Angeklagte für 5 Criminalprocesse gibt. Die Anzahl der bei der Stimmenmehrheit von wenigstens 7 Stimmen gegen 5 Verurtheilten ist in denselben Jahren resp.:

$$4037,\ 4348,\ 4136,\ 4551,\ 4475,\ 4130$$

gewesen, und folglich werden die Verhältnisse dieser letzten Zahlen zu den vorhergehenden ausgedrückt durch:

$$0{,}6068,\ 06222,\ 0{,}6113,\ 0{,}6153,\ 0{,}6069,\ 0{,}5932,$$

woraus schon erhellet, dass sich diese Verhältnisse innerhalb der 6 Jahre, während welcher die Criminalgesetzgebung ungeändert geblieben ist, sehr wenig geändert haben.

Für μ wollen wir die Summe der während dieser 6 Jahre Angeklagten und für a_5 die der Verurtheilten nehmen, so haben wir:

$$\mu = 42300,\ a_5 = 25777,$$

so dass sich die Grenzen (a) in:

$$0{,}6094 \mp \alpha(0{,}00335)$$

verwandeln, und wenn man z. B. $\alpha = 2$ setzt, so erhält man auch:

$$P = 0{,}9953$$

für die sich der Gewissheit sehr nähernde Wahrscheinlichkeit, dass die Unbekannte R_5 und der Bruch 0,6094 nur um 0,0067 von einander verschieden sind.

Wenn man die 6 erwähnten Jahre in zwei gleiche Perioden abtheilt, wovon die eine die drei ersten und die andere die drei letzten Jahre umfasst, so sind die Zahlen der Angeklagten resp.:

$$\mu = 20569,\ \mu' = 21731,$$

und die der Verurtheilten:

$$a_5 = 12621,\ a'_5 = 13156,$$

woraus folgt:

$$\frac{a_5}{\mu} = 0{,}6136\,,\quad \frac{a'_5}{\mu'} = 0{,}6054\,,\quad \frac{a_5}{\mu} - \frac{a'_5}{\mu'} = 0{,}0082.$$

Nun sind aber die Grenzen (c) dieser Differenz:

$$\mp\alpha(0{,}00671),$$

und wenn man $\alpha = 1{,}2$ setzt; so verwandeln sie sich in $\mp 0{,}00805$, und man hat:

$$P = 0{,}9103\,,\quad 1 - P = 0{,}0897.$$

Man könnte also fast 10 gegen 1 wetten, daß die Differenz der beiden Verhältnisse $\frac{a_5}{\mu}$ und $\frac{a'_5}{\mu'}$ zwischen die Grenzen $\mp 0{,}00305$ fällt, und obgleich die beobachtete Differenz $\mp 0{,}0082$, abgesehen vom Zeichen, wenig davon verschieden ist; so ist doch dieser Unterschied und die Wahrscheinlichkeit P seines Nichtstattfindens nicht beträchtlich genug, um zu der Annahme berechtigt zu sein, daß irgend eine merkliche Veränderung in den Ursachen der in Rede stehenden Erscheinung stattgefunden habe. Während des Jahres 1831 ist die Anzahl der vor die Geschworenengerichte gestellten Individuen auf 7606 und die der Verurtheilten auf 4098 gestiegen. Das Gesetz forderte damals zur Verurtheilung eine Stimmenmehrheit von wenigstens 8 gegen 4 Stimmen, und bei dieser Stimmenmehrheit hatte man folglich:

$$\mu = 7606\,,\quad a_4 = 4098\,,\quad \frac{a_4}{\mu} = 0{,}5388.$$

Wenn außer der erforderlichen Stimmenmehrheit die übrigen Ursachen, welche auf die Urtheile der Geschworenen Einfluß haben, in diesem Jahre dieselben geblieben sind, wie in dem vorhergehenden, so erhält man den Werth des Verhältnisses $\frac{b_5}{\mu}$, wenn man von dem Werthe von $\frac{a_5}{\mu}$ den Werth von $\frac{a_4}{\mu}$, d. h. 0,5388 von dem weiter oben gefundenen Bruche 0,6094 abzieht, welches:

$$\frac{b_5}{\mu} = 0{,}0706$$

gibt. Zum Beweise der Richtigkeit dieses Resultates wollen wir bemerken, daß von 1825 bis 1830 das Gesetz die Intervention der den Assisenhof bildenden Richter vorschrieb, so oft die Entscheidung des

Geschworenengerichtes bei der kleinsten Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5 stattgefunden hatte. Nun findet man aber in den Comptes généraux, dass während der 5 letzten dieser 6 Jahre diese Intervention fast gleichviel Male, nämlich:

$$398,\ 373,\ 373,\ 395,\ 372 \text{ mal},$$

oder im Ganzen 1911 mal stattgefunden hat; aber die Zahl der Angeklagten, worauf sich diese Processe beziehen, ist nicht angegeben. Es ist also die Anzahl der während derselben Jahre stattgehabten Criminalprocesse und nicht die Anzahl der angeklagten Personen, womit man diese gegebene Zahl 1911 vergleichen muss. Innerhalb des Zeitraumes dieser 5 Jahre hat die Gesammtzahl der Criminalprocesse 26883 betragen und es ist folglich zu gleicher Zeit:

$$\mu = 26883,\ b_5 = 1911$$

gewesen, woraus folgt:

$$\frac{b_5}{\mu} = 0{,}0711,$$

was von dem vorhergehenden Resultate sehr wenig verschieden ist.

Diese Uebereinstimmung zwischen den beiden Werthen von $\frac{b_5}{\mu}$ zeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten u und k, wovon dieses Verhältniss abhängt, in dem Jahre 1831 fast dieselben geblieben sind, als in den vorhergehenden Jahren. Man muss jedoch bemerken, dass sich die Berechnung des letzten Werthes auf die Voraussetzung gründet, dass die Anzahl der bei der Stimmenmehrheit von 7 gegen 5 Stimmen Verurtheilten zu der Gesammtzahl der Angeklagten sich wie die Anzahl der Entscheidungen, wobei diese Stimmenmehrheit stattfand, zu der Gesammtzahl der Processe verhält, welche Annahme sich in Ermangelung der nöthigen Data, welche man in den Comptes généraux nicht findet, nicht a priori rechtfertigen lässt.

In den Jahren 1832 und 1833 hat die Anzahl der Angeklagten nach Abzug der politischen Verbrechen resp. 7555 und 6964 betragen. Die zwischen ihnen stattfindende bedeutende Differenz rührt von einer neuen Einrichtung der Criminalgesetzgebung her, wornach im Jahre 1833 mehrere Arten von Verbrechen nicht vor die Assisenhöfe, sondern vor die Correctionspolizei gehörten. Die Anzahlen der, wie 1831, bei der Stimmenmehrheit von wenigstens 8 Stimmen gegen 4 Verurtheilten sind resp. gleich 4448 und 4105 gewesen, woraus sich für diese beiden Jahre:

$$\frac{a_4}{\mu}=0{,}5887\,,\ \frac{a_4}{\mu}=0{,}5895$$

ergibt. Diese Verhältnisse sind, wie man sieht, sehr wenig von einander verschieden; aber das Mittel aus denselben, nämlich 0,5888 übertrifft den Werth 0,5388 von $\frac{a_4}{\mu}$ für 1831 um 0,05, oder ungefähr um $\frac{1}{10}$ dieses Werthes, was nach den Grenzen (c) und ihrer Wahrscheinlichkeit P ganz unwahrscheinlich wäre, wenn in den Ursachen, welche auf die Stimmen der Geschworenen Einfluss haben können, keine Veränderungen stattgefunden hätten. Die Criminalgesetzgebung hat aber in der That eine solche Veränderung erfahren, weil seit 1832 die Geschworenengerichte auch Milderungsgründe berücksichtigen sollen, welche bei einem Verdammungsurtheile eine Verminderung der Strafe zur Folge haben, so dass auch die Verdammungsurtheile leichter und zahlreicher ausgesprochen werden.

§. 136. Die eben für ganz Frankreich berechneten verschiedenen Verhältnisse sind nicht für alle Theile dieses Landes dieselben; aber wenn man das Seinedepartement und einige andere Departements ausnimmt, so sind die Anzahlen der während einiger Jahre stattgehabten Criminalprocesse nicht groß genug, um daraus die constante Größe, gegen welche das Verhältniss der Zahl der Verurtheilten zu der der Angeklagten convergiren muss, für jeden Sprengel eines Assisenhofes mit einer genügenden Wahrscheinlichkeit ableiten zu können. Für den Pariser Assisenhof sind die Resultate folgende:

Von 1825 bis 1830 sind die Anzahlen der jährlich vor denselben gestellten Individuen resp.:

802, 824, 675, 868, 908, 804,

und die der Verurtheilten resp.:

567, 527, 436, 559, 604, 484

gewesen, und folglich ihre Verhältnisse:

0,7070, 0,6396, 0,6459, 0,6440, 0,6652, 0,6020.

Nimmt man für μ die Summe der 6 ersten und für a_5 die der 6 folgenden Zahlen, so hat man:

$$\mu=4881\,,\ a_5=3177\,,\ \frac{a_5}{\mu}=0{,}6509.$$

Nach den Zahlen 42300 und 25779 der Angeklagten und Verurtheilten während derselben Jahre und für ganz Frankreich haben wir

gefunden, dass dieses Verhältniss sehr wenig von dem Bruche 1,6094 verschieden sein muss, welcher um 0,0416 oder ungefähr um $\frac{1}{15}$ seines Werthes kleiner ist, als der vorhergehende. Nun machen aber die Grenzen (c) und ihre Wahrscheinlichkeit P eine solche Abweichung ganz unwahrscheinlich, wofern für das Seinedepartement nicht eine besondere Ursache stattgefunden hat, welche hier die Verurtheilungen leichter, als in dem übrigen Theile von Frankreich gemacht hat. Welches ist aber diese Ursache? Dieses kann uns die Rechnung nicht lehren. Jedoch wollen wir bemerken, dass in diesem Departement die Bevölkerung kaum $\frac{1}{36}$ der von ganz Frankreich beträgt und die Anzahl der Angeklagten größer ist, als $\frac{1}{9}$ der während desselben Zeitraumes für ganz Frankreich, so dass sie verhältnissmäßig 4 mal größer ist, welcher Umstand das Unterdrücken der Verbrechen nothwendiger macht und vielleicht bewirkt, dass die Geschworenen strenger sind.

Vermöge dieser Werthe von u und a_5 verwandeln sich die Grenzen (c) in:

$$0{,}6509 \mp \alpha\,(0{,}00965),$$

und wenn man $\alpha = 2$ nimmt, so erhält man:

$$P = 0{,}99532, \quad 1 - P = 0{,}00468,$$

d. h. man kann mehr, als 200 gegen 1 wetten, dass die Unbekannte R_5 nur um 0,0193 größer oder kleiner ist, als 0,6509.

Da das letzte der weiter oben angeführten 6 Verhältnisse, nämlich 0,6020 merklich kleiner ist, als das Mittel aus den 5 übrigen, so ist zu untersuchen, ob diese Differenz ein hinreichendes Indicium für das Vorhandensein irgend einer besondern Ursache ist, in Folge welcher die Geschworenen im Jahre 1830 weniger streng gewesen sind, als in den vorhergehenden Jahren. Nimmt man aber für μ und a_5 die Summen der seit 1825 bis 1829 in dem Seinedepartement Angeklagten und Verurtheilten und für μ' und a'_5 diese Zahlen für das Jahr 1830; so hat man:

$$\mu = 4077, \; a_5 = 2693, \; \mu' = 804, \; a'_5 = 484,$$

woraus folgt:

$$\frac{a_5}{\mu} = 0{,}6605, \; \frac{a'_5}{\mu'} = 0{,}6019, \; \frac{a_5}{\mu} - \frac{a'_5}{\mu'} = 0{,}0585,$$

und die Grenzen (c) werden zugleich:

$$\mp \alpha\,(0{,}02657),$$

so dass man, wenn man $\alpha = 2$ nimmt, mehr als **200** gegen **1** wetten kann, dass die Differenz der Verhältnisse $\frac{a_5}{\mu}$ und $\frac{a'_5}{\mu'}$ den Bruch **0,05314** nicht hat überschreiten können. Sie hat denselben aber ungefähr um $\frac{1}{10}$ seines Werthes überschritten, und man kann folglich annehmen, dass zu dieser Zeit in den Urtheilen der Geschworenen wirklich eine Anomalie stattgefunden hat und die Ursache dieser Anomalie, welche bewirkt hat, dass sie weniger streng gewesen sind, hat die Revolution von **1830** sein können. Diese Ursache, von welcher Beschaffenheit sie auch sein mag, scheint auf die Geschworenen von ganz Frankreich gewirkt zu haben; denn das Verhältniss der Anzahl der Verurtheilten zu der der Angeklagten ist im Jahre **1830** für ganz Frankreich fast auf **0,59** herabgesunken, während sein mittlerer Werth für die **5** vorhergehenden Jahre $=$ **0,61** gewesen war.

Von **1826** bis **1830** incl. hat die Anzahl der Criminalprocesse in dem Seinedepartement **2963** betragen und bei **194** dieser Processe wurde die Verurtheilung bei der kleinsten Stimmenmehrheit von **7** Stimmen gegen **5** ausgesprochen, so dass der Assisenhof dazwischen kommen musste. Nimmt man das Verhältniss von **194** zu **2963** für den Werth von $\frac{b_5}{\mu}$, so hat man folglich:

$$\frac{b_5}{\mu} = 0{,}0655,$$

welche Größe etwas kleiner ist, als der Werth desselben Verhältnisses für ganz Frankreich.

§. **137.** Wenn wir, wie es in den Comptes généraux geschehen ist, alle Arten von Verbrechen, womit sich die Assisenhöfe beschäftigt haben, besonders betrachten wollten; so würden die Zahlen der Angeklagten und Verurtheilten für jede Art von Verbrechen nicht groß genug sein, um constante Verhältnisse geben und unsern Rechnungen als Grundlage dienen zu können. In diesen Comptes généraux sind aber auch alle Criminalverbrechen in zwei Classen getheilt, wovon die eine die Verbrechen gegen Personen und die andere die Verbrechen gegen das Eigenthum enthält, und diese beiden großen Abtheilungen bieten jährlich sehr von einander verschiedene Verhältnisse dar; aber die Verhältnisse für jede Abtheilung insbesondere sind fast unveränderlich, und wir wollen diese Verhältnisse hier anführen.

Während der **6** Jahre von **1825** bis **1830** ist die Anzahl der jährlich wegen Verbrechen gegen Personen Angeklagten für ganz Frankreich resp.:

1897, 1907, 1911, 1844, 1791, 1666

gewesen, und die Anzahl der wegen Verbrechen gegen das Eigenthum Angeklagten resp.:

4755, 5081, 5018, 5552, 5582, 5296.

Die zugehörigen Anzahlen der unter derselben Criminalgesetzgebung Verurtheilten sind für die Verbrechen der ersten Art resp.:

882, 967, 948, 871, 834, 766

und für Verbrechen der zweiten Art resp.:

3155, 3381, 3288, 3680, 3641, 3364

gewesen. Hieraus ergeben sich für die Verhältnisse der Zahlen der Verurtheilten zu den der Angeklagten bei Verbrechen gegen Personen die Werthe:

0,4649, 0,5071, 0,4961, 0,4723, 0,4657, 0,4598,

und für die Verhältnisse der Zahlen der Verurtheilten zu den der Angeklagten bei Verbrechen gegen das Eigenthum die Werthe:

0,6635, 0,6654, 0,6552, 0,6628, 0,6523, 0,6352,

woraus man sieht, dass sich die Verhältnisse beider Reihen jährlich nicht viel geändert haben, aber dass die Verhältnisse der letzten Reihe die der ersten merklich übertreffen.

Nehmen wir für μ und a_5 die Summen der Zahlen der Angeklagten und Verurtheilten bei Verbrechen gegen Personen und für μ' und a'_5 diese Summen bei Verbrechen gegen das Eigenthum; so haben wir:

$$\mu = 11016,\ a_5 = 5268,\ \mu' = 31284,\ a'_5 = 20509,$$

woraus sich die beiden Verhältnisse:

$$\frac{a_5}{\mu} = 0{,}4782,\quad \frac{a'_5}{\mu'} = 0{,}6556$$

ergeben, wovon das zweite das erste um etwas mehr, als $\frac{1}{3}$ des Werthes dieses letztern übertrifft. Vermittelst dieser Zahlen findet man in Beziehung auf Verbrechen gegen Personen für die Grenzen (a) der Unbekannten R_5 die Werthe:

$$0{,}4782 \mp \alpha(0{,}00675)$$

und in Beziehung auf Verbrechen gegen das Eigenthum:

$$0{,}6556 \mp \alpha(0{,}00380).$$

Nimmt man $\alpha = 2$, so nähert sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Unbekannte R_5 in dem ersten Falle von dem Bruche 0,4782 nicht um mehr, als 0,0135 und im zweiten Falle von dem Bruche 0,6556 nicht um mehr, als 0,0076 verschieden ist, sehr der Gewissheit.

Wenn man in Beziehung auf das Jahr 1831, worin die Verurtheilungen bei einer Stimmenmehrheit von wenigstens 8 Stimmen gegen 4 ausgesprochen wurden, für μ und a_4 die Anzahlen der wegen Verbrechen gegen Personen Angeklagten und Verurtheilten und für μ' und a'_4 die Anzahlen der wegen Verbrechen gegen das Eigenthum Angeklagten und Verurtheilten nimmt; so hat man:

$$\mu = 2046,\ a_4 = 743,\ \mu' = 5560,\ a'_4 = 3355,$$

woraus folgt:

$$\frac{a_4}{\mu} = 0,3631,\ \frac{a'_4}{\mu'} = 0,6034,$$

und wenn man diese beiden Verhältnisse von den vorhergehenden abzieht; so erhält man:

$$\frac{b_5}{\mu} = 0,1151,\ \frac{b'_5}{\mu'} = 0,0522$$

für die Verhältnisse der Anzahl der bei der kleinsten Stimmenmehrheit von 7 gegen 5 für beide Arten von Verbrechen Verurtheilten zu der Anzahl der Angeklagten. Es ist merkwürdig, dass das Verhältniss $\frac{b_5}{\mu}$ in Beziehung auf die Verbrechen gegen Personen fast doppelt so groß ist, als das Verhältniss $\frac{b'_5}{\mu'}$ in Beziehung auf die Verbrechen gegen das Eigenthum, während im Gegentheil das Verhältniss $\frac{a'_5}{\mu'}$ in Beziehung auf diese letzten Verbrechen ungefähr um $\frac{1}{3}$ größer ist, als das Verhältniss $\frac{a_5}{\mu}$ in Beziehung auf die ersten. Es haben also bei den Verbrechen gegen das Eigenthum nicht blos verhältnißmäßig mehr Verurtheilungen stattgefunden, als bei den Verbrechen gegen Personen, sondern diese Verurtheilungen sind auch bei größeren Stimmenmehrheiten auszusprechen.

Die betrachteten Verhältnisse sind auch für beide Geschlechter nicht dieselben. Die Anzahl der jährlich vor die Assisenhöfe gestellten Frauenspersonen beträgt ungefähr $\frac{18}{100}$ der Gesammtzahl der Angeklagten von beiden Geschlechtern. Wenn man die Anzahlen der in den 5 Jahren von

1826 bis 1830 incl. wegen Verbrechen gegen Personen und wegen Verbrechen gegen das Eigenthum angeklagten Frauenspersonen mit μ und μ' und die Anzahlen der von ihnen Verurtheilten mit a_5 und a'_5 bezeichnet; so hat man:

$$\mu = 1305,\ \mu' = 5465,\ a_5 = 586,\ a'_5 = 3312,$$

woraus folgt:

$$\frac{a_5}{\mu} = 0{,}4490,\ \frac{a'_5}{\mu'} = 0{,}6061,$$

und wenn man diese Verhältnisse mit den vorhergehenden Werthen von $\frac{a_5}{\mu}$ und $\frac{a'_5}{\mu'}$ vergleicht, so sieht man, dass sie kleiner sind, als diese Werthe; aber blos um ungefähr $\frac{1}{16}$ oder $\frac{1}{12}$ derselben.

Für die Jahre 1832 und 1833, während welcher die Verurtheilungen bei der Stimmenmehrheit von wenigstens 8 Stimmen gegen 4 und unter Berücksichtigung der Milderungsgründe ausgesprochen sind, hat man für die Anzahlen der Angeklagten und Verurtheilten beider Geschlechter:

$$\mu = 4108,\ \mu' = 10421,\ a_4 = 1889,\ a'_4 = 6664,$$

und folglich:

$$\frac{a_4}{\mu} = 0{,}4598,\ \frac{a'_4}{\mu'} = 0{,}6395,$$

wo die accentuirten Buchstaben, wie weiter oben, den Verbrechen gegen das Eigenthum, und die nicht accentuirten den Verbrechen gegen Personen entsprechen. Wenn man in dem Ausdrucke der Grenzen (a) die Größe $\alpha = 2$ nimmt, so findet man, dass sich die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Unbekannte R_5 bei Verbrechen der zweiten oder ersten Art resp. nicht um mehr, als 0,022 oder 0,0133 von dem Bruche 0,4598 oder 0,6395 entfernt, sehr der Gewissheit nähert. Bemerken kann man auch, dass die Werthe von $\frac{a_4}{\mu}$ und $\frac{a'_4}{\mu'}$ fast dasselbe Verhältniss zu einander behalten haben, als die weiter oben gefundenen Werthe von $\frac{a_5}{\mu}$ und $\frac{a'_5}{\mu'}$. Vergleicht man diese Größen $\frac{a_4}{\mu}$ und $\frac{a'_4}{\mu'}$ mit den ähnlichen für 1831, so findet man auch, dass durch den Einfluss der Milderungsgründe das Verhältniss $\frac{a'_4}{\mu'}$ für Verbrechen gegen das Eigenthum nur um $\frac{1}{15}$;

aber das Verhältniss $\frac{a_4}{\mu}$ für Verbrechen gegen Personen fast um $\frac{1}{3}$ seines Werthes größer geworden ist.

§. 138. Nun ist aber nach dem, was wir in §. 122 gesehen haben, die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte durch ein, zufällig aus der allgemeinen Liste eines Departements oder des Bezirkes eines Assisenhofes genommenes Geschworenengericht verurtheilt wird, dieselbe, als wenn die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für alle Mitglieder des Geschworenengerichtes gleich wäre. Bei der Stimmenmehrheit von wenigstens $n-i$ Stimmen gegen i wird die Wahrscheinlichkeit der Verurtheilung folglich durch die erste der Formeln (6) und bei der Stimmenmehrheit von $n-i$ Stimmen gegen i Stimmen durch die Formel (4) ausgedrückt. Für jedes Departement und für jede Art der Criminalverbrechen sind also die durch diese Formeln ausgedrückten Größen c_i und γ_i diejenigen, deren Verhältnisse sich den Verhältnissen $\frac{a_i}{\mu}$ und $\frac{b_i}{\mu}$ ohne Ende und desto mehr nähern, je mehr die schon als sehr groß vorausgesetzte Zahl μ noch zunimmt, oder mit andern Worten, die Größen c_i und γ_i stimmen mit den Unbekannten R_i und r_i (§. 134) überein, wenn man Criminalprocesse derselben Art in demselben Departement betrachtet, und auch selbst dann, wenn man jedes Geschlecht der Angeklagten besonders betrachtet. Wir wollen alle Arten von Criminalverbrechen, wie weiter oben, in zwei Klassen abtheilen, wovon die eine die Verbrechen gegen Personen und die andere die Verbrechen gegen das Eigenthum enthält. Um aber die Rechnungen nicht zu complicirt zu machen, wollen wir das Geschlecht der Angeklagten, dessen Einfluss auf das Verhältniss der Verurtheilungen unberücksichtigt bleiben kann, wenn man erwägt, dass von der Gesammtzahl der Angeklagten die Anzahl der Frauenspersonen nur $\frac{1}{5}$ von der der Mannspersonen beträgt, nicht in Betracht ziehen. Wenn die Buchstaben μ, a_i, b_i, c_i, γ_i den Verbrechen der ersten Art entsprechen, und dieselben accentuirten Buchstaben die analogen Größen für die Verbrechen der zweiten Art bezeichnen; so ist für jedes Departement besonders und mit desto größerer Annäherung und Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{a_i}{\mu}=c_i, \quad \frac{b_i}{\mu}=\gamma_i, \quad \frac{a'_i}{\mu'}=c'_i, \quad \frac{b'_i}{\mu'}=\gamma'_i, \qquad (16)$$

je größer die Zahlen μ und μ' sind.

Wenn die Verhältnisse, welche die ersten Theile dieser Gleichungen bilden, für die verschiedenen Departements gegeben wären, so wä-

ren diese 4 Gleichungen zur Bestimmung der in c_i und γ_i vorkommenden Unbekannten k und u und der ähnlichen in c'_i und γ'_i vorkommenden Unbekannten, welche wir mit k' und u' bezeichnen wollen, hinreichend; allein da die Zahlen μ und μ' sehr groß sein müssen, so lassen sich die Gleichungen (16) bis jetzt nicht auf jedes einzelne Departement anwenden, und um sich ihrer bedienen zu können, muss man annehmen, dass die Unbekannten u, u', k, k' sich im Allgemeinen von einem Departement zum andern nicht sehr ändern, so dass man in ihren ersten Theilen die Verhältnisse für ganz Frankreich anwenden kann. Die Größen u und u', welche auf diese Weise bestimmt werden, drücken die Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens der Geschworenen aus, welche stattfinden würden, wenn die Listen der Geschworenen aller Departements zu einer einzigen vereinigt würden und man jeden Geschworenen aus dieser Totalliste zufällig nähme. Auch in dieser Voraussetzung können die Größen k und k', weil sie von der Geschicklichkeit der mit der Leitung der Voruntersuchung beauftragten Personen abhängen, für die verschiedenen Departements nicht dieselben sein. Da aber die Gleichungen (16) in Beziehung auf diese Unbekannten vom ersten Grade sind, so würden die daraus abgeleiteten Werthe derselben die mittleren Werthe aus denen sein, welche wirklich für alle Departements stattfinden. Uebrigens muss man bemerken, dass, wenn man sich mit diesen allgemeinen Werthen von u, u', k, k' begnügen muss, der Grund davon nur in dem Mangel vollständiger Beobachtungsdata und nicht in irgend einer Unvollkommenheit unserer Theorie liegt.

Die Ausdrücke für c_i und γ_i werden nicht geändert, wenn man darin $1-k$ und $1-u$ für k und u setzt (§. 117 und §. 118). Wenn es also für gegebene Werthe von $\frac{a_i}{\mu}$ und $\frac{b_i}{\mu}$ ein Paar von Werthen von k und u gibt, welche größer sind als $\frac{1}{2}$ und den beiden ersten Gleichungen (16) Genüge leisten; so gibt es auch ein Paar von Werthen von k und u, welche kleiner als $\frac{1}{2}$ sind und ebenfalls diesen Gleichungen Genüge leisten. Nun muss man aber annehmen, dass die mittlere Wahrscheinlichkeit der Schuld der Angeklagten vor der Urtheilsfällung größer ist, als die ihrer Unschuld, und dass die mittlere Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens der Geschworenen größer ist, als die ihres Irrens. Es sind also die Werthe von k und u, welche größer sind als $\frac{1}{2}$, und welche man anwenden muss, während die übrigen zu verwerfen sind. Dieselbe Bemerkung gilt auch in Beziehung auf die beiden letzten Gleichungen (16) und auf die sich daraus ergebenden

Werthe von k' und u'. Wenn man jedoch diese Gleichungen auf die während der unglücklichen Zeiten der Revolution in großer Anzahl stattgehabten Entscheidungen über politische Verbrechen anwenden wollte; so könnte man auch die kleinern Wurzeln als $\frac{1}{2}$ derselben gebrauchen; denn alsdann könnte die legale Unschuld der Angeklagten vor der Urtheilsfällung wahrscheinlicher sein, als ihre Schuld, und die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Geschworenen absichtlich irrten, könnte größer sein, als die Wahrscheinlichkeit ihres Nichtirrens.

§. 139. Wir wollen in den Formeln (4) und (6) $n=12$ und $i=5$ annehmen, so haben die darin vorkommenden Coefficienten folgende Werthe:

$$N_0=1,\ N_1=12,\ N_2=66,\ N_3=220,\ N_4=495,\ N_5=792.$$

Wenn wir ferner:

$$\frac{a_5}{\mu}=c,\ \frac{b_5}{\mu}=792\,.\,\gamma,\ u=\frac{t}{1+t},\ 1-u=\frac{1}{1+t}$$

setzen; so verwandelt sich die zweite Gleichung (16) in:

$$\gamma=\frac{(t^2+1)\,t^5}{2\,(1+t)^{12}}+\frac{(2\,k-1)\,(t^2-1)\,t^5}{2\,(1+t)^{12}}, \qquad (17)$$

und wenn man bemerkt, dass:

$$U_5=1-924\,.\,u^6\,(1-u)^6-V_5$$

ist; so kann die erste der Gleichungen (16) auf folgende Form gebracht werden:

$$c=k\left[1-\frac{924\,.\,t^6}{(1+t)^{12}}\right]$$

$$-\frac{(2\,k-1)}{(1+t)^{12}}\left[1+12\,.\,t+66\,.\,t^2+220\,.\,t^3+495\,.\,t^4+792\,t^5\right]. \quad (18)$$

Die Gleichungen (17) und (18) entsprechen den Verbrechen gegen Personen und die den Verbrechen gegen das Eigenthum entsprechenden ergeben sich daraus, wenn man die Größen c, γ, k, t in die analogen Größen, welche wir mit c', γ', k', t' bezeichnen wollen, verwandelt.

Die Unbekannte t kann alle Werthe von $t=0$, welcher $u=0$ entspricht, bis $t=\infty$, welcher $u=1$ entspricht, bekommen. Da aber ihre größern Werthe, als die Einheit sich auf größere Werthe von u, als $\frac{1}{2}$ beziehen; so sind blos diese in Betracht zu ziehen. Da

ferner die Unbekannte k zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen muss, so folgt aus der Gleichung (17), dass der Werth von t so beschaffen sein muss, dass:

$$\frac{(1+t^2)t^5}{2(1+t)^{12}} < \gamma,\ \frac{t^7}{(1+t)^{12}} > \gamma$$

ist; welches zur Bestimmung der Grenzen desselben dient. Man kann in dieser Beziehung bemerken, dass die erste dieser beiden Functionen von t von $t=0$ bis $t=\infty$ fortwährend abnimmt, und dass die zweite zuerst von $t=1$ bis $t=\frac{7}{5}$ zu- und dann bis $t=\infty$ abnimmt.

Wenn man k zwischen den Gleichungen (17) und (18) eliminirte, so käme man auf eine Gleichung des 24sten Grades in Beziehung auf t, welche zu der Gattung der reciproken Gleichungen gehörte, und sich folglich auf eine Gleichung des 12ten Grades zurückführen ließe. Allein es ist weit leichter, die Werthe von k und u, welche dem Systeme der Gleichungen (17) und (18) zu gleicher Zeit genügen, direct durch successive Versuche zu berechnen.

§. 140. Für die 6 Jahre von 1825 bis 1830 hat man:

$$c=0{,}4782,\ \gamma=\frac{0{,}1151}{792}=0{,}0001453.$$

Für $t=2$ wäre die Größe $\frac{(1+t^2)^5}{2(1+t)^{12}}$ größer, als dieser Werth von γ, und für $t=3$ wäre dieser Werth größer, als die andere Größe $\frac{t^7}{(1+t)^{12}}$. Der Werth von t muss also größer sein als 2 und kleiner als 3, und man kann sich leicht überzeugen, dass diese Unbekannte innerhalb dieser Grenzen nur einen einzigen möglichen Werth hat. Nach einigen Versuchen haben wir diesen Werth $=2{,}112$ angenommen, worauf die Gleichung (17) alsdann den Werth von $k=0{,}5354$ gibt, und wenn man diese Werthe in den zweiten Theil der Gleichung (18) substituirt; so findet man denselben $=0{,}4783$, was von dem ersten Theile nur um 0,0001 verschieden ist. Man hat also mit einer sehr großen Annäherung:

$$k=0{,}5354,\ t=2{,}112.$$

Für dieselben Jahre hat man:

$$c'=0{,}6556,\ \gamma'=\frac{0{,}0523}{792}=0{,}00006604.$$

Substituirt man diese Werthe für c und γ in die Gleichungen (17)

und (18) und setzt zugleich t' und k' für t und k; so erhält man, wenn man sie wie im vorhergehenden Falle auflöst, mit demselben Grade von Annäherung:

$$k' = 0{,}6744,\ t' = 3{,}4865.$$

Aus diesen Werthen von t und t' ergibt sich:

$$u = \frac{t}{1+t} = 0{,}6786,\ u' = \frac{t'}{1+t'} = 0{,}7771$$

für die Wahrscheinlichkeiten, daß sich während der betrachteten Jahre irgend ein Geschworener bei seinen Entscheidungen über Verbrechen gegen Personen und bei Verbrechen gegen das Eigenthum nicht irret.

Vor der Urtheilsfällung würde eine Person, welche weder die Geschworenen, woraus das Geschworenengericht besteht, noch den Ort, wo das Urtheil gefällt wird, kännte, zu dieser Zeit etwas mehr, als 2 gegen 1 wetten können, daß sich jeder Geschworene bei einem Verbrechen der ersten Art nicht irret, und fast 7 gegen 2, daß er sich bei einem Verbrechen der zweiten Art nicht irret. Wir bedienen uns hier des gewöhnlichen Ausdruckes wetten, um die Bedeutung der Werthe von u und u' begreiflicher zu machen, obgleich die angenommene Wette nur illusorisch ist, weil sich niemals würde entscheiden lassen, wer gewonnen hätte. Diese Person würde auch nach den vorhergehenden Werthen von k und k' etwas weniger, als 7 gegen 6 haben wetten können, daß der Angeklagte bei der ersten Art der Verbrechen schuldig ist, und etwas mehr, als 2 gegen 1, daß er bei der zweiten Art der Verbrechen schuldig ist. Weiter unten werden wir sehen, wie groß die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten nach dem ausgesprochenen Urtheile ist.

Wenn wir die Anzahlen der Angeklagten und Verurtheilten ohne Unterscheidung der Art der Verbrechen gegen Personen und gegen das Eigenthum betrachten, so müssen wir für dieselben Jahre und für ganz Frankreich wieder:

$$c = 0{,}6094,\ \gamma = \frac{0{,}0706}{792} = 0{,}00008914$$

nehmen. Lösen wir alsdann die Gleichungen (17) und (18) auf, so finden wir:

$$k = 0{,}6391,\ t = 2{,}99,\ u = 0{,}7494.$$

Wenn man das Seinedepartement allein betrachtete, so würden die Werthe von c und γ, welche man anwenden müßte, folgende:

$$c = 0{,}6509,\ \gamma = \frac{0{,}0655}{792} = 0{,}00008267\ (\S.\,136),$$

und man fände:

$$k = 0{,}678,\ t = 3{,}168,\ u = 0{,}7778.$$

Zu der betrachteten Zeit, abgesehen von der Art der Verbrechen, waren folglich die Wahrscheinlichkeiten k und u für den Bezirk des Pariser Assisenhofes etwas größer, als für den übrigen Theil von Frankreich. Für das Seinedepartement waren sie etwas größer als $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, während sie für ganz Frankreich etwas kleiner waren, als diese Brüche. Da jedoch die Unterschiede zwischen den beiden Werthen von k und denen von u nicht beträchtlich sind, so kann man annehmen, daß dieses auch für zwei beliebige andere Theile von Frankreich der Fall ist, wodurch die Voraussetzung der Gleichheit jeder dieser beiden Größen für ganz Frankreich, welche wir gemacht haben, um ihre genäherten Werthe nach hinreichend großen Anzahlen von Beobachtungen berechnen zu können, möglichst bestätigt wird. Die Werthe von k und u oder von k' und u' sind, wie bereits oben bemerkt ist, für das Jahr 1831 dieselben geblieben; aber sie haben sich in den folgenden Jahren mit den Verhältnissen, woraus sie sich ergeben, ändern müssen, und da wir die Verhältnisse $\frac{a_4}{\mu}$ oder $\frac{a'_4}{\mu'}$ nur für die Jahre 1832 und 1833 kennen; so ist dieses Datum nicht zur Bestimmung der beiden Unbekannten u und k oder u' und k' hinreichend. Uebrigens wollen wir bemerken, daß sich diese Größen vielleicht ein zweites Mal geändert haben und nicht mehr dieselben sind, seitdem das letzte Gesetz publicirt ist, wornach die Milderungsgründe berücksichtigt und das Urtheil jedes Geschworenen versiegelt übergeben werden soll, welches auf die Wahrscheinlichkeit ihres Nichtirrens Einfluß gehabt haben kann. Aber nach diesem Gesetze, welches eine kleinste Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5 fordert, sollen auch die Geschworenen angeben, ob ihre Entscheidung bei der kleinsten Stimmenmehrheit stattgefunden hat. Wenn also in Zukunft in den Comptes généraux die Anzahlen der Verurtheilten und nicht blos die der Fälle, wobei diese kleinste Stimmenmehrheit stattfand, angegeben werden, wenn man ferner dieselben Zahlen für die Angeklagten der beiden Geschlechter einzeln und für die beiden Klassen der Verbrechen angibt; so wird es in einigen Jahren möglich sein, die beiden Elemente k und u für die verschiedenen Theile von Frankreich, für die männlichen und weiblichen Individuen, und endlich für die Verbrechen gegen Personen und gegen das Eigenthum mit einer großen Genauigkeit zu bestimmen.

§. **141.** Die Formeln (4), (5) und (6) geben für jedes Paar von Werthen von u und k die correspondirenden Wahrscheinlichkeiten, dass eine Verurtheilung oder Freisprechung bei einer gegebenen Stimmenmehrheit, oder bei einer Stimmenmehrheit, welche dieser wenigstens gleich ist, stattgehabt hat.

Setzt man $n = 12$ und $i = 0$, so erhält man:

$$\gamma_0 = k u^{12} + (1-k)(1-u)^{12},$$
$$\delta_0 = (1-k) u^{12} + k(1-u)^{12}$$

für die Wahrscheinlichkeiten, dass die Verurtheilung oder Freisprechung eines Angeklagten bei der Einstimmigkeit der Geschworenen stattgefunden hat, und folglich ist:

$$\gamma_0 + \delta_0 = u^{12} + (1-u)^{12}$$

die Wahrscheinlichkeit eines verdammenden oder freisprechenden, einstimmigen Urtheiles der Geschworenen. Ferner ist:

$$\gamma_0 - \delta_0 = (2k-1)\left[u^{12} - (1-u)^{12}\right]$$

eine positive Größe, weil $k > \frac{1}{2}$ und $u > 1 - u$ ist, so dass die Einstimmigkeit der Geschworenen in dem Falle einer Freisprechung weniger wahrscheinlich ist, als in dem Falle einer Verurtheilung. Man sieht, dass diese verschiedenen Wahrscheinlichkeiten sehr gering sind, sobald die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens der Geschworenen merklich von 0 und von 1 verschieden ist. Nimmt man z. B. die Werthe von u und k, welche sich ohne Unterscheidung der Art der Verbrechen auf ganz Frankreich beziehen, d. h. setzt man $k = 0{,}6391$ und $u = 0{,}7494$; so ergibt sich:

$$\gamma_0 = 0{,}0201, \ \delta_0 = 0{,}0113, \ \gamma_0 + \delta_0 = 0{,}0314,$$

woraus schon zur Genüge hervorgeht, wie selten eine einstimmige Entscheidung von 12 Geschworenen sein muss. Wenn das Urtheil der Geschworenen, sei es verdammend oder freisprechend, bei der Einstimmigkeit ausgesprochen sein müsste, so könnte man nach dem Werthe von $\gamma_0 + \delta_0$ fast 32 gegen 1 wetten, dass kein solches Urtheil zu Stande kommt, und dieses würde 32 mal unter ungefähr 33 Fällen stattfinden, wenn die Geschworenen nicht unter einander verhandelten und dahin übereinkämen, bei einer einfachen Stimmenmehrheit stehen zu bleiben.

Wenn man die Wahrscheinlichkeit, dass von μ Urtheilen gar keins bei der Einstimmigkeit der Geschworenen ausgesprochen ist, oder ausgesprochen werden wird, mit M bezeichnet; so hat man:

$$M = (1 - \gamma_0 - \delta_0)^\mu,$$

und wenn $M = \frac{1}{2}$ sein soll, so muss man:

$$\mu = \frac{-\log 2}{\log(1 - \gamma_0 - \delta_0)} = 21{,}73$$

haben, indem man wieder den vorhergehenden Werth von $\gamma_0 + \delta_0$ anwendet. Man könnte also nur in 22 Fällen etwas mehr, als 1 gegen 1 wetten, dass ein Urtheil wenigstens bei der Einstimmigkeit der Geschworenen ausgesprochen wird, und es würde nachtheilig sein, diese Wette einzugehen, wenn die Anzahl der Criminalprocesse um eine Einheit kleiner wäre.

§. **142.** Ehe wir weiter gehen, müssen wir erinnern, was man unter dem Ausdrucke schuldig bei den Urtheilen der Geschworenen verstehen muss und zugleich einige wichtige Folgerungen daraus ableiten.

Wenn ein Geschworener ausspricht, dass ein Angeklagter schuldig sei, so behauptet er, dass nach seiner Meinung hinreichende Beweise vorhanden sind, um den Angeklagten zu verurtheilen, und wenn er sagt, dass der Angeklagte nicht schuldig ist; so versteht er darunter, dass die Wahrscheinlichkeit der Schuld nicht groß genug ist zur Verurtheilung; aber seine verneinende Stimme soll nicht sagen, dass er den Angeklagten für unschuldig hält, und es geschieht ohne Zweifel öfterer, dass er denselben vielmehr für schuldig hält. Er kann die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte schuldig sei, größer als $\frac{1}{2}$ annehmen, welche aber dessenungeachtet kleiner ist, als die, welche seine Gewissenhaftigkeit und die öffentliche Sicherheit zur Verurtheilung des Angeklagten fordern. Der wahre Sinn der bejahenden oder verneinenden Stimme eines Geschworenen ist also der, dass der Angeklagte verurtheilbar ist, oder nicht. Die Wahrscheinlichkeiten P_i und Q_i für die Richtigkeit eines Verdammungs- oder Freisprechungsurtheiles (§. 120) drücken folglich auch den Grund aus, welchen wir zu der Annahme haben, dass der Angeklagte verurtheilbar war, wenn er verurtheilt ist, und dass er nicht verurtheilbar war, wenn er freigesprochen ist. P_i ist ohne Zweifel kleiner, als die wirkliche Wahrscheinlichkeit der Schuld eines Verurtheilten und Q_i dagegen größer, als die Wahrscheinlichkeit der Unschuld eines freigesprochenen Angeklagten; aber diese andern Wahrscheinlichkeiten würden sich auf keine andere Weise durch den Calcul bestimmen lassen, welcher nur auf die Wahrscheinlichkeiten P_i und Q_i anwendbar ist, wenn sie sich auf eine sehr große Anzahl von Urtheilen derselben Art beziehen. Auch muss man nicht glauben, dass diese Größen P_i und Q_i die allgemeine Meinung ausdrücken, so dass sie die Wahrscheinlichkeiten einer

Verurtheilung oder Freisprechung durch ein Geschworenengericht, welches aus allen Bürgern besteht, die auf der allgemeinen Liste, woraus die Geschworenen zufällig zu je **12** genommen werden, verzeichnet sind, ausdrückten; denn die Wahrscheinlichkeit c_i einer Verurtheilung durch ein aus einer beliebigen Anzahl von Personen bestehendes Geschworenengericht ist kleiner, als der mit k bezeichnete Bruch (§. **118**), welcher im Allgemeinen weit kleiner als der Werth von P_i ist, und ebenso ist die Wahrscheinlichkeit d_i einer Freisprechung immer kleiner, als der Bruch $1-k$, welcher selbst weit kleiner ist, als der Werth von Q_i.

Für die Geschworenen des Sprengels jedes Assisenhofes und für jede der beiden Arten von Verbrechen, welche wir unterschieden haben, muss man also annehmen, dass es eine gewisse Wahrscheinlichkeit z gebe, welche zur Verurtheilung für hinreichend und erforderlich gehalten wird. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit u, dass sich ein zufällig auf der Liste dieses Departements genommener Geschworener in seinem Urtheile nicht irret, nichts anders, als die Wahrscheinlichkeit, dass er die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten als gleich z oder für größer als z annimmt, wenn sie es wirklich ist, oder vielmehr für kleiner als z, wenn sie in der That diese Grenze nicht erreicht. Diese Wahrscheinlichkeit u hängt hauptsächlich von dem Grade der Einsicht der auf der allgemeinen Liste der Geschworenen verzeichneten Personen ab, und die Wahrscheinlichkeit z von ihrer Meinung hinsichtlich der Nothwendigkeit der Unterdrückung der verschiedenen Arten von Verbrechen. Diese beiden verschiedenen Wahrscheinlichkeiten können sich also mit der Zeit und von einem Departement zum andern ändern. Wir haben gesehen, wie der Werth von u aus den Daten der Beobachtung abgeleitet werden kann; aber zur Bestimmung des Werthes von z fehlen uns die Mittel, und wir können blos schließen, dass derselbe unter übrigens gleichen Umständen zu- oder abnimmt, wenn wir das Verhältniss der Anzahl der Verurtheilten zu der der Angeklagten merklich ab- oder zunehmen sehen. Wenn wir z. B. sehen, dass dieses Verhältniss durch Einführung der Berücksichtigung der Milderungsgründe von **0,54** auf **0,59** gestiegen ist (§. **135**); so müssen wir daraus schließen, dass die Geschworenen schon bei einer geringern Wahrscheinlichkeit z, als früher ein Verdammungsurtheil ausgesprochen haben, weil die Strafe durch die Berücksichtigung der Milderungsgründe gelinder ausfällt.

Vor der Urtheilsfällung ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte schuldig ist, ohne Zweifel weit größer, als die, welche wir mit k bezeichnet haben; ihr größter Werth, welchen wir für k gefunden

haben, ist ungefähr $=\frac{3}{4}$ und dessenungeachtet würde Niemand abgeneigt sein, weit mehr, als 3 gegen 1 zu wetten, dass irgend eine Person wirklich schuldig ist, wenn sie vor einen Assisenhof gestellt wird. Aber das in Beziehung auf P_i Gesagte ist ebenfalls auf k anwendbar, und man muss auch hier darunter verstehen, dass k blos die Wahrscheinlichkeit vor dem Urtheile ausdrückt, dass der Angeklagte verurtheilbar ist, welche Wahrscheinlichkeit folglich von der abhängen kann, welche die Geschworenen zur Verurtheilung für erforderlich halten; aber welche ihrer Natur nach von der Wahrscheinlichkeit u, dass sich ein Geschworener nicht irret, unabhängig ist. Hieraus folgt also, dass sich der Werth von k mit der Wahrscheinlichkeit x ändern kann, selbst wenn die Art der Voruntersuchung und die Geschicklichkeit der damit beauftragten Richter dieselben geblieben sind, und welchen Werth überdies die Wahrscheinlichkeit u auch haben mag. Ein Beispiel dieser Veränderung ist folgendes.

Von 1814 bis 1830 wurden in Belgien die Criminalprocesse durch Tribunale entschieden, welche aus 5 Richtern bestanden, und es war zur Verurtheilung eine Mehrheit von 3 Stimmen gegen 2 hinreichend. Im Jahre 1830 wurde die Einrichtung dieser Tribunale verändert und im Laufe des Jahres 1831 wurden die unter der französischen Herrschaft stattgehabten Geschworenengerichte wieder eingeführt, bei welchen zu einer Verurtheilung eine Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5 genügt, und die Art der Voruntersuchung ist immer dieselbe geblieben. Nun folgt aber aus den neuerlich von der belgischen Regierung herausgegebenen Comptes de l'Administration de la iustice criminelle, dass in den Jahren 1832, 1833 und 1834 die Verhältnisse der Zahlen der Verurtheilten zu denen der Angeklagten resp. $\frac{59}{100}$, $\frac{60}{100}$ und $\frac{61}{100}$ gewesen sind, woraus man sieht, dass sie sich von einem Jahre zum andern sehr wenig geändert haben, und dass ihr mittlerer Werth fast dem gleich ist, welcher vor 1830 in Frankreich stattfand. Da in diesen Comptes etc. nicht angegeben ist, wie vielmal die Verurtheilungen bei der kleinsten Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5, noch wie vielmal sie bei irgend einer bestimmten Stimmenmehrheit stattgefunden haben; so ist das eben angeführte Verhältniss zur Bestimmung der sich auf Belgien beziehenden Werthe von u und k nicht hinreichend. Aber da das Totalverhältniss, d. h. das Verhältniss, welches wir mit $\frac{a_5}{\mu}$ bezeichnet haben, für Belgien und für ganz Frankreich so wenig verschieden ist, so kann man annehmen, dass das Partialverhältniss $\frac{b_5}{\mu}$ für diese beiden Länder ebenfalls sehr wenig

verschieden ist, und folglich sind die Werthe von u und k für beide fast dieselben. Man kann also annehmen, dass sich der Werth von k für Belgien nicht weit von dem Bruche $\frac{64}{100}$, welchen wir früher für ganz Frankreich und ohne Unterscheidung der Art der Verbrechen gefunden haben, entfernt. Nun findet man in denselben Comptes etc., dass in den Jahren 1826, 1827, 1828 und 1829 die Verhältnisse der Anzahl der Verurtheilten zu der der Angeklaglen resp. $\frac{84}{100}$, $\frac{85}{100}$, $\frac{83}{100}$ und $\frac{81}{100}$ gewesen sind, welche Brüche fast einander gleich sind, und deren mittlerer Werth etwas größer als $\frac{83}{100}$ ist. Aber nach dem, was wir in §. 118 gesehen haben, muss die Wahrscheinlichkeit, wovon dieses Mittel ein Näherungswerth ist, immer kleiner sein, als der Werth von k, und folglich hat in den zuletzt genannten 4 Jahren die Größe k weit größer sein müssen, als in den Jahren 1832 und 1833, was man nur einer Ungleichheit der unbekannten Größe z zu diesen beiden Zeiten zuschreiben kann, und welche so beschaffen gewesen ist, dass die Geschworenen zur Verurtheilung des Angeklagten eine größere Wahrscheinlichkeit seiner Schuld gefordert haben, als die, welche von den Richtern für genügend gehalten ist. Dieser Schluss ist übrigens von der Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens, welche zu diesen beiden Zeiten hat verschieden sein können, d. h. größer oder kleiner für die Richter als für die Geschworenen, unabhängig, was sich in Ermangelung der nöthigen Data der Beobachtung auch nicht entscheiden lässt.

Da die Größe k von der Wahrscheinlichkeit z abhängig ist, so folgt, dass die Ungleichheit ihrer Werthe für die beiden betrachteten Arten der Verbrechen in zwei verschiedenen Umständen ihren Grund haben kann, nämlich entweder darin, dass sich die Präsumtion der Schuld des Angeklagten vor der Urtheilsfällung in Beziehung auf Verbrechen gegen Personen schwerer erhalten lässt, als in Beziehung auf Verbrechen gegen das Eigenthum, oder vielmehr darin, dass die Geschworenen im ersten Falle zur Verurtheilung eine größere Wahrscheinlichkeit z fordern, als im zweiten, und es sind selbst Gründe zu der Annahme vorhanden, dass diese beiden verschiedenen Ursachen vereint die in Rede stehende Ungleichheit bewirken.

Aus dieser gegenseitigen Abhängigkeit zwischen den Größen z und k folgt, dass, wenn durch die Berücksichtigung der Milderungsgründe für die Jahre 1832 und 1833 eine merkliche Abnahme der Wahrscheinlichkeit, welche die Geschworenen zur Verurtheilung für hinreichend halten, bewirkt ist, die Wahrscheinlichkeit k im Gegentheil hat zunehmen müssen, und diese entgegengesetzten Veränderungen von u und k haben auch eine Vergrößerung des Werthes von u hervorbringen müssen; denn man kann annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für die

Geschworenen kleiner wird, wenn sie einer Seits eine geringere Wahrscheinlichkeit zur Verurtheilung fordern, und wenn anderer Seits vor der Urtheilsfällung eine größere Wahrscheinlichkeit vorhanden ist, dass der Angeklagte verurtheilbar ist.

§. **143.** Wir haben nun vermittelst der Formeln (9) und (10) und der für u und k oder für u' und k' gefundenen Paare von Werthen noch die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, dass ein Verurtheilter schuldig und ein Freigesprochener unschuldig war, oder genauer zu reden, die Wahrscheinlichkeiten, dass der erste verurtheilbar und der zweite es nicht war. Aber zuvor müssen wir diese Formeln in andere verwandeln, welche für die Rechnung bequemer sind, und zugleich werden wir noch andere Formeln hinzufügen, deren Zahlenwerthe ebenfalls von hoher Wichtigkeit sind.

Vermöge der ersten der Gleichungen (6) kann die Formel (9) durch die Gleichung:

$$P_i c_i = k U_i$$

ersetzt werden, worin man das durch die Beobachtung gegebene Verhältniss $\frac{a_i}{\mu}$ für den Näherungswerth von c_i nimmt.

Die Größe $1 - P_i$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bei der Stimmenmehrheit von wenigstens $n-i$ Stimmen gegen i Verurtheilter unschuldig ist; c_i ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte, er sei schuldig oder nicht, bei dieser Stimmenmehrheit verurtheilt ist, und das Product aus c_i und $1 - P_i$ drückt folglich die Wahrscheinlichkeit aus, dass ein Angeklagter, wenn er auch unschuldig ist, dennoch verurtheilt wird. Bezeichnet man sie mit D_i und berücksichtigt die vorhergehende Gleichung, sowie die erste der Gleichungen (6), so erhält man folglich:

$$D_i = (1-k) V_i,$$

welches Resultat sich auch aus den Betrachtungen ergibt, welche in §. **120** zur Bestimmung des Ausdruckes von P_i angestellt sind.

Wenn die Anzahl der zur Verurtheilung erforderlichen Stimmen wenigstens $n-i$ beträgt, so sei Π_i die Wahrscheinlichkeit, dass ein freigesprochener Angeklagter unschuldig ist. Ihr Werth ergibt sich aus dem von Q_i oder aus der Formel (10), wenn man darin $n-i-1$ statt i setzt, und wenn man die zweite der Gleichungen (6) berücksichtigt; so ergibt sich:

$$\Pi_i d_{n-i-1} = (1-k) U_{n-i-1},$$

oder was nach §. 118 dasselbe ist:

$$\Pi_i(1-c_i)=(1-k)(1-V_i).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein freigesprochener Angeklagter schuldig ist, ist $=1-\Pi_i$, und da die Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Angeklagter nicht verurtheilt wird, $=1-c_i$ ist; so folgt, daß das Product $(1-\Pi_i)(1-c_i)$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß ein schuldiger Angeklagter dennoch freigesprochen wird. Bezeichnet man sie mit Δ_i, so hat man folglich:

$$\Delta_i=1-c_i-(1-k)(1-V_i),$$

oder vermöge der ersten der Gleichungen (6):

$$\Delta_i=k(1-U_i).$$

Die Wahrscheinlichkeiten D_i und Δ_i sind so zu sagen das Maß der Gefahr, welcher der Angeklagte und die bürgerliche Gesellschaft ausgesetzt wird, daß ein nicht verurtheilbarer Angeklagter dennoch verurtheilt und ein verurtheilbarer Angeklagter freigesprochen wird. Hinsichtlich der wirklichen Schuld oder Unschuld der Angeklagten muß man nicht aus dem Auge verlieren, daß D_i nur, wie P_i, eine obere Grenze und Δ_i, wie Q_i, nur eine untere Grenze ist. Wenn die Werthe von P_i und Π_i berechnet sind, so ergeben sich daraus die von D_i und Δ_i unmittelbar; denn vermöge der vorhergehenden Gleichungen hat man:

$$D_i=1-k-\Pi_i(1-c_i),\quad \Delta_i=k-P_i c_i,$$

woraus erhellet, daß die Wahrscheinlichkeiten Δ_i und D_i resp. immer kleiner sind, als die Wahrscheinlichkeiten k und $1-k$ der Schuld und der Unschuld des Angeklagten vor der Entscheidung. Da für eine sehr große Anzahl μ von Angeklagten die Anzahlen der Verurtheilungen und Freisprechungen nach der Beobachtung resp. a_i und $\mu-a_i$ sind, so sind die Anzahlen der unschuldig Verurtheilten und der freigesprochenen Schuldigen sehr nahe und höchst wahrscheinlich den Producten $D_i a_i$ und $\Delta_i(\mu-a_i)$ gleich.

Setzt man $n=12$ und successive $i=5$ und $i=4$, nimmt $\frac{a_5}{\mu}$ und $\frac{a_4}{\mu}$ für die Näherungswerthe von c_5 und c_4 und setzt, wie im Vorhergehenden, $\frac{t}{1+t}$ und $\frac{1}{1+t}$ statt u und $1-u$; so ergibt sich aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$\frac{a_5}{\mu} P_5 =$$

$$k\left[1 - \frac{1+12.t+66.t^2+220.t^3+495.t^4+792.t^5+924.t^6}{(1+t)^{12}}\right]$$

$$\frac{a_4}{\mu} P_4 =$$

$$k\left[1 - \frac{1+12.t+66.t^2+220.t^3+495.t^4+792.t^5+924.t^6+792.t^7}{(1+t)^{12}}\right]$$

$$\left(1 - \frac{a_5}{\mu}\right) \Pi_5 =$$

$$(1-k)\left[1 - \frac{1+12.t+66.t^2+220.t^3+495.t^4+792.t^5}{(1+t)^{12}}\right]$$

$$\left(1 - \frac{a_4}{\mu}\right) \Pi_4 =$$

$$(1-k)\left[1 - \frac{1+12.t+66.t^2+220.t^3+495.t^4}{(1+t)^{12}}\right].$$

Zu gleicher Zeit hat man:

$$D_5 = 1 - k - \left(1 - \frac{a_5}{\mu}\right)\Pi_5, \ \Delta_5 = k - \frac{a_5}{\mu} P_5,$$

$$D_4 = 1 - k - \left(1 - \frac{a_4}{\mu}\right)\Pi_4, \ \Delta_4 = k - \frac{a_4}{\mu} P_4.$$

Dieses sind also die verschiedenen Formeln, deren Zahlenwerthe zu bestimmen sind. Die darin vorkommenden Größen beziehen sich auf Verbrechen gegen Personen, und dieselben accentuirten Buchstaben bezeichnen die sich auf Verbrechen gegen das Eigenthum beziehenden analogen Größen.

§. 144. Während des Jahres 1831 betrug die zur Verurtheilung erforderliche Stimmenmehrheit wenigstens 8 Stimmen gegen 4 und die Berücksichtigung der Milderungsgründe fand nicht statt. Es war:

$$\frac{a_4}{\mu} = 0{,}3632, \ t = 2{,}112, \ k = 0{,}5354,$$

woraus sich ergibt:

$$P_4 = 0{,}9811, \ \Pi_4 = 0{,}7186, \ D_4 = 0{,}00689, \ \Delta_4 = 0{,}1791.$$

Von den 743 in diesem Jahre Verurtheilten hätten nach diesem Werthe von D_4 ungefähr 5 nicht verurtheilt werden sollen, und von den 1303

Freigesprochenen hätten nach dem Werthe von Δ_4 ungefähr **233** nicht freigesprochen werden sollen. Die Wahrscheinlichkeit der Verurtheilung eines Angeklagten, obgleich er nicht verurtheilbar war, war sehr wenig größer, als $\frac{1}{150}$ und die Wahrscheinlichkeit seiner Freisprechung, obgleich er verurtheilbar war, lag zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$. Endlich war die Wahrscheinlichkeit der Schuld eines Verurtheilten nur um $\frac{1}{50}$ von der Gewissheit verschieden, und die Wahrscheinlichkeit der Unschuld eines freigesprochenen Angeklagten, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass ihm die Schuld nicht in einem hinreichenden Grade nachgewiesen war, war nicht viel größer als der Bruch $\frac{2}{3}$.

Diese Resultate beziehen sich auf Verbrechen gegen Personen. In Beziehung auf die Verbrechen gegen das Eigenthum war in demselben Jahre:

$$\frac{a'_4}{\mu'} = 0{,}6034,\ t' = 3{,}4865,\ k' = 0{,}6744,$$

woraus folgt:

$$P'_4 = 0{,}9981,\ \Pi'_4 = 0{,}8199,\ D'_4 = 0{,}0004,\ \Delta'_4 = 0{,}0721.$$

Bei dieser Art von Verbrechen betrug also die verhältnissmäßige Anzahl der Verurtheilten, welche nicht hätten verurtheilt werden müssen, nur $\frac{4}{1000}$, d. h. von den **3355** Verurtheilten beträgt die Anzahl derer, welche nicht hätten müssen verurtheilt werden, noch nicht **2**. Die verhältnissmäßige Anzahl der freigesprochenen Individuen, welche verurtheilbar waren, ist größer gewesen als $\frac{7}{100}$ und es hätten also von den **2205** Freigesprochenen ungefähr **159** müssen verurtheilt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Verurtheilter schuldig war, ist nur um $\frac{2}{1000}$ von der Gewissheit verschieden, und die Wahrscheinlichkeit der Unschuld eines Freigesprochenen war etwas größer, als der Bruch $\frac{4}{5}$. Diese Resultate sind, wie man sieht, entsprechender als die sich auf Verbrechen gegen Personen beziehenden, was darin seinen Grund hat, dass die Verurtheilungen bei Verbrechen gegen das Eigenthum, obgleich sie verhältnissmäßig zahlreicher gewesen sind, auch sehr wahrscheinlich bei größern Stimmenmehrheiten stattgefunden haben (§. **141**).

Die acht Wahrscheinlichkeiten P_4, P'_4, *etc.*, welche wir eben berechnet haben, gründen sich auf die aus der Beobachtung abgeleiteten Verhältnisse $\frac{a_4}{\mu}$, $\frac{a'_4}{\mu'}$, $\frac{b_4}{\mu}$, $\frac{b'_4}{\mu'}$, und welche uns im Vorhergehenden zur Bestimmung der Werthe von t, t', k, k' gedient haben. Sie sind alle acht echte Brüche, was eine um so merkwürdigere Bestätigung der

Theorie liefert, da dieses im Allgemeinen nicht mehr der Fall sein würde, wenn man für t und k, t' und k' willkürliche Werthe annähme, selbst wenn diese nicht sehr von den aus der Erfahrung abgeleiteten verschieden wären. In den Jahren vor 1831 betrug die zur Verurtheilung erforderliche kleinste Stimmenmehrheit 7 Stimmen gegen 5; aber in dem Falle der kleinsten Stimmenmehrheit kam der Assisenhof dazwischen und die Verurtheilung war nur dann definitiv, wenn sich die Mehrheit der 5 Richter, woraus der Assisenhof damals bestand, an die Mehrheit der Geschworenen anschloss. Es müssen daher die bei der kleinsten Stimmenmehrheit und die bei den Stimmenmehrheiten von wenigstens 8 Stimmen gegen 4 ausgesprochenen Verurtheilungen besonders betrachtet werden. Für die letztern sind die Zahlenwerthe der Wahrscheinlichkeiten P_4 und P'_4, Π_4 und Π'_4, D_4 und D'_4, Δ_4 und Δ'_4 die eben berechneten, weil die Werthe von t und k, t' und k' in den Jahren vor 1831 dieselben waren, als in diesem Jahre (§. 137). Von 1825 bis 1830 betrug die Anzahl der bei dieser Stimmenmehrheit von wenigstens 8 Stimmen gegen 4 wegen Verbrechen gegen Personen Verurtheilten ungefähr 5000 und die Anzahl der wegen Verbrechen gegen das Eigenthum Verurtheilten fast 20000. Nach den vorhergehenden Werthen von D_4 und D'_4 waren also von der ersten Art der Verbrechen ungefähr 35 und von der andern 8 nicht verurtheilbar, was ohne Zweifel beiweitem zu viel wäre, wenn hiermit gesagt wäre, dass sie wirklich unschuldig wären.

In Beziehung auf die bei der kleinsten Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5 ausgesprochenen Verurtheilungen hat man für die Wahrscheinlichkeit, dass der Verurtheilte schuldig war:

$$p_5 = \frac{kt^2}{kt^2 + 1 - k},$$

wenn man in der Formel (7)

$$n = 12,\ i = 5,\ u = \frac{t}{1+t},\ 1 - u = \frac{1}{1+t}$$

setzt. In Beziehung auf Verbrechen gegen Personen hat man, wie weiter oben:

$$t = 2{,}112,\ k = 0{,}5354,$$

und hieraus ergibt sich:

$$p_5 = 0{,}8372.$$

Für Verbrechen gegen das Eigenthum verwandelt man p_5, k, t in p'_5, k', t' und setzt, wie vorhin:

$$t' = 3,4865,\ k' = 0,6744,$$

welches

$$p'_5 = 0,9618$$

gibt. Wenn man endlich die beiden Arten von Verbrechen ohne Unterscheidung und für ganz Frankreich betrachtet, so muss man $k = 0,6391$ und $t = 2,99$ nehmen (§. 140), und wenn man den correspondirenden Werth von p_5 oder die Wahrscheinlichkeit, dass der Verurtheilte schuldig ist, mit ϖ_5 bezeichnet; so hat man:

$$\varpi_5 = 0,9406.$$

Wenn man diese Werthe von p_5, p'_5, ϖ_5 von der Einheit abzieht, so erhält man sehr nahe $\frac{16}{100}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{6}{100}$ für die Wahrscheinlichkeit des Irrthumes eines Geschworenengerichtes in den drei eben betrachteten Fällen. Nach der Laplaceschen Formel (§. 132) wäre diese Wahrscheinlichkeit in diesen drei Fällen dieselbe und gleich 0,29, d. h. fast doppelt so groß, als der Werth von $1 - p_5$, und das Fünffache des Werthes von $1 - \varpi_5$. In dem folgenden §. werden wir sehen, worauf sich diese Wahrscheinlichkeit $1 - \varpi_5$ der Unschuld des Angeklagten reducirt, wenn das Verdammungsurtheil der Geschworenen durch den Assisenhof bei der Stimmenmehrheit von wenigstens 3 Stimmen gegen 2 bestätigt wird.

Wenn man zur Berechnung der Werthe von k und u, oder von k' und u' für die gegenwärtige Zeit hinreichende Beobachtungsdata hat, so ergeben sich daraus, wie bereits oben (§. 140) bemerkt worden, durch eine der vorhergehenden ähnliche Rechnung, die correspondirenden Wahrscheinlichkeiten P_5, Π_5, D_5, Δ_5, oder P'_5, Π'_5, D'_5, Δ'_5, und vergleicht man sie mit den Wahrscheinlichkeiten P_4, Π_4, D_4, Δ_4, oder P'_4, Π'_4, D'_4, Δ'_4, welche wir für die Epoche vor 1831 gefunden haben; so kann man z. B. mit völliger Zuverlässigkeit die relativen Vortheile der Criminalgesetzgebung zu diesen beiden Zeiten in Beziehung auf die öffentliche Sicherheit und auf die Garantie, welche man den Angeklagten schuldig ist, kennen lernen.

Wenn die Data der Beobachtung dieselben bleiben, so wird denselben nach der Bemerkung in §. 138 durch zwei verschiedene Werthepaare von k und u oder von k' und u', d. h. für Werthe dieser Größen, wovon die einen größer und die andern kleiner als $\frac{1}{2}$ oder die Ergänzungen der ersten zur Einheit sind, Genüge geleistet. Wir haben z. B. für das Jahr 1831 und für Verbrechen gegen das Eigenthum

$$k' = 0,6744,\ u' = 0,7771$$

gefunden, und wenn wir die Beobachtungsdata anwenden, wovon wir Gebrauch gemacht haben, so können wir daraus ebenfalls auch

$$k' = 1 - 0{,}6744 = 0{,}3256 , \; u' = 1 - 0{,}7771 = 0{,}2229$$

ableiten; und wenn sich der Werth von u' in $1-u'$ verwandelt, so verwandelt sich der von t' gleichzeitig in $\frac{1}{t'}$; man hat also auch:

$$t' = \frac{1}{3{,}4865} = 0{,}2868,$$

und wenn man wieder, wie weiter oben

$$\frac{a'_4}{\mu'} = 0{,}6034$$

nimmt; so findet man:

$$P'_4 = 0{,}000675,$$

so daß die Verurtheilung die Wahrscheinlichkeit, daß der Angeklagte schuldig ist, statt zu vergrößern, im Gegentheil vermindeet und fast auf Null reducirt hätte. Allein nach dem bereits citirten §. müssen diese Werthe der Unbekannten k und u oder k' und u', welche kleiner sind, als die der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten und von der Rechnung auch gegeben werden müssen, damit sie auch den Fall mit umfaßt, wo in einer sehr großen Anzahl außergewöhnlicher Entscheidungen die gesetzliche Schuld der Verurtheilten weniger wahrscheinlich ist, als ihre Unschuld, im Allgemeinen verworfen werden.

§. 145. Wenn wir in der ersten der Formeln (6)

$$n = 5 , \; i = 2 , \; u = \frac{t}{1+t}, \; 1 - u = \frac{1}{1+t}$$

setzen, so erhalten wir:

$$c_2 = k - \frac{(2k-1)(1+5t+10t^2)}{(1+t)^5}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Angeklagter durch ein aus 5 Richtern bestehendes Tribunal bei einer Mehrheit von wenigstens 3 Stimmen gegen 2 verurtheilt wird, wo k wieder die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten vor der Urtheilsfällung und u die Wahrscheinlichkeit, daß sich jeder der Richter nicht irret, bezeichnet. Nach der Formel (9) haben wir zu gleicher Zeit zur Bestimmung der Wahrschein=

lichkeit P_2 der Schuld des Angeklagten, nachdem er verurtheilt ist, die Gleichung:

$$c_2 P_2 = k\left[1 - \frac{1+5t+10t^2}{(1+t)^5}\right],$$

oder wegen der vorhergehenden Gleichung:

$$(2k-1)c_2 P_2 = k(k-1+c_2).$$

Bei der Anwendung dieser Gleichungen auf den Fall, wo der Angeklagte bereits durch ein Geschworenengericht bei der kleinsten Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5 verurtheilt ist und dann vor den Assisenhof gestellt wird, wie solches vor dem Jahre 1831 der Fall war, nimmt man für k die aus der Entscheidung des Geschworenengerichtes resultirende Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten. Der genäherte und sehr wahrscheinliche Werth von c_2 ergibt sich aus der Beobachtung und ist dem Quotienten aus der von dem Assisenhofe in einer sehr großen Anzahl von Criminalprocessen ausgesprochenen Verdammungsurtheile und dieser sehr großen Zahl der Criminalprocesse gleich. Nun ergibt sich aber aus den Comptes généraux, daß während der 5 Jahre von 1826 bis 1830, nachdem die Geschworenengerichte bei der Stimmenmehrheit von 7 Stimmen gegen 5 in 1911 Fällen ein Verdammungsurtheil ausgesprochen hatten, diese Verdammungsurtheile von den Assisenhöfen 1597 mal bestätigt wurden. Aber diese Comptes généraux geben nicht an, wie viel Verbrechen gegen Personen und wie viel gegen das Eigenthum sich unter den 1911 und 1597 Fällen befinden. Wir sind also genöthigt, die Wahrscheinlichkeit P_2 und die Unbekannte t ohne Unterscheidung dieser beiden Arten von Verbrechen zu bestimmen. Zu dem Zwecke nehmen wir:

$$c_2 = \frac{1597}{1911} = 0{,}8357$$

und für k den Werth von ϖ_5 im vorhergehenden §., nämlich:

$$k = 0{,}9406,$$

welche Größe, wie es auch der Fall sein muß (§. 118), das Verhältniß c_2 der Verurtheilungen übersteigt.

Vermittelst dieser Werthe findet man:

$$P_2 = 0{,}9916$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Angeklagter schuldig war, wenn er successive durch das Geschworenengericht bei der kleinsten Stimmenmehr=

heit von 7 Stimmen gegen 5 und durch die Richter des Assisenhofes bei einer Mehrheit von wenigstens 3 Stimmen gegen 2 verurtheilt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass er unschuldig ist, ist folglich sehr wenig von $\frac{1}{100}$ verschieden, so dass von den 1597 Verurtheilten sehr wahrscheinlich ungefähr 15 nicht verurtheilbar waren.

Dieselben Werthe von k und c_2 geben:

$$\frac{k-c_2}{2k-1}=0{,}1188,$$

wornach sich die zur Bestimmung der Unbekannten t dienende Gleichung in

$$1+5t+10t^2=(0{,}1188)(1+t)^5$$

verwandelt. Aus derselben ergibt sich:

$$t=2{,}789,\ u=0{,}7361,$$

welches zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens der Richter sehr wenig von der weiter oben (§. 140) für die Geschworenen ohne Unterscheidung der Art der Verbrechen gefundenen $=0{,}7494$ verschieden ist.

§. 146. Die Formeln, wovon wir eben verschiedene Anwendungen auf die Entscheidungen in Criminalprocessen gemacht haben, sind ebenfalls auf alle in sehr großer Anzahl stattgehabte Entscheidungen anderer Arten, z. B. auf die Entscheidungen der Correctionspolizei und auf die der Militärjustiz anwendbar. Um sie aber anwenden zu können, muss man für jede Art der Entscheidungen die zur Bestimmung der in diesen Formeln vorkommenden Elemente erforderlichen Beobachtungsdata kennen.

Die Comptes généraux de l'Administration de la iustice criminelle enthalten auch die Resultate der Correctionspolizei. Während der 9 Jahre von 1825 bis 1833 hat die Anzahl der in ganz Frankreich vor die Correctionspolizei gestellten Individuen 1710174 betragen, wovon 1464500 verurtheilt sind, so dass das Verhältniss der Anzahl der Verurtheilten zu der der Angeklagten $=0{,}8563$ ist. Dieses Verhältniss hat sich nicht merklich von einem Jahre zum andern geändert und es hat immer zwischen 0,84 und 0,87 gelegen. Die Anzahl der Richter in den Tribunalen der Correctionspolizei ist verschieden, und sie muss wenigstens $=3$ sein, was auch gewöhnlich der Fall ist. Es ist alsdann zur Verurtheilung eine Mehrheit von 2 Stimmen gegen eine hinreichend, und man erhält folglich die Wahrscheinlichkeit c_1, dass ein Angeklagter von der Correctionspolizei verurtheilt wird, wenn man in der

ersten der Gleichungen (6) $n=3$, $i=1$ und zugleich $\frac{t}{1+t}$ für u setzt, welches

$$c_1 = \frac{k(t^3+3t^2)+(1-k)(3t+1)}{(1+t)^3}$$

gibt. Für den genäherten und sehr wahrscheinlichen Werth von c_1, welchen die Beobachtung gibt, nehmen wir das Verhältniß 0,8563; allein dieses Datum ist zur Bestimmung der beiden Unbekannten k und t nicht zureichend, sondern man müßte auch wissen, wie viele von den 1464500 ausgesprochenen Verurtheilungen bei der Einstimmigkeit und wie viele bei der einfachen Stimmenmehrheit von 2 Stimmen gegen eine stattgehabt haben, was aber die Comptes généraux nicht angeben. Wenn man annimmt, daß die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für die Richter der Correctionspolizei $=\frac{3}{4}$ ist, wie es im Allgemeinen für die Geschworenen der Fall ist, und man setzt in der vorhergehenden Gleichung $c_1=0{,}8563$, $t=3$; so ergibt sich für k ein größerer Werth, als die Einheit, und folglich ist diese Annahme unzulässig. Man hat Grund, anzunehmen, daß diese Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für die Richter größer ist, als für die Geschworenen, ohne daß wir jedoch angeben können, um wie viel die erstere größer ist, als die zweite, weil es an den nöthigen Beobachtungsdaten fehlt.

Die Kriegscollegien bestehen aus 7 Richtern, und es ist zur Verurtheilung wenigstens eine Stimmenmehrheit von 5 gegen 2 gesetzlich erforderlich. Die Wahrscheinlichkeit c_2, daß ein Angeklagter verurtheilt wird, ergibt sich folglich aus der ersten der Gleichungen (6), wenn man darin $n=7$, $i=2$ und zugleich $\frac{t}{1+t}$ für u setzt, nämlich:

$$c_2 = \frac{k(t^7+7t^6+21t^5)+(1-k)(1+7t+21t^2)}{(1+t)^7}.$$

In den Comptes généraux de l'Administration de la iustice militaire, welche von dem Kriegsminister publicirt werden, wird die Anzahl der Verurtheilten auf $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Angeklagten geschätzt. Da dieses Verhältniß aus einer sehr großen Anzahl von Urtheilen abgeleitet ist, so kann man folglich den Bruch $\frac{2}{3}$ für den genäherten und sehr wahrscheinlichen Werth von c_2 nehmen; allein dieses Datum ist zur Bestimmung der beiden in der vorhergehenden Gleichung vorkommenden Unbekannten nicht zureichend. Nimmt man an, daß die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens für die Militärrichter sehr wenig von der für die Geschworenen der Assisenhöfe verschieden ist, und setzt sie folglich $=\frac{3}{4}$, so wäre $t=3$, $c_2=\frac{2}{3}$, und aus dieser Gleichung ergäbe sich:

$$k = 0{,}8793, \; 1 - k = 0{,}1207,$$

so daſſ man etwas mehr, als 7 gegen 1 wetten könnte, daſſ eine Militärperson schuldig ist, wenn sie vor ein Kriegsgericht gestellt wird. Vermöge der Formeln (9) und der ersten der Gleichungen (6) hat man:

$$(1+t)^7 c_2 P_2 = k(t^7 + 7t^6 + 21t^5)$$

zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P_2, daſſ der Angeklagte nach stattgehabter Verurtheilung schuldig ist, und vermittelst der vorhergehenden Werthe von c_2, t, k ergibt sich:

$$P_2 = 0{,}9976,$$

woraus erhellet, wie wenig diese Wahrscheinlichkeit von der Gewiſſheit verschieden ist. Allein dieses Resultat gründet sich auf einen hypothetischen Werth von t oder u, dessen Grad der Genauigkeit wir nicht angeben können. Dessenungeachtet würde es interessant sein, die Militärjustiz mit der der Assisenhöfe hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit ihrer Urtheile auf eine zuverlässige Weise vergleichen zu können. Zu dem Zwecke müſſte man in Beziehung auf die verurtheilten Militärpersonen außer dem Verhältnisse $\frac{2}{3}$ ihrer Gesammtzahl zu der der Angeklagten auch das Verhältniſſ der bei der Einstimmigkeit der Richter Verurtheilten, so wie das Verhältniſſ der bei den beiden Stimmenmehrheiten von 6 Stimmen gegen 1 oder von 5 gegen 2 Verurtheilten zu der Gesammtzahl der Angeklagten kennen. Leider kennen wir aber dieses zweite Datum nicht aus der Beobachtung und es läſſt sich auch durch keine einigermaßen wahrscheinliche Hypothese ersetzen.

§. 147. Zum Schlusse dieses Werkes wollen wir nun noch die Wahrscheinlichkeit der Urtheile der Tribunale in Civilprocessen betrachten.

In einem Civilprocesse kommt es darauf an, zu entscheiden, welche von zwei Parteien, wovon die eine die andere anklagt, das Recht auf ihrer Seite hat. Dieses würde durch Richter, für welche es keine Wahrscheinlichkeit des Irrens gäbe, mit völliger Gewiſſheit entschieden werden, und wie groß ihre Anzahl auch sein möchte, so würde das Urtheil doch immer bei der Einstimmigkeit derselben gefällt werden. Allein dieses verhält sich nicht so. Es geschieht oft, daſſ zwei gleich einsichtsvolle Richter, welche denselben Proceſſ mit aller ihnen möglichen Aufmerksamkeit untersucht haben, dessenungeachtet entgegengesetzte Urtheile darüber fällen. Man muſſ also annehmen, daſſ für jeden Richter eine gewisse Wahrscheinlichkeit des Irrthumes in seinem Urrtheile stattfindet. Sie ist von dem Grade der Einsicht und der Rechtlichkeit des Richters abhängig, sie ist nicht a priori bekannt und ihr Werth muſſ,

wenn es möglich ist, durch die sogleich anzugebenden Mittel aus der Beobachtung abgeleitet werden. Wenn diese, oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit für alle Richter eines Tribunales bestimmt ist, so kann man daraus die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit ihres Urtheiles, d. h. seiner Uebereinstimmung mit dem Urtheile, welches von infaillibeln Richtern würde ausgesprochen werden, ableiten. Auch kann man daraus die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass andere Richter, für welche die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens ebenfalls gegeben wäre, das Urtheil der erstern bestätigen. Dieses zweite Problem ist dem ähnlich, welches wir bei den Urtheilen in Criminalprocessen betrachtet haben. Die im Vorhergehenden mit k bezeichnete Größe drückt jetzt die Wahrscheinlichkeit aus, dass eine der beiden Parteien Recht hat, wenn das erste Urtheil zu ihren Gunsten ausgefallen ist. Aber wenn der Process zum ersten Male vor die Civiltribunale gelangt, so findet vor der Entscheidung keine Wahrscheinlichkeit statt, welche der einen oder der andern Partei günstig wäre. Man hat also hier keine der Wahrscheinlichkeit k analoge zu betrachten und die allein durch die Beobachtung zu bestimmenden Unbekannten sind hier die Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens der Richter.

§. 148. Wir wollen zuerst ein aus drei Richtern A, A', A'' bestehendes Tribunal erster Instanz betrachten. Es seien u, u', u'' die resp. Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens dieser Richter und c die Wahrscheinlichkeit, dass sie einstimmig urtheilen, welches stattfindet, wenn sich keiner der Richter irret, oder wenn sich alle drei irren; so ist die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles $= u u' u''$ und die des zweiten $= (1-u)(1-u')(1-u'')$. Die vollständige Wahrscheinlichkeit c hat also folgenden Werth:

$$c = u u' u'' + (1-u)(1-u')(1-u'').$$

Wenn das einstimmige Urtheil gefällt ist, so kann man zwei Voraussetzungen machen; man kann nämlich annehmen, dass der Process richtig, oder dass er unrichtig entschieden ist. In der ersten Voraussetzung darf sich keiner der drei Richter geirret haben und in der zweiten müssen sie sich alle drei geirret haben. Die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses, welches hier das bei der Einstimmigkeit der Richter gefällte Urtheil ist, ist folglich $= u u' u''$, wenn die erste Voraussetzung wahr ist, und $= (1-u)(1-u')(1-u'')$, wenn sie falch ist. Wenn man also auf diese Hypothesen die Regel für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen (§. 28) anwendet und die Wahrscheinlichkeit der ersten Ursache oder der Richtigkeit des Urtheiles p nennt; so hat man:

$$p = \frac{u\,u'\,u''}{u\,u'\,u'' + (1-u)(1-u')(1-u'')},$$

oder was dasselbe ist:

$$c\,p = u\,u'\,u''.$$

Wenn das Urtheil der drei Richter nicht einstimmig ist, so hat einer derselben zu Gunsten einer der Parteien und die beiden andern zu Gunsten der andern Partei entschieden. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeiten, dass der Richter A, oder A', oder A'', ein von den beiden andern verschiedenes Urtheil fällt, und also der in Rede stehende Fall stattfindet, mit a, a', a''; so hat man:

$$a = (1-u)\,u'\,u'' + u\,(1-u')(1-u'')$$
$$a' = (1-u')\,u\,u'' + u'\,(1-u)(1-u'')$$
$$a'' = (1-u'')\,u\,u' + u''\,(1-u)(1-u');$$

denn der erste Fall findet z. B. statt, wenn A' und A'' sich nicht irren und A sich irret, oder wenn A' und A'' sich irren und A nicht, und ebenso für die beiden andern Fälle. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit eines nicht bei der Einstimmigkeit der Richter gefällten Urtheiles allgemein mit b, so hat man:

$$b = a + a' + a'',$$

und da dieses Urtheil, oder ein einstimmiges Urtheil gefällt werden muss, so muss $b + c = 1$ sein, was sich leicht nachweisen lässt. Hieraus folgt:

$$b = 1 - u\,u'\,u'' - (1-u)(1-u')(1-u'').$$

Soll das Urtheil richtig sein, so ist erforderlich, dass sich die beiden übereinstimmend urtheilenden und die Stimmenmehrheit bildenden Richter nicht geirret haben, und wenn das Urtheil unrichtig sein soll, so müssen sie sich geirret haben. Wenn man also die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit eines nicht bei der Einstimmigkeit der Richter gefällten Urtheiles mit q bezeichnet, so hat man auch nach der Regel für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen oder Hypothesen:

$$b\,q = (1-u)\,u'\,u'' + (1-u')\,u\,u'' + (1-u'')\,u\,u'.$$

Nun sei in einer sehr großen Anzahl μ von denselben 3 Richtern A, A', A'' gefällter Urtheile γ die Anzahl der einstimmigen und ε die der nicht einstimmigen Urtheile, und unter diesen letztern seien α, α', α'' die Anzahlen der Urtheile, wo der Richter A, oder A', oder A'', nicht

wie die beiden andern geurtheilt hat; so ist mit einer sehr großen Annäherung und höchst wahrscheinlich:

$$\frac{\gamma}{\mu}=c,\ \frac{6}{\mu}=b,\ \frac{\alpha}{\mu}=a,\ \frac{\alpha'}{\mu}=a',\ \frac{\alpha''}{\mu}=a''.$$

Da die Zahl 6 die Summe der Zahlen α, α', α'' und die Zahl b die Summe der Zahlen a, a', a'' ist, so ist die zweite dieser Gleichungen eine Folge aus den drei letzten und die 5 Gleichungen reduciren sich auf 4. Wenn die Zahlen α, α', α'' durch die Beobachtung gegeben wären, und man substituirte die vorhergehenden Ausdrücke von a, a', a'' in die drei letzten Gleichungen; so könnte man daraus die Werthe von u, u', u'' ableiten, und wenn man den Ausdruck von c in die erste Gleichung setzte, so ergäbe sich daraus der Werth von γ, so daß, wenn diese Zahl γ auch durch die Beobachtung gegeben wäre, die Vergleichung des beobachteten und berechneten Werthes derselben zur Prüfung der Theorie dienen könnte. Wenn die Werthe von u, u', u'' auf diese Weise bestimmt wären, so könnte man vermittelst der vorhergehenden Formeln daraus leicht die Wahrscheinlichkeiten p und q der Richtigkeit eines einstimmigen und nicht einstimmigen Urtheiles der Richter ableiten. Allein die Zahlen γ, α, α', α'' sind für kein Tribunal aus der Beobachtung bekannt, und um ein Anwendungsbeispiel dieser Formeln zu geben, wollen wir die Werthe der Wahrscheinlichkeiten u, u', u'' willkürlich annehmen und z. B.:

$$u=\tfrac{4}{5},\ u'=\tfrac{3}{5},\ u''=\tfrac{3}{5}$$

setzen. Für jeden der drei Richter ist die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens größer, als die des Irrens; die Richter A' und A'' haben eine gleich gute Einsicht in die Sache und dieselbe Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens, während der Richter A eine tiefere Einsicht hat und die Wahrscheinlichkeit seines Irrens kleiner ist. Es ist:

$$c=\tfrac{8}{25},\ b=\tfrac{17}{25},$$

so daß man 17 gegen 8, oder etwas mehr, als 2 gegen 1 wetten kann, daß die drei Richter kein einstimmiges Urtheil fällen. Auch ist:

$$p=\tfrac{9}{10},\ q=\tfrac{57}{85},$$

so daß man also 9 gegen 1 wetten könnte, daß das einstimmige Urtheil der Richter richtig ist, und blos 57 gegen 28, oder ungefähr 2 gegen 1, daß ein nicht einstimmiges Urtheil derselben richtig ist.

Für diese drei Richter wäre die mittlere Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens:

$$\frac{1}{3}(u+u'+u'')=\frac{2}{3},$$

wenn man voraussetzt, daſſ sie eine gleiche Einsicht in die Sache haben, und wenn man diesen Bruch $\frac{2}{3}$ für den gemeinschaftlichen Werth von u, u', u'' nimmt; so findet man:

$$c=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3},\ p=\frac{8}{9},\ q=\frac{2}{3}.$$

Da diese Werthe von p und q etwas kleiner sind, als die vorhergehenden, so folgt, daſſ in unserm Beispiele durch die Annahme einer gleichen Einsicht der drei Richter die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit eines einstimmigen oder nicht einstimmigen Urtheiles vermindert wird. Da aber anderer Seits der letzte Werth von c größer ist, als der erste und der erste Werth von b größer, als der letzte, so wird durch diese Annahme die Wahrscheinlichkeit eines einstimmigen Urtheiles der drei Richter vergrößert, und folglich die eines nicht einstimmigen Urtheiles vermindert.

Wenn wir nicht wissen, ob ein von drei Richtern gefälltes Urtheil ein einstimmiges ist, oder nicht, so ist der Grund, welchen wir für die Annahme der Richtigkeit dieses Urtheiles haben, von p und q verschieden. Bezeichnet man in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit dieses Urtheiles mit r; so hat man:

$$r=uu'u''+(1-u)u'u''+(1-u')uu''+(1-u'')uu'.$$

Denn in der Voraussetzung der Richtigkeit des Urtheiles kann das gefällte Urtheil oder das beobachtete Ereigniſſ in 4 verschiedenen Fällen stattgefunden haben, deren Wahrscheinlichkeiten die vier Glieder des zweiten Theiles der vorhergehenden Gleichung sind. In der entgegengesetzten Voraussetzung wäre die Wahrscheinlichkeit dieses Ereigniſſes

$$=(1-u)(1-u')(1-u'')+u(1-u')(1-u'')$$
$$+u'(1-u)(1-u'')+u''(1-u)(1-u'),$$

und da die Summe der Wahrscheinlichkeiten desselben in den beiden Voraussetzungen der Gewiſſheit oder der Einheit gleich ist; so ist der Divisor des sich aus der Regel in §. 28 ergebenden Ausdruckes von r ebenfalls der Einheit gleich. Auch kann man bemerken, daſſ

$$r=cp+bq$$

ist, was sich auch leicht direct nachweisen ließe.

Wenn man die vorhergehenden Werthe von u, u', u'' nimmt; so findet man:

$$r=\frac{93}{125},$$

und wenn man sie alle $=\frac{2}{3}$ setzt; so kommt:

$$r=\frac{20}{27},$$

und da dieser zweite Werth von r etwas kleiner ist, als der erste, so folgt, dass die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des Urtheiles kleiner ist, als vorhin, wenn die drei Richter eine gleich tiefe Einsicht in die vorliegende Sache haben.

§. 149. Diese Formeln lassen sich leicht auf die Urtheile eines aus einer beliebigen Anzahl von Richtern bestehenden Tribunales erstrecken; aber man kann keine Anwendung davon machen, weil es an den zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des Nichtirrens der verschiedenen Richter nöthigen Beobachtungsdaten fehlt. Wenn man diese Wahrscheinlichkeiten als einander gleich und die Anzahl der Richter wieder $=3$ annimmt, so hat man unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungen:

$$c=u^3+(1-u)^3,\ b=1-u^3-(1-u)^3$$
$$cp=u^3,\ bq=3(1-u)u^2,\ r=u^3+3(1-u)u^2.$$

Nimmt man überdies für c oder b den sehr genäherten und höchst wahrscheinlichen Werth $\frac{\gamma}{\mu}$ oder $\frac{\delta}{\mu}$, so bestimmt die eine oder die andere der beiden ersten Gleichungen den Werth von u, so dass man zu dieser Bestimmung von einer sehr großen Anzahl μ durch die 3 Richter gefällter Urtheile nur die Anzahl γ der bei der Einstimmigkeit, oder die Anzahl δ der nicht bei der Einstimmigkeit gefällten Urtheile zu kennen braucht; allein dieses Datum ist ebenfalls nicht aus der Beobachtung bekannt. Wenn man z. B. $\delta=\gamma$ nähme, so hätte man:

$$u^3+(1-u)^3=1-3u+3u^2=\tfrac{1}{2},$$

folglich:

$$u=\tfrac{1}{2}(1\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3}),$$

d. h. man bekäme für u zwei Werthe, wovon der eine größer und der andere kleiner als $\frac{1}{2}$ wäre, und da man annehmen muss, dass die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens eines Richters größer ist, als die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit; so erhielte man, wenn man den ersten dieser beiden Werthe nähme:

$$u=0{,}7888,$$

folglich:

$$p=0{,}9815,\ q=0{,}7885,\ r=0{,}8850.$$

Wenn das bei der Einstimmigkeit, oder bei der Nichteinstimmigkeit der drei Richter gefällte Urtheil einem Appellationstribunale vorgelegt wird, welches z. B. aus 7 andern Richtern besteht, wovon für jeden die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens mit v bezeichnet wird, und C bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Urtheil durch das zweite Tribunal bei einer Stimmenmehrheit von wenigstens 4 Stimmen gegen 3 bestätigt wird; so wird der Werth von C durch die erste der Formeln (6) ausgedrückt, wenn man darin r und v für k und u und außerdem $n=7$ und $i=3$ setzt, wodurch man erhält:

$$C=r\left[v^7+7v^6(1-v)+21v^5(1-v)^2 +35v^4(1-v)\right]+(1-r)\left[(1-v)^7+7(1-v)^6v +21(1-v)^5v^2+35(1-v)^4v^3\right].$$

Und in der That muss, wenn das erste Urtheil richtig ist, und von dem zweiten Tribunale bestätigt werden soll, keiner der 7 Appellationsrichter sich irren, oder es muss sich ein einziger davon irren, oder zwei, oder drei. Nun werden aber die Wahrscheinlichkeiten dieser 4 Fälle durch die zwischen den ersten beiden Klammern stehenden 4 Glieder ausgedrückt und folglich ist ihre mit r multiplicirte Summe die Wahrscheinlichkeit, dass das Urtheil der ersten drei Richter richtig ist und bestätigt wird. Ebenso sieht man, dass der Theil des vorhergehenden Ausdruckes von C, welcher $1-r$ zum Factor hat, die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass das erste Urtheil falsch ist und dennoch bestätigt wird, so dass die Summe der beiden Theile des Ausdruckes von C die vollständige Wahrscheinlichkeit der Bestätigung des ersten Urtheiles ausdrückt. Ebenso ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit C' der Cassation des Erkenntnisses des ersten Tribunales durch das zweite Tribunal durch:

$$C'=(1-r)\left[v^7+7v^6(1-v)+21v^5(1-v)^2+35v^4(1-v)^3\right] +r\left[(1-v)^7+7(1-v)^6v+21(1-v)^5v^2+35(1-v)^4v^3\right]$$

ausgedrückt wird, und da dieses Erkenntniss nothwendig bestätigt oder aufgehoben werden muss, so muss $C+C'=1$ sein, was auch dadurch bestätigt wird, dass

$$\left[v^7+7v^6(1-v)+21v^5(1-v)^2+35v^4(1-v)^3\right] +\left[(1-v)^7+7(1-v)^6v+21(1-v)^5v^2+35(1-v)^4v^3\right] =\left[v+(1-v)\right]^7=1$$

ist. Es ist $C=C'=\frac{1}{2}$ sowohl für $r=\frac{1}{2}$ und für einen beliebigen Werth von v, als für $v=\frac{1}{2}$ und für einen beliebigen Werth von r, was übrigens für sich einleuchtend ist.

Wenn man die beiden Theile des Ausdruckes jeder der Größen C und C' besonders betrachtet, so kann man auch sagen, daſſ der erste Theil von C die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daſſ die beiden successiven Tribunale richtig urtheilen, daſſ der zweite Theil von C die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daſſ sie beide falsch urtheilen, daſſ der erste Theil von C' die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daſſ das erste Tribunal falsch und das zweite richtig urtheilt, und daſſ endlich der zweite Theil von C' die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daſſ das erste Tribunal richtig und das zweite falsch urtheilt. Wenn man also die Wahrscheinlichkeit, daſſ der Appellationshof richtig urtheilt, mit ϱ bezeichnet, das Tribunal erster Instanz mag übrigens richtig oder unrichtig urtheilen; so ist ϱ die Summe der beiden ersten Theile von C und C' und $1-\varrho$ die Summe der zweiten Theile von C und C', so daſſ

$$\varrho = v^7 + 7v^6(1-v) + 21v^5(1-v)^2 + 35v^4(1-v)^3,$$
$$1-\varrho = (1-v)^7 + 7(1-v)^6 v + 21(1-v)^5 v^2 + 35(1-v)^4 v^3$$

ist, was man auch leicht direct finden könnte. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, daſſ das Erkenntniſſ dieses Appellationshofes durch einen zweiten ebenfalls aus 7 Richtern bestehenden Appellationshof bestätigt wird, mit Γ, und die Wahrscheinlichkeit, daſſ dieses nicht der Fall ist, mit Γ' und für jeden dieser 7 Richter die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens mit w; so ergeben sich die Ausdrücke für Γ und Γ' aus denen für C und C', wenn man darin ϱ und w für r und v setzt. Wenn man also $w = v$ annimmt; so ergibt sich daraus:

$$\Gamma = \varrho^2 + (1-\varrho)^2, \quad \Gamma' = 2\varrho(1-\varrho),$$

welche Werthe der Bedingung $\Gamma + \Gamma' = 1$ genügen. Nach den Ausdrücken von C und C' können die von ϱ und $1-\varrho$ übrigens auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\varrho = \frac{r - C'}{2r-1}, \quad 1-\varrho = \frac{r-C}{2r-1}.$$

Ferner wollen wir die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des Erkenntnisses eines ersten Appellationshofes, wenn es mit dem Erkenntnisse erster Instanz übereinstimmt, mit P bezeichnen, und mit P', wenn es demselben entgegengesetzt ist. Wenn man im ersten Falle successive annimmt, daſſ es richtig und daſſ es unrichtig ist, so wird die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses, welches hier die Uebereinstimmung der beiden Erkenntnisse ist, in der ersten Voraussetzung durch den ersten Theil von C und in der zweiten Voraussetzung durch den zweiten Theil von C ausgedrückt. Die Wahrscheinlichkeit P der ersten Vor=

aussetzung wird folglich durch den Quotienten aus dem ersten Theile der Größe C und der Summe ihrer beiden Theile ausgedrückt. Wir haben folglich:

$$CP = r[v^7 + 7v^6(1-v) + 21v^5(1-v)^2 + 35v^4(1-v)^3],$$

und ebenso findet man:

$$C'P' = (1-r)[v^7 + 7v^6(1-v) + 21v^5(1-v)^2 + 35v^4(1-v)^3],$$

welche Resultate sich auch aus den Formeln (9) und (10) ergeben, wenn man darin $k=r$, $n=7$, $i=3$ setzt, wie es auch der Fall sein muss. Wenn man die Bedeutung von ϱ berücksichtigt, so können diese Gleichungen auch durch folgende ersetzt werden:

$$CP = r\varrho,\; C'P' = (1-r)\varrho.$$

§. 150. Zum Ausspruche eines Urtheiles erster Instanz sind wenigstens 3 Richter und zu einer Erkenntnissfällung des Appellationshofes 7 erforderlich, und im Allgemeinen werden diese kleinsten Zahlen nicht überschritten, weswegen wir auch die Zahlen 3 und 7 für die Anzahlen der Richter der beiden eben betrachteten, auf einander folgenden Tribunale angenommen haben. Wenn man für r seinen Werth als Function von u in die erhaltenen Formeln substituirt, so enthalten sie die beiden Wahrscheinlichkeiten u und v, welche nur aus der Beobachtung abgeleitet werden können; aber leider liefert diese nur ein einziges Datum, nämlich das Verhältniss der Anzahl der durch die Appellationshöfe bestätigten Erkenntnisse erster Instanz zu der Gesammtzahl der vor sie gelangten Urtheile erster Instanz. Um also von diesen Formeln Gebrauch machen zu können, muss man die beiden Unbekannten u und v vermittelst einer besondern Hypothese auf eine einzige zurückführen, und die Voraussetzung, welche uns am natürlichsten geschienen hat, besteht darin, $v=u$ zu setzen, d. h. anzunehmen, dass die Richter des ersten Tribunales dieselbe Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu irren, haben als die des zweiten.

Bei einer sehr großen Anzahl μ von Urtheilen erster Instanz sei m die Anzahl der bestätigten und folglich $\mu - m$ die der nicht bestätigten Urtheile, so kann man das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ für den sehr wahrscheinlichen Näherungswerth der mit C bezeichneten Wahrscheinlichkeit nehmen, und wenn man

$$C = \frac{m}{\mu},\; v = u,\; u = \frac{t}{1+t},\; 1-u = \frac{1}{1+t}$$

setzt, so ergibt sich:

$$\frac{m}{\mu} = r - \frac{(2r-1)(1+7t+21t^2+35t^3)}{(1+t)^7}.$$

Zu gleicher Zeit hat man:

$$r = 1 - \frac{1+3t}{(1+t)^3}, \quad 2r - 1 = 1 - \frac{2(1+3t)}{(1+t)^3},$$

und wenn man diese Werthe in den von $\frac{m}{\mu}$ substituirt, so erhält man zur Bestimmung des Werthes von t und folglich zur Bestimmung des Werthes von u eine Gleichung des zehnten Grades. In dem Falle, wo $v = u$ ist, bleibt der Ausdruck von C derselbe, wenn man darin u und r resp. in $1-u$ und $1-r$ verwandelt, was der Veränderung von t in $\frac{1}{t}$ entspricht. Hieraus folgt, dass, wenn dem gegebenen Werthe von $\frac{m}{\mu}$ durch einen Werth von $t < 1$ genügt wird, demselben auch durch einen Werth von $t > 1$ Genüge geschieht, und in der That ist die Gleichung, von welcher die Unbekannte t abhängt, eine reciproke, welche bekanntlich ungeändert bleibt, wenn man t in $\frac{1}{t}$ verwandelt. Man muss aber den Werth von t nehmen, welcher größer ist als die Einheit; denn dieser ist es, welcher einem größern Werthe von u als $\frac{1}{2}$, d. h. dem Falle entspricht, wo die Wahrscheinlichkeit des Nichtirrens größer ist, als die des Irrens, was man in dem vorliegenden Falle annehmen muss.

§. 151. Der von der französischen Regierung herausgegebene Compte général de l'Administration de la iustice civile gibt für den Bezirk jedes Appellationshofes die Anzahlen m und $m - \mu$ der bestätigten und nicht bestätigten Urtheile für die letzten drei Monate des Jahres 1831 und für die Jahre 1832, 1833. Aber kaum bei dem Pariser Appellationshofe ist die Gesammtzahl μ groß genug, um allein zur Bestimmung von t dienen zu können, und wir sind folglich für jetzt genöthigt, wie bei den Geschworenen, anzunehmen, dass die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens für alle Richter Frankreichs fast dieselbe ist, so dass man zur Bestimmung von t die sich auf alle Appellationshöfe von ganz Frankreich beziehenden Werthe von m und $\mu - m$ anwenden kann. Nun ist aber für die letzten drei Monate des Jahres 1831, für die Jahre 1832 und 1833 für ganz Frankreich:

$$m = 976, \quad m = 5301, \quad m = 5470,$$

$$\mu - m = 388, \quad \mu - m = 2405, \quad \mu - m = 2617$$

gewesen, woraus sich für diese drei Perioden:

$$\frac{m}{\mu}=0{,}7155,\ \frac{m}{\mu}=0{,}6879,\ \frac{m}{\mu}=0{,}6764$$

ergibt. Die beiden letzten Verhältnisse, welche den ganzen Jahren entsprechen, sind noch nicht um $\frac{1}{70}$ ihres arithmetischen Mittels von einander verschieden, welches ein sehr merkwürdiges Beispiel des Gesetzes der großen Zahlen darbietet. *) Wenn man für m und μ die Summen der sich auf diese drei Perioden beziehenden Zahlen nimmt, so erhält man:

$$m=11747,\ \mu=17157,\ \frac{m}{\mu}=0{,}6847,$$

und wenn man die sich auf den Pariser Appellationshof beziehenden Zahlen allein betrachtete, so hätte man:

$$m=2510,\ \mu=3297,\ \frac{m}{\mu}=0{,}7613,$$

so dass für den Bezirk dieses Appellationshofes das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ seinen mittlern Werth für ganz Frankreich ungefähr um $\frac{1}{9}$ seines Werthes für ganz Frankreich übertrifft.

Wenn man den sich auf ganz Frankreich beziehenden Werth $\frac{m}{\mu}=0{,}6847$ anwendet, so findet man:

$$t=2{,}157,\ u=0{,}6832,\ r=0{,}7626.$$

Nach diesem Werthe von r kann man also etwas mehr als 3 gegen 1 wetten, dass ein Urtheil erster Instanz richtig ist, wenn man weder das Tribunal kennt, von dem es gefällt ist, noch die Art des Processes. Auch sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit u des Nichtirrens für die Richter in Civilprocessen den Bruch 0,6788, welcher diese Wahrscheinlichkeit für die Geschworenen vor 1832, d. h. ehe das Gesetz die Berücksichtigung der Milderungsgründe vorschrieb, ausdrückt, nur sehr wenig übertrifft.

Vermittelst dieses Werthes von r, und wenn man die Verhältnisse $\frac{m}{\mu}$, $\frac{\mu-m}{m}$ für die Werthe von C und C' nimmt, ergibt sich aus den Formeln des vorhergehenden §.:

*) Dieses Gesetz wird von neuem durch den Werth des Verhältnisses $\frac{m}{\mu}=0{,}6958$ für das Jahr 1834 bestätigt, welcher Werth vor Kurzem in dem Compte général etc. für das Jahr 1834 von der Regierung bekannt gemacht ist.

$$P = 0{,}9479,\ P' = 0{,}6409,\ \Gamma = 0{,}7466,$$

woraus erhellet, daß man fast 19 gegen 1 wetten kann, daß ein von einem Appellationshofe bestätigtes Urtheil erster Instanz richtig ist, und wenigstens 2 gegen 1, wenn es nicht bestätigt wird. Auch sieht man, daß, wenn man nicht weiß, ob das Erkenntniß zweiter Instanz mit dem erster Instanz übereinstimmt, oder nicht, die Wahrscheinlichkeit Γ, daß es von einem zweiten Appellationshofe, welcher nach denselben Daten urtheilt, als der erste, bestätigt wird, etwas kleiner als $\frac{3}{4}$ ist. Die vier Theile, woraus die gegebenen Ausdrücke von C und C' bestehen, haben folgende Werthe:

$$r\varrho = 0{,}6495,\ (1-r)\varrho = 0{,}2022,$$
$$r(1-\varrho) = 0{,}1131,\ (1-r)(1-\varrho) = 0{,}0352,$$

und diese Brüche, deren Summe gleich der Einheit ist, drücken resp. die Wahrscheinlichkeiten aus, daß die beiden successiven Tribunale erster und zweiter Instanz richtig, daß das erste unrichtig und das zweite richtig, daß das erste richtig und das zweite unrichtig, und endlich daß beide unrichtig urtheilen.

Anhang I.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Berechnung der Lebensrenten, Lebensversicherungen, u. s. w.

§. 1. Eine Leib- oder Lebensrente ist, wie schon der Name anzeigt, eine solche, welche einer Person A so lange gezahlt wird, als sie lebt. Der Werth einer solchen Leibrente ist also von der Lebenswahrscheinlichkeit der Person A abhängig, weil es nicht gewiss ist, dass diese Person ein bestimmtes Alter erreicht. Desgleichen, wenn ein Ehemann seiner Ehefrau eine Wittwenpension kaufen will, so ist der Werth dieser Pension offenbar von der Lebenswahrscheinlichkeit beider abhängig, etc. Es kommt also bei Untersuchungen dieser Art zunächst darauf an, die Lebenswahrscheinlichkeit der Menschen in den verschiedenen Altern des menschlichen Lebens zu ermitteln. Zu dem Zwecke bestimmt man durch Beobachtung, wie viele von einer hinreichend großen Anzahl Neugeborener, z. B. von **1000** oder **10000**, am Ende des **1**sten, **2**ten, **3**ten, ... Lebensjahres noch leben. Denn bezeichnen wir die betrachtete Anzahl der Neugeborenen mit a_0 und die davon am Ende des **1**sten, **2**ten, **3**ten, ... Jahres noch Lebenden resp. mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$; so wird offenbar die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eins dieser Kinder **1**, **2**, **3**, ... Jahre alt wird, resp. durch:

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \frac{a_4}{a_0}, \ldots.$$

ausgedrückt. Um aber die Werthe von $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zu finden, müsste man eigentlich die $a_0 = \mathbf{1000}$ oder $= \mathbf{10000}$ Neugeborenen ihr ganzes Leben hindurch beobachten, bis sie sämmtlich ausgestorben wären; allein dieses würde viel zu weitläufig, schwierig und unsicher sein, weil mehrere solcher Beobachtungsreihen erforderlich sind, um zufällige temporäre Einflüsse auf das gesuchte mittlere Resultat zu beseitigen, und es müssen daher Methoden ausfindig gemacht werden, die Werthe von $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ welche eine sogenannte Sterblichkeits- oder Mortalitätstafel bilden, innerhalb einiger Jahre mit der möglichst größten Zuverlässigkeit zu bestimmen.

Halley, welcher die erste Sterblichkeitstafel verfertigt zu haben scheint, nahm an, daß sich die Bevölkerung eines Landes, einer Stadt etc. im Beharrungszustande befinde, d. h. daß jährlich ebenso viel geboren werden, als sterben, und daß außerdem die resp. Anzahlen der Lebenden oder Sterbenden von einem Alter von 1, 2, 3, 4, ... Jahren in den successiven Jahren dieselben bleiben. Um in dieser Voraussetzung die Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4, ... zu finden, braucht man nur nach den Sterbelisten zu bestimmen, wie viele Individuen von einer hinreichend großen Bevölkerung resp. im 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ... Jahre ihres Lebens gestorben sind. Denn wenn im 1sten Jahre α_0, im 2ten Jahre α_1, im 3ten Jahre α_2, im 4ten Jahre α_3, im 5ten Jahre α_4, ... Individuen gestorben sind; so hat man, weil nach der Voraussetzung die Anzahl der Verstorbenen der der Lebenden gleich sein soll, folgende Sterblichkeitstafel:

In einem Alter zwischen	gestorben	Lebende von einem Alter resp. über 0, 1, 2, 3, ... Jahre.	Summe der Lebenden von allen Altern über 0, 1, 2, 3, ... Jahre, oder der von ihnen zu durchlebenden Jahre.
0—1 Jahr	α_0	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots=a_0$	$\alpha_0+2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+5\alpha_4+\ldots$
1—2 —	α_1	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots=a_1$	$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+\ldots$
2—3 —	α_2	$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots=a_2$	$\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+\ldots$
3—4 —	α_3	$\alpha_3+\alpha_4+\ldots=a_3$	$+\alpha_3+2\alpha_4+\ldots$
4—5 —	α_4	$\alpha_4+\ldots=a_4$	$\alpha_4+\ldots$
. . .	. . .	. . .	. . .

Da nun die Bevölkerung als stationär vorausgesetzt wird, so folgt, dass umgekehrt von den a_0 jährlich Neugeborenen resp. a_1, a_2, a_3, a_4, ... das Ende des 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... Jahres erreichen. Unter dieser Voraussetzung kann man die Werthe von a_1, a_2, a_3, ... schon aus einer Sterbeliste von einem Jahre finden und braucht nicht das allmählige Absterben von a_0 Neugeborenen viele Jahre hindurch zu beobachten.

§. 2. Wenn man die Zahlen der vierten Kolumne resp. durch die danebenstehenden der dritten dividirt, so erhält man offenbar die fernere mittlere Lebensdauer für das entsprechende Alter. So ist z. B.:

$$\frac{\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + \cdots}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots}{a_0}$$

$$= 1 + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots}{a_0}$$

die ganze mittlere Lebensdauer eines Neugeborenen, und:

$$\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + \cdots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots}{a_1}$$

$$= 1 + \frac{a_2 + a_3 + a_4 + \cdots}{a_1}$$

ist die fernere mittlere Lebensdauer eines 1jährigen Kindes, u. s. f.

Hierbei ist aber angenommen, dass die Todesfälle plötzlich am Ende jedes Jahres stattfinden, was jedoch nicht der Fall ist. Die vorhergehenden Ausdrücke für die mittlere Lebensdauer bedürfen daher einer Correction, welche darin besteht, dass man $\frac{1}{2}$ davon abzieht. Denn da die Todesfälle während des ganzen Jahres stattfinden, so kann man annehmen, dass sie alle in der Mitte desselben stattgefunden haben, und alsdann leben nach $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, ... Jahren resp noch $a_0 - a_1$, $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$, ... Individuen, und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das Durchleben dieser Zeiträume sind:

$$\frac{a_0 - a_1}{a_0}, \frac{a_1 - a_2}{a_0}, \frac{a_2 - a_3}{a_0}, \frac{a_3 - a_4}{a_0}, \ldots$$

Nach §. 69 muss man aber diese Wahrscheinlichkeiten mit den entsprechenden Zeiträumen multipliciren und die Producte addiren, um den richtigen Ausdruck für die mittlere Lebensdauer zu erhalten. Auf diese Weise findet man für die mittlere Lebensdauer eines Neugeborenen den genauen Ausdruck:

$$\frac{1}{2a_0}[(a_0-a_1)+3(a_1-a_2)+7(a_2-a_3)+9(a_3-a_4)+\ldots]$$
$$=\tfrac{1}{2}+\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots}{a_0},$$

u. s. f.

Mit der fernern mittlern Lebensdauer einer Person ist jedoch ihre fernere wahrscheinliche Lebensdauer nicht zu verwechseln; denn unter dieser versteht man die Zeit, nach deren Verlauf die Hälfte der Personen von dem Alter der betrachteten Person gestorben sind, und also die Wahrscheinlichkeit, daß sie diesen Zeitpunkt erreicht, ebenso groß ist, als die, daß sie früher stirbt, nämlich jede $=\frac{1}{2}$.

§. 3. Die Voraussetzung, worauf sich die Halley'sche Construction der Mortalitätstafeln gründet, ist jedoch nicht naturgemäß; denn die Erfahrungen in dieser Beziehung haben gelehrt, daß die Bevölkerungen nicht stationär sind, sondern bedeutenden Veränderungen unterliegen und meistens beträchtlich zunehmen, d. h. es sterben weniger, als geboren werden. Nun ist aber leicht einzusehen, daß in diesem Falle eine Halley'sche Mortalitätstafel die Lebenswahrscheinlichkeiten in den successiven Altern und die mittlere Lebensdauer zu gering oder die Sterblichkeit zu hoch angibt, während bei einer abnehmenden Bevölkerung das Gegentheil stattfindet. Ueberhaupt findet, wenn die Bevölkerung nicht stationär ist, zwischen der Anzahl a_0 der jährlich Neugeborenen und den Anzahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \ldots$ der im 1sten, 2ten, 3ten, ... Jahre ihres Lebens Sterbenden durchaus keine Beziehung statt, so daß man z. B., wenn jährlich 1000 geboren werden, und in einem Jahre 8 Personen in einem Alter von 30 Jahren sterben, nicht umgekehrt behaupten kann, daß von den 1000 Neugeborenen auch 8 nach 30 Jahren sterben werden.

Wenn die Bevölkerung wieder als stationär angenommen wird, so geben die Volkszählungen die Zahlen $a_0, a_1, a_2, a_4, \ldots$ unmittelbar, und wenn man auf diese Weise:

ε_0	Individuen	von	0	bis	1	Jahr
ε_1	"	"	1	"	2	"
ε_2	"	"	2	"	3	"
ε_3	"	"	3	"	4	"
.			.		.	
.			.		.	
.			.		.	
.			.		.	

findet, so hat man folgende Sterblichkeitstafel:

Alter.	Lebende.	Verstorbene.
0	L_0	$L_0 - L_1$
1	L_1	$L_1 - L_2$
2	L_2	$L_2 - L_3$
3	L_3	$L_3 - L_4$
4	L_4	$L_4 - L_5$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

welche mit der obigen übereinstimmen muss, und von welcher ganz dasselbe gilt.

§. 4. Ferner ist noch zu bemerken, dass die an sich unrichtige Halley'sche Methode die Sterblichkeitstafeln nach den Sterbelisten zu verfertigen, auf besondere Klassen von Menschen, z. B. auf Militärpersonen, Beamte, Versicherte etc. ganz und gar nicht anwendbar ist, weil diese Methode außer der Unveränderlichkeit der Bevölkerung nothwendig auch eine natürliche, in sich abgeschlossene, alle Individuen von den successiven Altern in dem natürlichen, aber in keinem willkürlich zusammengesetzten Verhältnisse darbietende Bevölkerung voraussetzt. So z. B. befinden sich unter den bei der Equitable Society Versicherten:

1494	Personen	zwischen	10	und	20	Jahr
8996	"	"	20	"	30	"
33850	"	"	30	"	40	"
45429	"	"	40	"	50	"
36489	"	"	50	"	60	"
19042	"	"	60	"	70	"
6454	"	über 70 Jahr.				
151754						

und wenn diese Personen als eine Bevölkerung betrachtet werden sollen, so wäre dieselbe wesentlich von einer natürlichen Bevölkerung verschieden, weil bei dieser die Anzahl der Lebenden bei den successiven höhern Altern immer kleiner werden muss.

Nach der Bedeutung der 4ten Kolumne der Halley'schen Sterblichkeitstafel ist die mittlere Lebensdauer $= \frac{\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + \dots}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots}$ $- \frac{1}{2} = \frac{\text{ganze Bevölkerung}}{\text{jährl. Geborene}} - \frac{1}{2} = \frac{\text{ganze Bevölkerung}}{\text{jährl. Gestorbene}} - \frac{1}{2}$, weil bei einer stationären Bevölkerung die Anzahl der jährlich Gestorbenen der Anzahl der jährlich Geborenen gleich ist; folglich erhält man für die wahre mittlere Lebensdauer, wie sie sich ergäbe, wenn man die a_0 Neugeborenen ihr ganzes Leben hindurch beobachtete, und so die Anzahlen a_1, a_2, a_3, ... der am Ende des 1sten, 2ten, 3ten, ... Jahres davon noch Lebenden bestimmte, offenbar einen unrichtigen Werth.

§. 5. Da die Bevölkerungen der meisten Länder Europas zunehmen, so hat Euler angenommen, diese Zunahme geschehe nach einer geometrischen Progression, so dass, wenn die Bevölkerung in einem gewissen Jahre $= A$ ist, dieselbe in dem folgenden Jahre $= Ae$, im dritten Jahre $= Ae^2$, ... sei. Man erhielte also die Exponenten e, wenn man die Volksmenge in einem Jahre durch die in dem vorhergehenden Jahre dividirte. Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass, wenn das Verhältniss der Geborenen in zwei auf einander folgenden Jahren $= e$ ist, dann auch sowohl das Verhältniss der ganzen Bevölkerung, als das der Gestorbenen in zwei auf einander folgenden Jahren $= e$ ist.

Die Euler'sche Voraussetzung findet aber offenbar in der Natur nicht statt; denn die in einem bestimmten Jahre Geborenen zeugen nicht schon in dem folgenden Jahre wieder Kinder, etwa wie die Zinsen eines Kapitals in dem nächsten Jahre, zu dem Kapitale geschlagen, wieder Zinsen bringen; und wir wollen uns daher bei der Euler'schen Methode nicht länger aufhalten, sondern zugleich zu der wahren Methode der Construction einer Mortalitätstafel für eine beliebig veränderliche Bevölkerung, wie sie in der Wirklichkeit stattfindet, übergehen.

§. 6. Nach der frühern Bezeichnung drücken nämlich die Brüche $\frac{a_1}{a_0} = p_0^1$, $\frac{a_2}{a_1} = p_1^2$, $\frac{a_3}{a_2} = p_2^3$, ... $\frac{a_{n+1}}{a_n} = p_n^{n+1}$ resp. die Wahrscheinlichkeiten aus, dass ein Neugeborener ein Alter von 1 Jahr, ein 1jähriger ein Alter von 2 Jahren, ... allgemein ein $n$jähriger ein Alter von $(n+1)$ Jahren erreichen wird. Von N Neugeborenen leben also am Ende des 1sten Jahres noch Np_0^1, am Ende des 2ten Jahres noch $Np_0^1 p_1^2$, am Ende des 3ten Jahres noch $Np_0^1 p_1^2 p_2^3$, ... und allgemein am Ende des $(n+1)$ten Jahres noch $Np_0^1 p_1^2 p_2^3 \dots p_n^{n+1}$. Man hat demnach folgende Mortalitätstafel:

Alter	Lebende von den resp. Altern von 0, 1, 2, 3, ... Jahren.	Sterbende von den resp. Altern von 0, 1, 2, 3, ... Jahren.	Summe der Lebenden von den Altern resp. über 0, 1, 3, ... Jahre, oder der zu durchlebenden Jahre.
0	N	$N(1-p_0^1)$	$N[\quad 1+p_0^1p_1^2+p_0^1p_1^2p_2^3+p_0^1p_1^2p_2^3p_3^4+\ldots]$
1	Np_0^1	$Np_0^1(1-p_1^2)$	$Np_0^1[\quad 1+p_1^2+p_1^2p_2^3+p_1^2p_2^3p_3^4+\ldots]$
2	$Np_0^1p_1^2$	$Np_0^1p_1^2(1-p_2^3)$	$Np_0^1p_1^2[\quad 1+p_2^3+p_2^3p_3^4+\ldots\ldots]$
3	$Np_0^1p_1^2p_2^3$	$Np_0^1p_1^2p_2^3(1-p_3^4)$	$Np_0^1p_1^2p_2^3[1+p_3^4+\ldots\ldots]$
4	$Np_0^1p_1^2p_2^3p_3^4$	$Np_0^1p_1^2p_2^3p_3^4(1-p_4^5)$	$Np_0^1p_1^2p_2^3p_3^4[1+\ldots\ldots]$
.	. . .	. . .	. . . .
.	. . .	. . .	. . . .

Diese Methode zur wirklichen Berechnung einer Mortalitätstafel gewährt den Vortheil, dass man die ganze Arbeit in mehrere Abthei-

lungen theilen kann, indem man die Sterblichkeitsgesetze für mehrere Gruppen von Lebensaltern einzeln bestimmt.

Nach der vorhergehenden Mortalitätstafel wird also die mittlere Lebensdauer eines Neugeborenen Kindes ausgedrückt durch:

$$1+p_0^1+p_0^1p_1^2+p_0^1p_1^2p_2^3+p_0^1p_1^2p_2^3p_3^4+\ldots.$$
$$=1+p_0^1+p_0^2+p_0^3+p_0^4+\ldots.,$$

weil offenbar $p_0^1p_1^2=\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_2}{a_0}=p_0^2$, $p_0^1p_1^2p_2^3=\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_3}{a_0}=p_0^3$, etc. ist, so daß diese mittlere Lebensdauer wieder als die mathematische Hoffnung erscheint, welche ein neugeborenes Kind hat, das 1ste, 2te, 3te, ... Jahr zu durchleben; denn man kann sich die Wahrscheinlichkeiten p_0^1, p_1^2, p_2^3, ... alle mit 1 Jahr multiplicirt denken. Von diesem Werthe der mittlern Lebensdauer muß aber nach dem weiter oben Gesagten $\frac{1}{2}$ abgezogen werden, um den wahren Werth derselben zu erhalten. Der wahre Werth der mittlern Lebensdauer eines neugeborenen Kindes ist also:

$$\tfrac{1}{2}+p_0^1+p_0^2+p_0^3+\ldots.$$

Die fernere mittlere Lebensdauer eines $n$jährigen ist:

$$\tfrac{1}{2}+p_n^{n+1}+p_n^{n+2}+p_n^{n+3}+\ldots.=P_n,$$

und die eines $(n+1)$jährigen:

$$\tfrac{1}{2}+p_{n+1}^{n+2}+p_{n+1}^{n+3}+p_{n+1}^{n+4}+\ldots.=P_{n+1};$$

folglich:

$$P_n=\tfrac{1}{2}+p_n^{n+1}\left(P_{n+1}+\tfrac{1}{2}\right).$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt:

$$p_n^{n+1}=\frac{P_n-\frac{1}{2}}{P_{n+1}+\frac{1}{2}},$$

und wenn man folglich eine Tafel der mittlern Lebensdauern hat, so kann man daraus eine Mortalitätstafel ableiten, weil der letzte Ausdruck successive die Werthe von p_0^1, p_1^2, ... und folglich die Anzahlen der von irgend einer Anzahl Neugeborenen am Ende des 1sten, 2ten, 3ten, ... Jahres noch Lebenden gibt.

Die fernere wahrscheinliche Lebensdauer beträgt nach

dem weiter oben Gesagten für ein neugeborenes Kind n Jahre, wenn $p_0^1 p_1^2 p_2^3 \ldots . p_{n-1}^n = \frac{1}{2}$ ist, für ein 1jähriges Kind m Jahre, wenn $p_1^2 . p_2^3 . p_3^4 \ldots . p_m^{m+1} = \frac{1}{2}$ ist, und allgemein für ein $s$jähriges r Jahre, wenn $p_s^{s+1} . p_{s+1}^{s+2} . p_{s+2}^{s+3} \ldots . p_{s+r-1}^{s+r} = \frac{1}{2}$ ist.

§. 6. Wir wollen nun noch das Verfahren mittheilen, wie Moser*) aus den Listen der Versicherungsanstalten die Sterblichkeitsgesetze, oder die Werthe von p_n^{n+1}, besonders für das hohe Alter, ableitet.

Aus den Listen solcher Institute entnimmt man die in jedem Jahre Aufgenommenen (a, b, c, ...), die in jedem Jahre Verstorbenen (α, β, γ, ...) dem Alter nach; die Aufgabe ist nun, aus diesen Datis die Sterblichkeit in den verschiedenen Altern zu finden.

Wir setzen voraus, dass man aus den Listen eine gewisse Anzahl von Jahren oder Jahrgängen heraushebt, und dass man bei der Benutzung der Listen sorgfältig die Jahrgänge unterscheide, worauf hier alles ankommt; dass man also nicht blos wisse, es seien überhaupt binnen 10 Jahren so und so viele 25jährige z. B. aufgenommen worden und gestorben, sondern dass man diese Zahlen für jedes der 10 Jahre einzeln notirt habe.

Es seien demgemäß aufgenommen:

20jährige	im 1sten Jahre a_0,	im 2ten a_1,	im 3ten a_2,	u. s. w.
21 "	" " b_0,	" " b_1,	" " b_2,	"
22 "	" " c_0,	" " c_1,	" " c_2,	"
23 "	" " d_0,	" " d_1,	" " d_2,	"

u. s. w.

wobei wir voraussetzen, dass 20 Jahre das niedrigste Alter der Aufnahme sei.

Ferner seien gestorben:

20jährige	im 1sten Jahre α_0,	im 2ten α_1,	im 3ten α_2,	u. s. w.
21 "	" " " β_0	" " β_1	" " β_2	"
22 "	" " " γ_0	" " γ_1	" " γ_2	"
23 "	" " " δ_0	" " δ_1	" " δ_2	"

u. s. w.

Somit gab es überhaupt 20jährige $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, davon starben von 20 bis 21 Jahr $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ Also ist die Wahrscheinlichkeit eines 20jährigen, 21 Jahr alt zu werden oder $p_{20}^{21} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \ldots}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots}$.

---

*) Die Gesetze der Lebensdauer. Berlin 1839.

Was nun die Zahl der 21jährigen anbetrifft, so setzt sie sich zusammen 1) aus der Zahl der Aufgenommenen $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$ 2) aus den 20jährigen, welche successive 21 Jahr alt wurden, und deren Anzahl beträgt $(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \ldots$ Die Zahl der 21jährigen beträgt folglich $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + (a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \ldots$, und da hiervon im 22sten Jahre $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots$ starben, so ist die Wahrscheinlichkeit eines 21jährigen, 22 Jahr alt zu werden, oder

$$p_{21}^{22} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + \ldots + (b_0 - \beta_0) + (b_1 - \beta_1) + \ldots}{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + \ldots + b_0 + b_1 + b_2 + \ldots}.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$p_{22}^{23} = \frac{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+\ldots+(b_0-\beta_0)+(b_1-\beta_1)+\ldots+(c_0-\gamma_0)+(c_1-\gamma_1)+\ldots}{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+\ldots+(b_0-\beta_0)+(b_1-\beta_1)+\ldots+c_0+c_1+c_2+\ldots}$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem diese Wahrscheinlichkeiten gebildet werden, geht aus diesen Werthen hervor. Es handelt sich dabei offenbar nur darum, den Zähler zu finden; der Nenner ergibt sich aus dem Zähler, wenn man die Zahl der in dem betrachteten Lebensalter Sterbenden fortlässt. So erhält man z. B. in p_{21}^{22} die Nenner, wenn man im Zähler $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ weglässt; in dem Zähler von p_{22}^{23} lässt man zu dem Ende $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ herausfallen.

Was aber die Bildung des Zählers anbetrifft, so wird man Folgendes nicht übersehen. Nehmen wir an, man benutze nur vier Jahrgänge des Instituts, so gibt es auch nur vier Werthe von den a, den $b, \ldots$ den α, β, u. s. w., von denen übrigens viele $= 0$ sein können. Nun ist es einleuchtend, dass die a_3, welche im vierten Jahre aufgenommen wurden und 20 Jahr alt waren, die Zahl der 21jährigen noch vermehren, dagegen keinen Einfluss mehr auf die 22jährigen und noch weniger auf die ältern üben werden; ebenso sind dann:

die a_2 20jährigen noch auf die 22jährigen
die a_1 " " " " 23 "
die a_0 " " " " 24 "

von Einfluss. Daher würde unter diesen Umständen

$$p_{20}^{21} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + (a_3 - \alpha_3)}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3}$$

$$p_{21}^{22} = \frac{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+(a_2-\alpha_2)+(b_0-\beta_0)+(b_1-\beta_1)+(b_2-\beta_2)+(b_3-\beta_3)}{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+(a_2-\alpha_2)+b_0+b_1+b_2+b_3}.$$

Hier fällt in p_{21}^{22} sowohl a_3, als α_3 heraus; bei dem folgenden p_{22}^{23} würde nicht allein a_2 und α_2, sondern nun auch b_3 und β_3 fortgelassen werden müssen. Daraus ergibt sich die Regel für die Bildung des Zählers, welche stattfindet, die Zahl der benutzten Jahrgänge mag so oder so groß sein. Jeder neue Zähler erhält Differenzen mit einem neuen Buchstaben (z. B. p_{21}^{22} Differenzen mit dem Buchstaben b und β), und dafür fällt von jedem bereits vorhandenen Buchstaben eine Differenz fort [z. B. in p_{21}^{22} die Differenz $(a_3-\alpha_3)$].

Es hat somit keine Schwierigkeit, die Größen p_{20}^{21}, p_{21}^{22}, p_{22}^{23}, ... in Buchstaben anzugeben; was aber die Rechnung mit Zahlen anbetrifft, so wird sie durch folgendes Verfahren mit großer Leichtigkeit auszuführen sein.

1) Man bilde die Differenzen $a_0-\alpha_0$, $a_1-\alpha_1$, $a_2-\alpha_2$, ... und bezeichne sie mit A_1, A_2, A_3, ...; ebenso nenne man die Differenzen $b_0-\beta_0$, $b_1-\beta_1$, ... B_1, B_2, ... Hat man z. B. **30** Jahrgänge gewählt, so erhält man **30** solcher Werthe A bis A_{30}, B bis B_{30}, C bis C_{30}, u. s. f. Nimmt das Institut nur bis zum **50**sten Jahre auf, so gibt es unter den Aufgenommenen keine, welche **51** und darüber alt wären; nur Todte dieses Alters gibt es φ, ψ, u. s. w. Zieht man diese Todten von den Aufgenommenen ab, so werden sie negativ, da keine Aufgenommenen vorhanden sind; als negative Größen muss man sie auch in die folgende Rechnung einführen. Dasselbe kann übrigens auch bei allen übrigen Altern vorkommen. Es kann z. B. a_1 oder die Zahl der im **2**ten Jahre aufgenommenen **20**jährigen gleich Null sein. Sterben im **2**ten Jahre zwischen dem **20**sten und **21**sten Jahre α_1, dann ist $\alpha_1-\alpha_1=-\alpha_1$, und muss auch so zur Berechnung gebraucht werden.

2) Man bilde folgendes Schema:

A	A
A_2	$A+A_2$
A_3	$A+A_2+A_3$
A_4	$A+A_2+A_3+A_4$

u. s. w.,

indem man die Werthe von A, A_2, A_3, ... unter einander schreibt, und sie von oben her successive addirt. Dabei kann man $A+A_2$ mit

A^2 bezeichnen, indem die Zahl 2 über A angibt, daſſ zwei solcher Werthe addirt worden sind. $A + A_2 + A_3$ kann man mit A^3 bezeichnen u. s. f. bis A^{30}.

Ebenso verfahre man mit den $B, C, D, \ldots$ und bilde die Summen $B^2, B^3, B^4, \ldots C^2, C^3, C^4, \ldots D^2, D^3, D^4, \ldots$

3) Die auf solche Weise erhaltenen Werthe schreibe man in folgender Ordnung:

A^{30}	A^{29}	A^{28}	A^{27}	A^{26}	A^{25}	....
	B^{30}	B^{29}	B^{28}	B^{27}	B^{26}	....
		C^{30}	C^{29}	C^{28}	C^{27}	....
			D^{30}	D^{29}	D^{28}	....,
				E^{30}	E^{29}	....

Der horizontalen Reihen giebt es hier so viele, als es Lebensjahre von dem 20sten ab gibt. Allein auch die Zahl der verticalen Reihen ist nicht größer. Denn nehmen wir das Ende des Lebens bei 90 Jahren an, und die Zahl der benutzten Jahrgänge $= 30$, so ist es klar, daſſ von den 90jährigen nur das eine Glied Z^{30} vorhanden ist, aber nicht Z^{29}, Z^{28} u. s. w. In der That kämen $Z^{29}, Z^{28}, \ldots.$ nur dnnn vor, wenn die 90jährigen 91, 92, ... Jahre alt würden, welches gegen die Voraussetzung ist. Ebenso kommen von den 89jährigen nur die beiden Größen Y^{30}, Y^{29}, aber nicht die mit einem geringern Index vor. Und so aufwärts bis zu den 61jährigen, von denen zuerst alle 30 Werthe gebraucht werden. Daher gibt es dann der verticalen Reihen eben so viele, als es Buchstaben $A, B, C, \ldots.$ oder Lebensalter über 20 Jahre hinaus gibt; außerdem sieht man, daſſ in einer solchen verticalen Reihe nie mehr als höchstens 30 Ziffern unter einander zu stehen kommen.

Bei der Berechnung hat man übrigens auf das eben Gesagte nicht weniger zu achten; denn selbst wenn man die Werthe Z^{29}, Z^{28}, ..., Y^{28}, Y^{27}, ... u. s. w., die hier nicht gebraucht werden, hingeschrieben haben sollte, so sind sie, wie man gleich sehen wird, unschädlich.

4) Man addire die Verticalreihen, so gibt ihre Summe die Zähler von p_{20}^{21}, p_{21}^{22}, p_{22}^{23} u. s. w. der Reihe nach. Die Summe der ersten Verticalreihe oder A^{30} gibt z. B. den Zähler von p_{20}^{21}, da $A^{30} = (a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \ldots$ ist. Die Anzahl der p wird bedingt durch das höchste Lebensalter; ist dasselbe z. B. 90 Jahre, so gibt es 70 solcher Werthe p, und daher schadet es nicht, wenn man in das vorige Schema die Größen Z^{29}, Z^{28} u. s. w gebracht hat.

5) Um nun auch die **Nenner** zu haben, addire man zu den Zählern die Zahl der Todten nach den verschiedenen Altern, also zu A^{30} die Zahl $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$; zu der Summe der zweiten Verticalreihe $(A^{29} + B^{30})$ die Zahl $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots$; zu der Summe der 3ten Verticalreihe die Zahl $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$ u. s. w.

Die so erhaltenen Werthe sind die Nenner von p_{20}^{21}, p_{21}^{22}, p_{22}^{23}, ... und daher sind dann diese Größen selbst bekannt und die Operation beendet.

Aus den Wahrscheinlichkeiten kann man auf die zu Anfang des §. 5 angegebene Weise die Kolumne der Lebenden berechnen, wie sie in der Mortalitätstafel üblich ist.

Nach einem Ueberschlage halte ich mich überzeugt, dass die ganze Rechnung nach dieser Anordnung in sehr kurzer Zeit zu machen sein wird, vorausgesetzt, dass die Menge der Aufgenommenen und Verstorbenen den Listen bereits entnommen ist. Ueber diese letztern sind folgende Bemerkungen zu machen. Die Rechnung setzt voraus, dass alle Verstorbenen auch zu den Aufgenommenen gehören, und diese Bedingung ist dann von selbst erfüllt, wenn man die Listen einer Gesellschaft von ihrer Gründung an benutzt. Kann man dieses nicht, wendet man vielmehr die Beobachtungen von irgend einem Jahre nach der Stiftung des Institutes an, so muss man die vorher Aufgenommenen, so viel ihrer noch am Leben sind, je nach dem höhern Alter, das sie nunmehr erreicht haben, in Rechnung bringen, indem man sie wie neuerdings, aber in diesem höhern Alter Aufgenommene ansieht.

Ein zweiter zu berücksichtigender Punkt ist, dass aus solchen Gesellschaften mehrere ausscheiden werden, über deren Todesjahr man nichts erfährt. Mit der Kategorie dieser Individuen verfährt man so, dass man sie entweder ganz aus der Rechnung lässt, und sie also auch von den Aufgenommenen ausschließt, oder man benutzt die Jahre, welche sie mit dem Institut verbunden gewesen sind, auf folgende Art. Aus den Listen entnimmt man die Zahl dieser Personen, dem Alter und Jahrgang nach, in welchem sie ausschieden, und zieht sie von den in demselben Alter und demselben Jahrgang Aufgenommenen ab. Mit den Uebrigbleibenden verfährt man dann weiter, wie mit den Aufgenommenen vorher.

Inzwischen, wenn man die Ausscheidenden solcher Art in Rechnung bringt, so hat man vorausgesetzt, dass sie sich stets zu **Anfang** des betreffenden Jahres von dem Institute trennten. Dies ist in der Wirklichkeit nicht der Fall, vielmehr scheiden sie im Laufe des Jahres aus. Es mögen z. B. in Summe 600 Personen zu Anfang des Alters 30 vorhanden sein, und davon in Summe 28 ausscheiden; so nimmt un-

ſere Rechnung zu Anfang des Jahres 472 an, während die 28 doch nicht gleich im Anfang, ſondern nach und nach austraten. Setzt man z. B. voraus, daſſ der letztere regelmäßig geſchehe, an einem Tage des Jahres ſo groß ſei als am andern, ſo ſtellt die Zahl der zwiſchen dem Alter 30 und 31 vorhandenen Individuen eine gerade Linie dar und im Mittel gab es dann an einem Tage $500-\frac{1}{2}.28$ oder 486 Perſonen. Man würde folglich von den Ausſcheidenden, in dem Jahre des Austritts, nur die Hälfte in Abrechnung zu bringen haben, und für die folgenden Jahre erſt ihren vollen Werth. Brune nimmt an,*) daſſ die eine Hälfte der Ausſcheidenden in der Mitte des Jahres abgehe, die andere am Ende deſſelben. In der erſten Hälfte ſind dann folglich 500 vorhanden, in der zweiten 486 und im Mittel des Jahres 493 oder $500-\frac{1}{4}.28$. Daher bringt derſelbe nur den vierten Theil der Austretenden in dem Jahre des Ausſcheidens in Abzug.

Dieſe Correction iſt im Ganzen nicht bedeutend, ſie wird durch die Unrichtigkeit, welche überhaupt bei der Rechnung nach vollen Jahren ſtattfindet, aufgewogen. Um ſie jedoch anzubringen, vollende man zuerſt die Rechnung ohne Rückſicht auf die Correction und laſſe daher den Austritt zu Anfang des Jahres geſchehen; man ermittele alſo die Zähler und Nenner der Wahrſcheinlichkeiten p_{20}^{21}, p_{21}^{22}, ... Nachdem dies bewirkt, addire man ſowohl zum Zähler, als zum Nenner von p_{20}^{21} die Hälfte oder nach Brune $\frac{3}{4}$tel aller zwiſchen dem 20 und 21ſten Lebensjahre Ausgeſchiedenen, zum Zähler und Nenner von p_{21}^{22} die Hälfte oder $\frac{3}{4}$tel der im 21—22ſten Lebensjahre Ausgeſchiedenen, u. ſ. w. Die Reſte geben dann durch Diviſion die verbeſſerten Werthe von p_{20}^{21}, p_{21}^{22}, ... Den Grund dieſes Verfahrens ſieht man ohne alle Schwierigkeit ein.

Die Zahlen, welche am Ende ermittelt ſein werden, bedürfen jedoch noch einer Verbeſſerung. Die Aufgenommenen nämlich ſtanden nicht genau in dem Alter, welches man in der Rechnung ihnen zuſchreibt, und man iſt z. B. genöthigt, diejenigen, welche bis 6 Monate über 20 Jahre alt ſind, noch zu den 20jährigen, und die übrigen zu den 21jährigen zu zählen. Hierdurch entſtehen in dem Endreſultate Unregelmäßigkeiten, die man am beſten in der Kolumne der Lebenden, wie ſie aus den Werthen von p berechnet wird, verbeſſert. Zu dem Zwecke kann man in dem kleinen Intervall einiger Jahre die Sterblichkeit als gleichförmig betrachten, ſo daſſ die Zahl der jährlich Sterbenden ſich in dieſem Intervall gleich bleibt, oder man

*) Crelle, Journal u. ſ. w. Bd. 16, p. 59.

bringt die Verbesserung mittelst der Formel für die Lebenden an, welche weiter unten mitgetheilt werden wird.«

Mathematisches Gesetz der Sterblichkeit.

§. 7. Es haben sich mehrere Gelehrte bemüht, das Sterblichkeitsgesetz durch eine Formel auszudrücken; allein keine gibt so genaue, mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate, als die von Moser, welche das Sterblichkeitsgesetz dahin bestimmt: daß die Anzahl der von einer gegebenen Anzahl neugeborener Kinder bis zu einem bestimmten Lebensjahre Verstorbenen der vierten Wurzel aus diesem Lebensalter proportional ist, so daß, wenn x dieses Lebensalter bezeichnet, die Anzahl der bis zu diesem Jahre Verstorbenen $= a\sqrt[4]{x}$ ist, wo die Constante a offenbar die Anzahl der im ersten Jahre verstorbenen Kinder ausdrückt, und ungefähr $= \frac{1}{5} = 0{,}2$ ist, wenn der Kürze wegen die Anzahl der Neugeborenen $= 1$ gesetzt wird.

Die Anzahl der in dem Alter x noch Lebenden wird also ausgedrückt durch:

$$1 - a\sqrt[4]{x}.$$

Der Werth a läßt sich auch durch Beobachtungen für irgend ein anderes Alter finden; denn nach der weiter unten mitgetheilten Kerseboomschen Mortalitätstafel erreichen z. B. von 1 Geborenen 0,627 das 12te Jahr, und man hat folglich:

$$1 - a\sqrt[4]{12} = 0{,}627;$$

also: $$a = \frac{0{,}373}{\sqrt[4]{12}} = 0{,}2004.$$

Vergleicht man die nach der Formel $1 - a\sqrt[4]{x}$ für die successiven Alter bis ungefähr zu 30 Jahren von 1000 Neugeborenen noch Lebenden mit der Kerseboomschen Mortalitätstafel, so erhält man folgendes Schema:

Alter.	Lebende nach Kerseboom.	Lebende nach der Formel.	Alter.	Lebende nach Kerseboom.	Lebende nach der Formel.
0	1000	1000	16	606	600
1	804	800	17	601	594
2	768	762	18	596	588
3	736	737	19	590	582
4	709	717	20	584	577
5	688	701	21	577	572
6	676	687	22	571	567
7	664	675	23	565	562
8	653	664	24	559	557
9	646	654	25	552	553
10	639	644	26	544	548
11	633	636	27	535	544
12	627	628	28	525	540
13	621	620	29	516	536
14	616	613	30	507	532
15	611	606	31	499	528

woraus erhellet, daſſ die aus der Formel abgeleiteten Resultate sehr gut mit denen der Beobachtung übereinstimmen.

Bis zum 25sten Lebensjahre gibt bald die Formel und bald die Beobachtung etwas mehr Lebende; aber von da ab gibt die Formel beständig mehr Lebende, und zwar zunehmend mehr. In der That ist auch die Formel:

$$1 - 0{,}2\sqrt[4]{x}$$

nicht bis zum höchsten Alter anwendbar; denn soll sie verschwinden, d. h. die Anzahl der Lebenden $= 0$ sein, so muſſ $x = 5^4 = 625$ sein, oder das höchste menschliche Alter müſſte 625 Jahr betragen. Hieraus erhellet schon, daſſ vom 25sten oder 30sten Jahre an, zu $a\sqrt[4]{x}$ ein neues negatives Glied treten muſſ, welches in dem ersten Viertel oder Drittel des Lebens ganz unbeträchtlich ist, für größere Werthe von x aber beträchtlicher wird und bewirkt, daſſ sich das Leben gegen das 90ste Jahr schließt.

Will man die wahrscheinliche Lebensdauer für ein neugeborenes Kind bestimmen, so hat man:

$$1 - a\sqrt[4]{x} = \tfrac{1}{2};$$

also: $$x = \left(\frac{1}{2a}\right)^4.$$

Wenn man die Formel $a\sqrt[4]{x}$ zur Bestimmung der Anzahl der in den ersten 24 Stunden ihres Lebens sterbenden Kinder anwendet, also $a\sqrt[4]{\frac{1}{365}}$ setzt, so findet man, dass die Anzahl der in diesem Alter Verstorbenen der durch Beobachtung gefundenen Anzahl der Todtgeborenen fast gleich ist. Bei der Vergleichung der aus der Formel abgeleiteten und der durch Beobachtung erhaltenen Resultate müssen aber, wenn zwischen beiden Uebereinstimmung stattfinden soll, die Todtgeborenen sowohl mit zu den Geborenen, als zu den im ersten Jahre Verstorbenen gezählt werden, und wenn dieses geschieht, so ergibt sich, dass bis zum 30sten Jahre die aus der Formel abgeleiteten Resultate mit den durch Beobachtung erhaltenen so gut übereinstimmen, als sich bei der fortwährenden Veränderung der Bevölkerung nur erwarten lässt.

Wenn man die Zahlen der Lebenden in dem ersten Vierteljahre und in den spätern Altern graphisch darstellt, also eine sogenannte Lebenscurve construirt; so sieht man, dass es dasselbe Gesetz ist, vermöge dessen in der ersten Zeit nach der Geburt eine so große Anzahl Kinder und später verhältnissmäßig viel weniger Personen sterben, und folglich rührt die große Sterblichkeit der Kinder von keinen zufälligen Ursachen her, sondern ist dem allgemeinen Sterblichkeitsgesetze gemäß.

Wie wir vorhin gesehen haben, ist der Ausdruck $a\sqrt[4]{x}$ für die Anzahl der Gestorbenen, oder $1 - a\sqrt[4]{x}$ für die der Lebenden nur bis zum 30sten Jahre anwendbar, und für die höhern Lebensalter gibt Moser seiner Formel folgende Gestalt:

$$1 - 0{,}2\sqrt[4]{x} - \frac{0{,}7125}{10^5}\sqrt[4]{x^9} - \frac{0{,}1570}{10^8}\sqrt[4]{x^{17}}.$$

Durch Vergleichung der aus dieser Formel abgeleiteten Anzahlen der Lebenden in den successiven Altern von 20 bis 80 Jahren mit den von Brune aus den Erfahrungen der allgemeinen Wittwenversorgungsanstalt zu Berlin erhält man folgendes Schema:

Alter.	Lebende Formel.	Lebende Brune.	Differenz.
20	0,577	0,577	0,000
30	0,514	0,511	+0,003
35	0,487	0,482	+0,005
40	0,458	0,454	+0,004
45	0,428	0,426	+0,002
50	0,395	0,397	—0,002
55	0,358	0,363	—0,005
60	0,315	0,320	—0,005
65	0,267	0,266	+0,001
70	0,212	0,199	+0,013
75	0,147	0,129	+0,018
80	0,073	0,065	+0,008

woraus erhellet, daſſ die Moser'sche Formel sehr gut mit diesen Erfahrungsresultaten, die alles Zutrauen verdienen, übereinstimmt. Die Erfahrungen der Berliner Wittwenversorgungsanstalt beziehen sich zwar nur auf Frauen, welche im Allgemeinen eine größere Lebensdauer haben, als die Männer; allein man ist bis jetzt nicht im Stande, den Unterschied der Lebensverhältnisse beider Geschlechter genau in Rechnung zu bringen. Nach mehrern Schriftstellern soll der Unterschied der Lebensfähigkeit zwischen beiden Geschlechtern gleich nach der Geburt am größten sein, wofür auch die verhältnissmäßig größere Anzahl todtgeborener Knaben spricht. In den spätern Jahren soll sich jedoch der Unterschied umkehren und zu Gunsten des männlichen Geschlechtes ausfallen, so daſſ das letztere vorzugsweise die höchsten Alter erreicht. Wenn sich dieses wirklich so verhielte, so dürfte man annehmen, daſſ der Unterschied der Lebensfähigkeit in den mittlern Lebebensjahren nicht beträchtlich sein werde. Es läſſt sich jedoch hierüber nichts Bestimmtes sagen, da die wenigen Mortalitätstafeln, welche die Geschlechter unterscheiden, nicht zuverläſſig genug sind. Dagegen läſſt sich leicht zeigen, daſſ es bei der Bestimmung der Lebensverhältnisse einer gemischten Bevölkerung in den mittlern und höhern Altern keinen bedeutenden Unterschied macht, wenn dazu nur Beobachtungen über Frauen benutzt werden. Ferner ist aber zu bemerken, daſſ sich das Leben in den höchsten Altern nach der Moserschen Formel schneller schließt, als nach den gewöhnlichen Mortalitätstafeln; jedoch läſſt sich bis jetzt nicht mit Gewiſſheit entscheiden, ob ein plötzlicher, oder ein allmähliger Be-

schluss des Lebens naturgemäß ist, weil das höchste Alter bei den gewöhnlichen Angaben absichtlich übertrieben wird. Gleichwohl ist Moser selbst nicht geneigt, seine Formel auch für die letzten Jahre des Lebens gelten zu lassen; denn nach allen bisherigen Mortalitätstafeln nimmt die Anzahl der jährlich Sterbenden, nachdem sie bis zu einem gewissen Jahre im hohen Alter zugenommen hat, wieder ab, und zwar:

im 69sten Jahre nach Süßmilch,
" 78 " " " Kerseboom,
" 73 " " " Wargentin,
" 75 " " " Deparcieux,
" 70 " " " Brune (Männer),
" 73 " " " Brune (Frauen),

wogegen die Mosersche Formel diese Erscheinung nicht reproducirt, weil nach ihr die Anzahl der jährlich Sterbenden bis zum höchsten Alter fortwährend zunimmt.

Da bis zum 30sten Jahre die beiden ersten Glieder $1 - a\sqrt[4]{x}$ und bis zum 60sten Jahre die vier ersten Glieder:

$$1 - a\sqrt[4]{x} - b\sqrt[4]{x^9} - c\sqrt[4]{x^{17}}$$

der Formel zur Darstellung der Beobachtungsresultate genügen, so hält es Moser für sehr wahrscheinlich, dass die vollständige Formel für die Anzahl der Lebenden in den successiven Altern eine unendliche Reihe sei, deren spätere Coefficienten sich aber schwerlich durch Beobachtungen bestimmen lassen. Moser selbst drückt sich hierüber folgendermaßen aus:

»Es hat nach meiner Ansicht ein untergeordnetes Interesse, das höchste Altersstadium noch genau durch die Formel darzustellen; viel wichtiger scheint es, darüber zur Gewissheit zu gelangen, ob der definitive Ausdruck eine unendliche Reihe sei, bei welcher Gelegenheit sich die Frage entscheiden ließe, ob dem Leben bei einem gewissen Alter eine Grenze gesteckt sei, und ob die hohen Lebensalter von 150, 160 Jahren, welche Einzelne erreicht haben, nach der Natur des Gesetzes für erreichbar zu halten sind, etc. Diese Fragen werden kurz abgeschnitten, und nichts weniger, als erledigt, wenn man durch einige wenige Glieder blos eine Uebereinstimmung der Formel mit den Beobachtungen in den höchsten Altern beabsichtigte, welche an sich sehr unwesentlich ist.«

»Die höchste Altersklasse muss man daher wohl für jetzt auf sich beruhen lassen; dem theoretischen Interesse zu genügen, sind die Be-

obachtungen unvermögend. Es gibt, dünkt mich, in diesem Betracht nur eine Aussicht, zur Kenntniss der vollständigen Formel zu gelangen, und diese besteht darin, dass man in den numerischen Coefficienten der ersten Glieder irgend ein Gesetz entdeckte, woraus die folgenden a priori abzuleiten sein würden. Zu dem Zwecke jedoch müssten dieselben mit grosser Zuverlässigkeit und mittelst solcher Beobachtungen über ganze Bevölkerungen gefunden worden sein, welche früher erörtert sind.«

Zu bemerken ist noch, dass die Formel nicht auf die Bestimmung der Anzahl der Individuen vor der Geburt oder der Embryonen bis 9 Monate vor dieser Zeit anwendbar ist, weil sie für einen negativen Werth von x imaginär wird, obgleich die Frage nach der Anzahl der Embryonen bis 9 Monate vor der Geburt an sich nicht absurd ist.

Da die Formel:

$$1-0{,}2\sqrt[4]{x}-\frac{0{,}7125}{10^5}\sqrt[4]{x^9}-\frac{0{,}1570}{10^8}\sqrt[4]{x^{17}}$$

die Anzahl der zu irgend einer Zeit, von der Geburt an gerechnet, noch Lebenden ausdrückt, so erhält man offenbar die Gesammtzahl der innerhalb eines gegebenen Zeitraumes, z. B. zwischen dem 10ten und 20sten Jahre Lebenden, wenn man von jener Formel, als Differenzialquotient betrachtet, das Integral zwischen den gegebenen Grenzen, d. h. von 10 bis 20 nimmt. Es ist also die Gesammtzahl der von 10 bis 20 Jahr Lebenden:

$$\int_{10}^{20}\left(1-0{,}2\sqrt[4]{x}-\frac{0{,}7125}{10^5}\sqrt[4]{x^9}-\frac{0{,}1570}{10^8}\sqrt[4]{x^{17}}\right)=13{,}194-7{,}151$$
$$=6{,}043.$$

Wenn man 84 Jahr als das höchste Alter betrachtet, so erhält man die ganze Bevölkerung $=35{,}59$, indem man das vorhergehende Integral von 0 bis 84 nimmt, wobei immer vorausgesetzt wird, dass jährlich einer geboren wird.

Auch die fernere mittlere Lebensdauer lässt sich leicht für ein bestimmtes Alter finden. Denn sucht man die Anzahl der Personen, welche dieses Alter überleben und dividirt sie durch die Anzahl derer, welche es erreichen, so erhält man offenbar die gesuchte fernere mittlere Lebensdauer für die betrachtete Person.

Eine Vergleichung der nach der Moserschen Formel berechneten ferneren mittlern Lebensdauern mit den von Brune, Finlaison und Deparcieux nach der Erfahrung bestimmten, gibt folgendes Schema:

Mittlere Lebensdauer.

Alter.	Formel.	Brune.	Finlaison.	Deparcieux.
15	42,01	40,65	41,8	43,46
20	39,25	38,75	38,4	40,08
30	33,05	33,15	33,2	33,96
40	26,44	26,70	27,0	27,30
50	19,86	19,83	20,3	20,24
60	13,57	13,28	14,4	13,86
70	7,66	8,11	9,2	8,34

Eine nach der Moserschen Formel berechnete Sterblichkeitstafel, sowie einige andere der besten Mortalitätstafeln befinden sich am Ende des Werkes.

Zusammengesetzte Lebenswahrscheinlichkeiten.

§. 8. Wenn nun eine beliebige Anzahl Personen $A, B, C, \ldots$ gegeben sind, so wollen wir die Anzahlen von Personen, welche nach irgend einer Mortalitätstafel die resp. Alter jener erreichen, mit $a, b, c, \ldots$ bezeichnen. Die Personen, welche resp. um n Jahre älter sind, als $A, B, C, \ldots$, wollen wir mit ${}^nA, {}^nB, {}^nC, \ldots$ und die Anzahlen derer, welche resp. die Alter der letztern erreichen, mit ${}^na, {}^nb, {}^nc, \ldots$ bezeichnen. Endlich wollen wir die Personen, welche resp. um n Jahre jünger sind, als $A, B, C, \ldots$, mit ${}_nA, {}_nB, {}_nC, \ldots$ und die Anzahl von Personen, welche nach der betrachteten Sterblichkeitstafel in ihren resp. Altern noch leben, mit ${}_na, {}_nb, {}_nc, \ldots$ bezeichnen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gegebene Person A noch n Jahre lebt, lässt sich leicht bestimmen; denn die Anzahl von Personen, welche nach der betrachteten Sterblichkeitstafel das Alter der Person A erreichen, sei $= a$ und die der Personen, welche ein um n Jahre höheres Alter erreichen, $= {}^na$, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit offenbar $= \frac{{}^na}{a}$.

Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person A innerhalb der betrachteten n Jahre stirbt, $= 1 - \frac{{}^na}{a}$.

Wenn zwei Personen A und B gegeben sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die betrachteten n Jahre überleben, $= \frac{{}^na\,{}^nb}{a\,b}$ $= \frac{{}^n(a\,b)}{a\,b}$.

Für drei Personen A, B, C ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie alle drei noch n Jahre zusammen leben, $= \frac{{}^n a\, {}^n b\, {}^n c}{a b c} = \frac{{}^n(a b c)}{a b c}$, und für eine beliebige Anzahl von Personen $A, B, C, D, \ldots$ ist endlich die Wahrscheinlichkeit, daß sie noch n Jahre zusammen leben, $= \frac{{}^n a\, {}^n b\, {}^n c\, {}^n d \ldots}{a b c d \ldots}$ $= \frac{{}^n(a b c d \ldots)}{a b c d \ldots}$.

Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb der n Jahre eine oder mehrere der betrachteten Personen $A, B, C, \ldots$ sterben, oder daß die Verbindung dieser Personen aufgelös't wird, $= 1 - \frac{{}^n(a b c d \ldots)}{a b c d \ldots}$.

Für drei Personen A, B, C ist diese Wahrscheinlichkeit $= 1 - \frac{{}^n(a b c)}{a b c}$, und für zwei Personen $= 1 - \frac{{}^n(a b)}{a b}$.

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Person A noch μ Jahre, die Person B noch ν Jahre, die Person C noch π Jahre, die Person D noch ϱ Jahre, *etc.* lebt, und zwar, daß alle diese Ereignisse zugleich stattfinden, $= \frac{{}^\mu a\, {}^\nu b\, {}^\pi c\, {}^\varrho d \ldots}{a b c d \ldots}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß diese Ereignisse nicht alle zugleich stattfinden, $= 1 - \frac{{}^\mu a\, {}^\nu b\, {}^\pi c\, {}^\varrho d \ldots}{a b c d \ldots}$.

Wir wollen $\frac{{}^n a}{a} = a_n$, $\frac{{}^n b}{b} = b_n$, $\frac{{}^n c}{c} = c_n$, *etc.* und allgemein $\frac{{}^n(a b c \ldots)}{(a b c \ldots)} = (a b c \ldots)_n$ setzen, so daß die Wahrscheinlichkeiten, daß die Personen $A, B, C, \ldots$ noch n Jahre leben, resp. durch $a_n, b_n, c_n, \ldots$ und die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Personen zusammengenommen noch n Jahre leben, durch $(a b c \ldots)_n$ ausgedrückt werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß keine dieser Personen noch n Jahre lebt, ist folglich $= (1 - a_n) . (1 - b_n) . (1 - c_n) \ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine oder mehrere dieser Personen noch n Jahre leben, wird also ausgedrückt durch $1 - (1 - a_n) . (1 - b_n) . (1 - c_n) \ldots$ Für eine Person A ist diese Wahrscheinlichkeit $= a_n$; für zwei Personen A und B ist sie $= a_n + b_n - (a b)_n$, und für drei Personen $= a_n + b_n + c_n - (ab)_n - (ac)_n - (bc)_n + (abc)_n$.

Daß von zwei gegebenen Personen A und B nach n Jahren

	leben	todt ist	dafür ist die Wahrscheinlichkeit:
1	AB	keiner	. . . . $(ab)_n$
2	A	B	$a_n(1-b_n)=a_n-(ab)_n$
3	B	A	$b_n(1-a_n)=b_n-(ab)_n$

Da die erste Größe $(ab)_n$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass beide Personen den Zeitraum von n Jahren überleben, und die Summe aus der zweiten und dritten Größe, nämlich $a_n+b_n-2(ab)_n$ die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine der beiden Personen diesen Zeitraum überlebt und die andere innerhalb desselben stirbt; so ist die Summe aller drei Größen, oder $a_n+b_n-(ab)_n$ die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine der beiden Personen den Zeitraum von n Jahren überlebt.

Dass von drei Personen A, B und C nach Verlauf von n Jahren

	leben	todt sind	dafür ist die Wahrscheinlichkeit:
1	ABC	keiner	. . . . $(abc)_n$
2	AB	C	$(ab)_n.(1-c_n)$ . . = ... $(ab)_n-(abc)_n$
3	AC	B	$(ac)_n.(1-c_n)$ . . = ... $(ac)_n-(abc)_n$
4	BC	A	$(bc)_n.(1-a_n)$ . . = ... $(bc)_n-(abc)_n$
5	A	BC	$a_n(1-b_n)(1-c_n)=a_n-(ab)_n-(ac)_n+(abc)_n$
6	B	AC	$b_n(1-a_n)(1-c_n)=b_n-(ab)_n-(bc)_n+(abc)_n$
7	C	AB	$c_n(1-a_n)(1-b_n)=c_n-(ab)_n-(bc)_n+(abc)_n$

Die erste Größe $(abc)_n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Personen A, B, C den bestimmten Zeitpunkt überleben, und die Summe aus der 2ten, 3ten und 4ten Wahrscheinlichkeit, nämlich $(ab)_n+(ac)_n+(bc)_n-3(abc)_n$, ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend zwei der fraglichen Personen den Zeitraum von n Jahren überleben und die dritte innerhalb desselben stirbt. Wenn man also zu der letzten Summe die erste Wahrscheinlichkeit $(ab\ )_n$ addirt, so erhält man $(ab)_n(ac)_n+(bc)_n-2(abc)_n$ für die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens irgend welche zwei der drei Personen A, B, C den Zeitraum von n Jahren überleben.

Die Summe aus der 5ten, 6ten und 7ten der obigen Wahrscheinlichkeiten, nämlich $a_n+b_n+c_n-2(ab)_n-2(ac)_n-2(bc)_n$

$+3(abc)_n$ drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daß irgend eine der drei Personen die n Jahre überlebt, und die beiden andern innerhalb derselben sterben. Die Summe aus allen 7 obigen partiellen Wahrscheinlichkeiten oder $a_n+b_n+c_n-(ab)_n-(ac)_n-(bc)_n+(abc)_n$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine der drei Personen A, B, C den Zeitraum von n Jahren überlebt.

Ebenso wird für eine beliebige Anzahl von Personen A, B, C, D, E, F, ... die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Anzahl derselben den Zeitraum von n Jahren überlebt und die übrigen innerhalb desselben sterben, bestimmt. Wenn z. B. fünf Personen A, B, C, D, E gegeben sind, und die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden soll, daß A, C und E den Zeitraum von n Jahren überleben, und B, D innerhalb desselben sterben; so ist dieselbe offenbar $=(ace)_n(1-b_n)(1-d_n)=(ace)_n-(abce)_n-(acde)_n+(abcde)_n$.

§. 9. Aufgabe. Wenn $m+\mu$ Personen gegeben sind, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß m derselben noch n Jahre leben und daß die übrigen μ innerhalb dieses Zeitraumes sterben.

Auflösung. Die Anzahl der verschiedenen Combinationen, jede von μ Personen, welche man aus den $m+\mu$ gegebenen Personen bilden kann, wird bekanntlich ausgedrückt durch:

$$\frac{(\mu+m)}{1}\cdot\frac{\mu+m-1}{2}\cdot\frac{\mu+m-2}{2}\cdot\frac{\mu+m-3}{4}\cdots\frac{\mu+1}{m}=K,$$

und die gesuchte Totalwahrscheinlichkeit besteht offenbar aus K Partialwahrscheinlichkeiten, wovon jede aus der Wahrscheinlichkeit zusammengesetzt ist, daß irgend eine besondere Combination von m Personen aus den K Combinationen den bestimmten Zeitraum überlebt, und daß die übrigen μ Personen innerhalb desselben sterben.

Zur Erläuterung dieser allgemeinen Betrachtung wollen wir das specielle Beispiel von 5 gegebenen Personen A, B, C, D, E betrachten. Es sei $m=2$, folglich $\mu=3$ und $K=10$, so sind die 10 verschiedenen Combinationen von 2 überlebenden, welche sich aus den 5 gegebenen Personen bilden lassen, und die entsprechenden Partialwahrscheinlichkeiten, deren Summe die gesuchte Totalwahrscheinlichkeit ist, folgende:

	Daſſ nach n Jahren leben	todt ſind	dafür iſt die Wahrſcheinlichkeit:
1	AB	CDE	$(ab)_n.(1-c_n).(1-d_n).(1-e_n)$*)
2	AC	BDE	$(ac)_n.(1-b_n).(1-d_n).(1-e_n)$
3	AD	BCE	$(ad)_n.(1-b_n).(1-c_n).(1-e_n)$
4	AE	BCD	$(ae)_n.(1-b_n).(1-c_n).(1-d_n)$
5	BC	ADE	$(bc)_n.(1-a_n).(1-d_n).(1-e_n)$
6	BD	ACE	$(bd)_n.(1-a_n).(1-c_n).(1-e_n)$
7	BE	ACD	$(be)_n.(1-a_n).(1-c_n).(1-d_n)$
8	CD	ABE	$(cd)_n.(1-a_n).(1-b_n).(1-e_n)$
9	CE	ABD	$(ce)_n.(1-a_n).(1-b_n).(1-d_n)$
10	DE	ABC	$(de)_n.(1-a_n).(1-b_n).(1-c_n)$.

Da in dieſem, und überhaupt in allen Wahrſcheinlichkeitsausdrücken die Anzahl der zweitheiligen Factoren $=\mu$ und das erſte Glied eines jeden $=1$ iſt, ſo muſſ das entwickelte Product derſelben in jeder Partialwahrſcheinlichkeit die Einheit zum erſten Gliede haben, worauf die μ einzelnen, in den zweitheiligen Factoren vorkommenden Buchſtaben, dann alle möglichen Combinationen aus je zwei der μ Buchſtaben, hierauf alle möglichen Combinationen aus je drei derſelben, u. ſ. f. bis zu der einen Combination, worin alle die μ Buchſtaben vorkommen, folgen. Da ferner die Buchſtaben in den zweitheiligen Factoren alle das Zeichen — haben, ſo muſſ jedes Product aus einer ungeraden Anzahl derſelben auch das Zeichen — haben, und jedes Product aus einer geraden Anzahl von Factoren das Zeichen $+$; und ferner iſt einleuchtend, daſſ die poſitive Einheit das erſte Glied jedes dieſer Producte iſt, woraus erhellet, welche Glieder der obigen Partialwahrſcheinlichkeiten poſitiv oder negativ ſein müſſen. Da nun die Einheit das erſte Glied des Productes der zweitheiligen Factoren jeder Partialwahrſcheinlichkeit iſt, ſo iſt klar, daſſ die erſte Ordnung der Combinationen nur einmal vorkommt, und da die Anzahl der zweitheiligen Factoren in dem Ausdrucke jeder Partialwahrſcheinlichkeit $=\mu$ iſt, ſo iſt die Anzahl der einzelnen Buchſtaben in ihrem Producte auch $=\mu$ und folglich iſt die Anzahl der Combinationen von $m+1$ Buchſtaben in jeder Partialwahrſcheinlichkeit $=\mu$. Aber die Anzahl der Partialwahrſchein-

*) $=(ab)_n[1-c_n-d_n-e_n+(cd)_n+(ce)_n+(de)_n-(cde)_n]$
$=(ab)_n-(abc)_n-(abd)_n-(abe)_n+(abcd)_n+(abce)_n+(abde)_n-(abcde)_n$, u. ſ. f.

lichkeiten ist $= K$ und folglich die Gesammtzahl der Combinationen von $(m+1)$ Buchstaben in dem Ausdrucke der Totalwahrscheinlichkeit $= \mu K$. Die Gesammtzahl der verschiedenen Combinationen von $m+1$ Buchstaben oder Elementen, welche man aus $m+\mu$ Elementen bilden kann, beträgt aber nur $\frac{\mu}{m+1}K$, woraus folgt, dass die Combinationen der zweiten Ordnung $m+1$ mal vorkommen; denn offenbar kommen die verschiedenen Combinationen derselben Ordnung gleich viele Male vor.

Da die Anzahl der Combinationen, jede aus zwei Elementen von μ Elementen, $= \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$ ist, so ist die Anzahl der Combinationen, jede von $\mu+2$ Buchstaben in dem Ausdrucke der Totalwahrscheinlichkeit $= \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}K$; aber die Anzahl der verschiedenen Combinationen, jede von $m+2$ Elementen, welche sich aus $m+\mu$ Elementen bilden lassen, ist nur $= \frac{\mu}{m+1} \cdot \frac{\mu-1}{\mu+2}K$, und folglich kommen die Combinationen der 3ten Ordnung $\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}$ mal vor.

Allgemein, wenn ν irgend eine zwischen 1 und $\mu+2$ liegende ganze Zahl ist, so wird die Anzahl der Combinationen, jede von $\nu-1$ Elementen, welche sich aus μ Elementen bilden lassen, ausgedrückt durch:

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-(\nu-2))}{1.2.3.4\ldots.\nu-1}$$

und dieses ist auch die Anzahl der Combinationen von $m+\nu-1$ Elementen in dem Ausdrucke jeder Partialwahrscheinlichkeit, deren Anzahl $= K$ ist. Folglich ist auch die Anzahl der Combinationen, jede von $m+\nu-1$ Elementen in der Totalwahrscheinlichkeit gleich:

$$\left[\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots.(\mu-(\nu-2))}{1.2.3.4\ldots.\nu-1}\right]K;$$

aber die Anzahl der verschiedenen Combinationen, jede von $m+\nu-1$ Elementen, welche sich aus $m+\mu$ Elementen bilden lassen, beträgt nur:

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-(\nu-2))}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+(\nu-1))}K,$$

so dass, wenn ν nicht kleiner ist, als 2, die Combinationen der νten Ordnung $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+(\nu-1))}{1.2.3\ldots.\nu-1}$ mal vorkommen.

Hiernach ist einleuchtend, daſſ, wenn wir die ganze νte Ordnung von Combinationen, d. h. alle Combinationen, von $m+\nu-1$ Buchstaben oder Personen, welche sich aus der Gesammtzahl der $m+\mu$ Personen bilden lassen, mit $\overset{\nu}{o}$ bezeichnen und die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daſſ alle Personen jeder Combination dieser Ordnung zusammen noch n Jahre überleben, mit $\overset{\nu}{o}_n$, so wird die gesuchte Totalwahrscheinlichkeit ausgedrückt durch:

$$\overset{1}{o}_n - \frac{(m+1)}{1} \cdot \overset{2}{o}_n + \frac{(m+1)}{1} \cdot \frac{(m+2)}{2} \overset{3}{o}_n - \frac{(m+1)}{1} \cdot \frac{(m+2)}{2} \cdot \frac{(m+3)}{3} \overset{4}{o}_n + etc.,$$

worin die letzte Ordnung, welche nur eine Combination aller $(m+\mu)$ Buchstaben oder Personen enthält, immer die $(\mu+1)$te ist.

Wenn $\mu=0$ ist, so hat man, was m auch sein mag, nur $\overset{1}{o} = ABC\ldots$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist in diesem Falle $\overset{1}{o}_n = (abc\ldots)_n$.

Wenn zwei Personen A und B gegeben sind und $m=1$, $\mu=1$ ist, so reducirt sich die allgemeine Formel auf:

$$\overset{1}{o}_n - 2\overset{2}{o}_n = a_n + b_n - 2(ab)_n,$$

was mit dem Obigen übereinstimmt, weil hier $\overset{1}{o}_n = a_n - b_n$ und $\overset{2}{o}_n = (ab)_n$ ist.

Wenn drei Personen A, B, C gegeben sind, $m=2$ und folglich $\mu=1$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel in:

$$\overset{1}{o}_n - 3\overset{2}{o}_n = (ab)_n + (ac)_n + (bc)_n - 3(abc)_n,$$

was mit dem Frühern ebenfalls übereinstimmt, weil hier $\overset{1}{o}_n = (ab)_n + (ac)_n + (bc)_n$ und $\overset{2}{o}_n = (abc)_n$ ist.

Wenn wieder drei Personen A, B, C gegeben sind, aber $m=1$ und folglich $\mu=2$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel in:

$$\overset{1}{o}_n - 2\overset{2}{o}_n + 3\overset{3}{o} = a_n + b_n + c_n - 2(ab)_n - 2(ac)_n - 2(bc)_n + 3(abc)_n$$

was mit dem Obigen auch übereinstimmt, weil hier $\overset{1}{o}_n = a_n + b_n + c_n$, $\overset{2}{o}_n = (ab)_n + (ac)_n + (bc)_n$ und $\overset{2}{o}_n = (abc)_n$ ist.

Hieraus erhellet auch, daſſ, wenn $m+\mu$ Personen gegeben sind, die Wahrscheinlichkeit, daſſ gerade $m+1$ derselben noch n Jahre leben und die übrigen $\mu-1$ innerhalb dieser Zeit sterben, durch:

$$\overset{2}{o}_n - \frac{(m+2)}{1}\cdot\overset{3}{o}_n + \frac{(m+2)}{1}\cdot\frac{(m+3)}{2}\overset{4}{o}_n - \frac{(m+2)}{1}\cdot\frac{(m+3)}{2}\cdot\frac{(m+4)}{3}\overset{5}{o}_n + etc.$$

ausgedrückt wird; die Wahrscheinlichkeit, daſſ gerade $m+2$ dieser Personen die n Jahre überleben, und die $\mu-2$ übrigen innerhalb derselben sterben, durch:

$$\overset{3}{o}_n - \frac{(m+3)}{1}\overset{4}{o}_n + \frac{(m+3)}{1}\cdot\frac{(m+4)}{2}\overset{5}{o}_n - \frac{(m+3)}{1}\cdot\frac{(m+4)}{2}\cdot\frac{(m+5)}{3}\overset{6}{o}_n + etc.;$$

ferner die Wahrscheinlichkeit, daſſ $m+3$ dieser Personen diesen Zeitraum überleben und die übrigen $\mu-3$ innerhalb desselben sterben, durch:

$$\overset{4}{o}_n - \frac{(m+4)}{1}\cdot\overset{5}{o}_n + \frac{(m+4)}{1}\cdot\frac{(m+5)}{2}\overset{6}{o}_n - \frac{(m+4)}{1}\cdot\frac{(m+5)}{2}\cdot\frac{(m+6)}{3}\cdot\overset{7}{o}_n + etc.$$

u. s. f.

§. 10. Wenn irgend eine Anzahl von Personen $A, B, C\ldots$ gegeben sind, und m irgend eine ganze Zahl, aber nicht größer als die Anzahl jener Personen ist, so wollen wir die Wahrscheinlichkeit, daſſ wenigstens m derselben den Zeitraum von n Jahren überleben, mit $\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n$ bezeichnen, so daſſ, wenn m der ganzen Anzahl der Personen gleich ist, dieser Ausdruck mit dem Ausdrucke $(abc\ldots)_n$, welcher die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daſſ alle Personen die n Jahre überleben, übereinstimmt.

Wenn $m=1$ ist, so drückt $\overset{1}{\overline{(abc\ldots)}}_n$ die Wahrscheinlichkeit aus, daſſ die zuletzt noch lebende Person n Jahre überlebt. Wenn z. B. 5 Personen, A, B, C, D, E, gegeben sind, so wird die Wahrscheinlichkeit, daſſ wenigstens 3 derselben noch 9 Jahre leben, ausgedrückt durch $\overset{3}{\overline{(abcde)}}_9$.

Nun besteht aber die Totalwahrscheinlichkeit, daſſ wenigstens m der gegebenen $m+\mu$ Personen den Zeitraum von n Jahren überleben, offenbar aus den $\mu+1$ Partialwahrscheinlichkeiten, daſſ genau m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, ... $m+(\mu-2)$, $m+(\mu-1)$ und die Gesammtzahl $m+\mu$ der gegebenen Personen diesen Zeitraum überleben. Wenn man diese Partialwahrscheinlichkeiten gehörig unter einander ordnet, so hat man:

$$\begin{array}{l}\overset{1}{o}_n-\frac{(m+1)}{1}\overset{2}{o}_n+\frac{(m+1)}{1}\cdot\frac{(m+2)}{2}\cdot\overset{3}{o}_n-\frac{(m+1)}{1}\cdot\frac{(m+2)}{2}\cdot\frac{(m+3)}{3}\overset{4}{o}_n+etc.\\ \quad+\overset{2}{o}_n-\frac{(m+2)}{1}\cdot\overset{3}{o}_n+\frac{(m+2)}{1}\cdot\frac{(m+3)}{2}\overset{4}{o}_n+etc.\\ \qquad+\overset{3}{o}_n-\frac{(m+3)}{1}\overset{4}{o}_n+etc.\\ \qquad\quad+\overset{4}{o}_n+etc.\end{array}$$

und wenn man ihre Summe bildet, so erhält man:

$$\overset{1}{o}_n-m\overset{2}{o}_n+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\overset{3}{o}_n-\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+2)}{3}\overset{4}{o}_n$$
$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+2)}{3}\cdot\frac{(m+3)}{4}\overset{5}{o}_n-etc.=\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n$$

für die Totalwahrscheinlichkeit.

Wenn blos zwei Personen A, B gegeben sind und $m=2$, folglich $\mu=0$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel in $\overset{1}{o}_n=(ab)_n$; aber wenn $m=1$ und $\mu=1$ ist, so geht sie über in $\overset{1}{o}_n-\overset{2}{o}_n=a_n+b_n-(ab)_n=\overset{1}{\overline{(ab)}}_n$.

Wenn drei Personen A, B, C gegeben sind, $m=3$, und folglich $\mu=0$ ist, so wird die allgemeine Formel: $\overset{1}{o}_n=(abc)_n$. Wenn $m=2$ und folglich $\mu=1$ ist, so geht sie über in: $\overset{1}{o}_n-2\overset{2}{o}_n=(ab)_n+(a\ )_n+(bc)_n-2(abc)_n=\overset{2}{\overline{(abc)}}_n$. Wenn $m=1$ und folglich $\mu=2$ ist, so wird sie: $\overset{1}{o}_n-\overset{2}{o}_n+\overset{3}{o}_n=a_n+b_n+c_n-(ab)_n-(ac)_n-(bc)_n+(abc)_n\ \overset{1}{\overline{(abc)}}_n$, was alles mit dem Frühern übereinstimmt.

§. 11. Aufgabe. Wenn $m+\mu$ Personen A, B, C, ... und $m'+\mu'$ andere Personen P, Q, R, ... gegeben sind, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß nach Verlauf von n Jahren die Anzahl der von den Personen P, Q, R, ... noch lebenden kleiner ist, als m', und daß die Anzahl der von den Personen A, B, C' ... nach n Jahren noch lebenden nicht kleiner ist, als m.

Auflösung. Wenn die Wahrscheinlichkeit, daß m' Personen von P, Q, R, ... den fraglichen Zeitraum überleben, $=\overset{m'}{\overline{(pqr\ldots)}}_n$

ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß nicht so viele dieser Personen diesen Zeitraum überleben $= 1 - \overset{m'}{\overline{(pqr\ldots)}}_n$

Aber die Wahrscheinlichkeit, daß von den Personen $A, B, C, \ldots$ wenigstens m den fraglichen Zeitraum überleben, ist $= \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n$, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den Personen $A, B, C, \ldots$ wenigstens m und von den Personen $P, Q, R, \ldots$ weniger, als m' der Zeitraum von n Jahren überleben:

$$\left[1 - \overset{m'}{\overline{(pqr\ldots)}}_n\right] \cdot \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n = \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n \cdot \overset{m'}{\overline{(pqr\ldots)}}_n$$

Nun bezeichnen, wie früher, $\overset{\nu}{o}$ in Beziehung auf die Personen $A, B, C, \ldots$ die νte Ordnung der Combinationen und $\underset{\nu'}{o}$ die ν'te Ordnung der Combinationen der Personen $P, P, R, \ldots$, d. h. jede mögliche Combination von $m' + (\nu' - 1)$ Personen, welche aus $m' + \mu'$ Personen gebildet werden kann; so ist:

$$\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n = \overset{1}{o}_n - \frac{m}{1} \cdot \overset{2}{o}_n + \frac{m}{1} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot \overset{3}{o}_n - \frac{m}{1} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot \frac{(m+2)}{3} \cdot \overset{4}{o}_n$$
$$+ \frac{m}{1} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot \frac{(m+2)}{3} \cdot \frac{(m+3)}{4} \cdot \overset{5}{o}_n - etc.$$

und:

$$\overset{m'}{\overline{(pqr\ldots)}}_n = \underset{1}{o}_n - \frac{m}{1} \cdot \underset{2}{o}_n + \frac{m}{1} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot \underset{3}{o}_n - \frac{m}{1} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot \frac{(m+2)}{3} \cdot \underset{4}{o}_n$$
$$+ \frac{m}{1} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot \frac{(m+2)}{3} \cdot \frac{(m+3)}{4} \underset{5}{o}_n - etc.$$

Endlich bezeichne $\underset{\nu'}{\overset{\nu}{o}}$ eine Ordnung doppelter Combinationen, welche aus allen denen besteht, die durch Verbindung jeder der möglichen Combinationen aus $m + (\nu - 1)$ der $m + \mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ mit jeder Combination aus $m' + (\nu' - 1)$ der $m' + \mu'$ Personen $P, Q, R, \ldots$ entstehen, so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit ausgedrückt durch:

$$
\begin{aligned}
&+ \overset{1}{o}_n - \frac{m}{1}\overset{2}{o}_n + \left(\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{1}\right)\overset{3}{o}_n - etc.\\
&- \overset{1}{\underset{1}{o}}_n + \frac{m'}{1}\overset{1}{\underset{2}{o}}_n - \left(\frac{m'}{1}\cdot\frac{(m'+1)}{2}\right)\overset{1}{\underset{3}{o}}_n + etc.\\
&+ \frac{m}{1}\cdot\overset{2}{\underset{1}{o}}_n - \frac{m}{1}\cdot\frac{m'}{1}\overset{2}{\underset{2}{o}}_n + \frac{m}{1}\cdot\left(\frac{m'}{1}\cdot\frac{(m'+1)}{2}\right)\overset{2}{\underset{3}{o}}_n - etc.\\
&- \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\overset{3}{\underset{1}{o}}_n + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{1}\cdot\frac{m'}{1}\overset{3}{\underset{2}{o}}_n + \left(\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\right)\cdot\left(\frac{m'}{1}\cdot\frac{(m'+1)}{2}\right)\overset{3}{\underset{3}{o}}_n + etc.\\
&+ \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+2)}{3}\overset{4}{\underset{1}{o}}_n - \left[\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+2)}{3}\right]\frac{m'}{1}\overset{4}{\underset{2}{o}}_n + \left[\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+2)}{3}\right]\cdot\left(\frac{m'}{1}\cdot\frac{(m'+1)}{2}\right)\overset{4}{\underset{3}{o}} - etc.\\
&- \ldots\ldots\ etc. + \ldots\ldots\ etc. - \ldots\ldots\ etc. \ldots\ldots + etc.
\end{aligned}
$$

§. 12. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine einzelne Person A in einem gegebenen Jahre, z. B. in dem $n$ten Jahre, von jetzt an gerechnet, stirbt, oder eine Verbindung mehrerer Personen $A, B, C, \ldots$ sich in diesem Jahre auflös't, ist resp. gleich $a_{n-1} - a_n$ und $(abc\ldots)_{n-1} - (abc\ldots)_n$

d. h. sie ist der Ueberschuss der Wahrscheinlichkeit, das bestimmte Jahr zu erreichen, über die Wahrscheinlichkeit, es zu durchleben. Denn wenn es gewiss wäre, dass die Person A eine von den ${}^{n-1}a$ Personen wäre, welche das fragliche Jahr erreichen, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass sie in diesem Jahre stirbt, $= 1 - \frac{{}^{n}a}{{}^{n-1}a}$; allein die Wahrscheinlichkeit dieser Voraussetzung ist selbst nur $= \frac{{}^{n-1}a}{a}$, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person A in dem erwähnten Jahre stirbt $\frac{{}^{n-1}a}{a}$.

$$\left(1 - \frac{{}^{n}a}{{}^{n-1}a}\right) = \frac{{}^{n-1}a}{a} - \frac{{}^{n}a}{a} = a_{n-1} - a_n.$$

Um die Wahrscheinlichkeit der Auflösung der Verbindung der Personen $A, B, C, \ldots$ in dem bestimmten Jahre hieraus zu erhalten, braucht man nur $(abc\ldots)$ für a zu setzen. Allein dieses sind nur besondere Fälle des allgemeinen Satzes, dass die Wahrscheinlichkeit der Auflösung der Verbindung der letzten m Ueberlebenden von $m+\mu$ Personen im $n$ten Jahre, von jetzt an gerechnet, dem Unterschiede zwischen der Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindung das $m$te Jahr erreicht und der Wahrscheinlichkeit, dass sie es überlebt, gleich ist. Denn bezeichnen e und s resp. die Wahrscheinlichkeiten, dass die letzten m Ueberlebenden zusammen das $n$te Jahr erreichen und zusammen überleben, und f die Wahrscheinlichkeit, dass sich ihre Verbindung in diesem Jahre auflös't, so muss diese Auflösung nothwendig vor, in, oder nach dem $n$ten Jahre stattfinden, wofür die Wahrscheinlichkeiten resp. gleich $1-e$, f und s sind, und es ist $1-e+f+s=1$; folglich $f=e-s$.

Es sei $a_{n-1} - a_n = \mathfrak{a}_n$, $b_{n-1} - b_n = \mathfrak{b}_n$, $c_{n-1} - c_n = \mathfrak{c}_n$, ... $(abc\ldots)_{n-1} - (abc\ldots)_n = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots)_n$ und $\overset{\nu}{o}_{n-1} - \overset{\nu}{o}_n = \overset{\nu}{\mathfrak{o}}_n$, so dass $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$, ... die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, dass die Personen $A, B, C, \ldots$ in dem $n$ten Jahre, von jetzt an gerechnet, sterben, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots)_n$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Verbindung aller dieser Personen auflös't, und $\overset{\nu}{\mathfrak{o}}_n$ die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine der Verbindungen von $m+(\nu-1)$ Personen, welche sich aus allen $m+\mu$ gegebenen Personen bilden lassen, in demselben Jahre erlöscht. Ferner sei:

$$\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n = \overset{m}{\overline{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots)}}_n.$$

Wenn man blos zwei Personen A, B hat, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte von beiden in dem $n$ten Jahre, von jetzt an gerechnet, stirbt, ausgedrückt durch:

$$\overset{1}{\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}}_n = \mathfrak{a}_n + \mathfrak{b}_n - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_n. \text{ (S. 400.)}$$

Für drei Personen A, B, C wird die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Verbindung der beiden Ueberlebenden in dem $n$ten Jahre von jetzt an, auflös't, ausgedrückt durch:

$$\overset{2}{\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}}_n = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_n + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})_n + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})_n - 2\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})_n$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte dieser Personen in demselben Jahre stirbt, durch:

$$\overset{1}{\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}}_n = \mathfrak{a}_n + \mathfrak{b}_n + \mathfrak{c}_n - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_n - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})_n - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})_n + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})_n.$$

Allgemein, die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Verbindung der letzten m überlebenden der $m+\mu$ gegebenen Personen im $n$ten Jahre, von jetzt an gerechnet, auflös't, wird nach dem Vorhergehenden ausgedrückt durch:

$$\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n = \overset{m}{\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\ldots)}}_n =$$

$$\overset{1}{\mathfrak{D}}_n - \frac{m}{1}\cdot\overset{2}{\mathfrak{D}}_n + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\overset{3}{\mathfrak{D}}_n - \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+2)}{3}\overset{4}{\mathfrak{D}}_n +$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+2)}{3}\cdot\frac{(m+3)}{4}\overset{5}{\mathfrak{D}}_n - etc.$$

§. 13. Die größte fernere Lebensdauer mehrerer Personen $A, B, C, \ldots$ nach den Mortalitätstafeln, d. h. die Anzahl der Jahre zwischen ihren resp. Altern und dem höchsten in der Mortalitätstafel vorkommenden Alter, wollen wir resp. mit α, β, γ, ... bezeichnen, und wenn mehrere Personen A, B, C, ... in Verbindung mit einander betrachtet werden, so wollen wir die Anzahl Jahre zwischen dem Alter der ältesten von ihnen und dem höchsten in der Mortalitätstafel vorkommenden Alter mit τ bezeichnen, so dass, jenachdem A, oder B, oder C, ... am ältesten ist, τ gleich α, oder β, oder γ, ... ist.

Die fernere mittlere Lebensdauer oder Lebenshoffnung (§. 69) gegebener Personen A, B, C, ... wollen wir resp. mit a, b, c, ... und für t Jahr ältere Personen mit ^{t}a, ^{t}b, ^{t}c, ... bezeichnen.

Wenn es gewiss wäre, dass die Person A noch t Jahre überlebte, so wäre der gegenwärtige Werth ihrer fernern Lebensdauer oder Lebenshoffnung nach t Jahren $= {}^t\mathrm{a}$; allein die Wahrscheinlichkeit dieses Ueberlebens der t Jahre ist nur $= a_t$, und folglich ist der gegenwärtige Werth der fernern Lebensdauer der Person A nach t Jahren $= a_t . {}^t\mathrm{a}$, welche aufgeschobene fernere mittlere Lebensdauer wir mit $[\mathrm{a}]^t$ bezeichnen wollen, und ebenso für die Person B mit $[\mathrm{b}]^t$, für die Person C mit $[\mathrm{c}]^t, \ldots$

Die fernere mittlere Lebensdauer einer Person A bis zum $t$ten Jahre, von jetzt an gerechnet, wollen wir mit ${}^t[\mathrm{a}]$ bezeichnen, so ist offenbar ${}^t[\mathrm{a}] + [\mathrm{a}]^t = \mathrm{a}$, folglich ${}^t[\mathrm{a}] = \mathrm{a} - [\mathrm{a}]^t$ und ${}^t[\mathrm{b}] = \mathrm{b} - [\mathrm{b}]^t$, ${}^t[\mathrm{c}] = \mathrm{c} - [\mathrm{c}]^t, \ldots$

§. 14. Aufgabe. Wenn eine beliebige Anzahl von Personen $A, B, C, \ldots$ gegeben sind, die fernere mittlere Dauer ähnlicher Verbindungen dieser Personen, wie die gegebene für t Jahre, von jetzt an gerechnet, zu bestimmen.

Auflösung. Nach dem Vorhergehenden ist einleuchtend, dass von der Anzahl $(abc\ldots)$ jetzt existirender, ähnlicher Verbindungen wie die gegebene, ${}^n(abc\ldots)$ das $n$te Jahr vollständig überleben und dass die Summe aller dieser Verbindungsdauern für dieses Jahr $= {}^n(abc\ldots)$ Jahre ist. Auch ist klar, dass die Anzahl solcher Combinationen, welche zur Auflösung der Verbindungen hinreichend sind, im $n$ten Jahre $= {}^{n-1}(abc\ldots) - {}^n(abc\ldots)$ ist, und da jede dieser Verbindungen vor ihrer Auflösung im Allgemeinen noch einen Theil φ des Jahres existirt; so ist die Summe der Verbindungsdauern für alle Combinationen, welche sich im $n$ten Jahre auflösen, $= [{}^{n-1}(abc\ldots)\varphi - {}^n(abc\ldots)\varphi]$ Jahre, und wenn man hierzu für die überlebenden Combinationen ${}^n(abc\ldots)$ Jahre addirt, so erhält man:

$$[{}^{n-1}(abc\ldots)\varphi + {}^n(abc\ldots).(1-\varphi)] \text{ Jahre}$$

für die gesammte Verbindungsdauer der $(abc\ldots)$ jetzt existirenden Verbindungen für das $n$te Jahr oder der überlebenden Verbindungen derselben.

Wenn man in diesem Ausdrucke für n successive die Zahlen 1, 2, 3, $\ldots t$ setzt, und die erhaltenen Resultate alle zusammenaddirt, so bekommt man:

$$(abc\ldots)\varphi + {}^1(abc\ldots)(1-\varphi) + {}^1(abc\ldots)\varphi + {}^2(abc\ldots)(1-\varphi) + {}^2(abc\ldots)\varphi + \ldots + {}^{t-2}(abc\ldots)\varphi + {}^{t-1}(abc\ldots)(1-\varphi) + {}^{t-1}(abc\ldots)\varphi + {}^t(abc\ldots)(1-\varphi) = {}^1(abc\ldots) + {}^2(abc\ldots) + {}^3(abc\ldots) + \ldots + {}^t(abc\ldots) + \varphi[(abc\ldots) - {}^t(abc\ldots)]$$

für die gesammte Verbindungsdauer aller $(abc\ldots)$ Combinationen für den bestimmten Zeitraum, und wenn man sie durch die Anzahl $(abc\ldots)$ der Combinationen dividirt, so erhält man:

$$(abc\ldots)_1+(abc\ldots)_2+(abc\ldots)_3+\ldots+(abc\ldots)_t+\varphi[1-(abc\ldots)_t]$$

für die mittlere Verbindungsdauer jeder Combination innerhalb der bestimmten Zeit, welche wir daher mit ${}^t[\mathrm{abc}\ldots]$ bezeichnen wollen.

Wenn $t=\tau$ ist, so ist ${}^t[\mathrm{abc}\ldots]=(\mathrm{abc}\ldots)$, $(abc\ldots)_t=0$ und man hat:

$$(\mathrm{abc}\ldots)=(abc\ldots)_1+(abc\ldots)_2+(abc\ldots)_3+\ldots+(abc\ldots)_{\tau-1}+\varphi$$

für die gesammte mittlere Verbindungsdauer der betrachteten Personen.

Wenn man $(abc\ldots)$ für a und τ für α substituirt, so lässt sich nach dem Vorhergehenden auch die Auflösungserwartung der Verbindung irgend einer Anzahl gegebener Personen A, B, C, ... bestimmen.

Ferner soll dem Vorhergehenden gemäß die mittlere Verbindungsdauer der letzten m Ueberlebenden von $(m+\mu)$ Personen mit $\overline{(\mathrm{abc}\ldots)}^{m}$ bezeichnet werden.

Auch kann man nach dem Vorhergehenden die Auflösungserwartung der Verbindung der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen bestimmen.

§. 15. Da das allgemeine Glied einer Reihe wie $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{\alpha-1}+a_{\alpha-2}+a_{\alpha-3}+\ldots$ durch a_n ausgedrückt wird, so wollen wir in Zukunft die Summe einer solchen Reihe durch Σa_n bezeichnen, und ${}^t[\Sigma a_n]$ soll die Summe der t ersten Glieder einer solchen Reihe bezeichnen.

Hiernach hat man nach dem Obigen:

$\mathrm{a}=\Sigma a_n+\frac{1}{2}$, folglich $\Sigma a_n=\mathrm{a}-\frac{1}{2}$ und $(\mathrm{abc}\ldots)=\Sigma(abc\ldots)_n+\varphi$, also $\Sigma(abc\ldots)_n=(\mathrm{abc}\ldots)-\varphi$. Ferner ${}^t[\mathrm{a}]={}^t[\Sigma a_n]+\frac{1}{2}(1-a_1)$, so dass ${}^t[\Sigma a_n]={}^t[\mathrm{a}]-\frac{1}{2}(1-a_t)$ ist, und:

$${}^t[(\mathrm{abc}\ldots)]={}^t[\Sigma(abc\ldots)_n]+\varphi[1-(abc\ldots)_t]$$

folglich:

$${}^t[\Sigma(abc\ldots)_n]={}^t[(\mathrm{abc}\ldots)]-\varphi[1-(abc\ldots)_t],$$

wo t immer constant und n veränderlich ist.

§. 16. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgend zwei gegebene Personen in

demselben Augenblicke sterben, ist unendlich klein. Denn die Anzahl der Augenblicke in der möglichen Lebensdauer einer jeden ist unendlich groß, und da eine jede der beiden Personen in jedem dieser Augenblicke sterben kann, so ist klar, dass die Wahrscheinlichkeit des Zusammenfallens der Augenblicke des Todes dieser Personen unendlich klein ist. Ebenso erhellet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen vor einer bestimmten Zeit in demselben Augenblicke sterben, unendlich klein ist. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn von drei Personen zwei in demselben Augenblicke sterben, auch die dritte in diesem Augenblicke stirbt, unendlich klein.

§. 17. Wenn zwei Personen A und B gegeben sind und ein bestimmter Zeitraum angegeben ist, welcher die mögliche oder größte Lebensdauer der ältesten Person nach der Mortalitätstafel nicht überschreitet, α die Anzahl der Personen von demselben Alter, derselben Constitution, etc. als A, welche in dieser Zeit, nach α gleichen Intervallen absterben mögen und β die Anzahl derselben von demselben Alter, derselben Constitution, etc als B, welche in derselben Zeit nach β gleichen Intervallen absterben, bezeichnet; so ist es, wenn beide Personen vor Ablauf dieser Zeit sterben, gleich wahrscheinlich, dass die eine, z. B. A, früher oder später als die andere B stirbt.

Denn es sei m irgend eine ganze Zahl, nicht größer als β, und B sei der Reihenfolge nach die βte der Personen derselben Art, welche in der bestimmten Zeit sterben, so verhält sich $\beta:\alpha = m:\frac{\alpha}{\beta}m$, und die größte in $\frac{\alpha}{\beta}m$ enthaltene ganze Zahl μ ist die Anzahl der Personen, wie A, welche früher gestorben sind, und die Wahrscheinlichkeit, dass A eine derselben ist, ist $=\frac{\mu}{\alpha}$.

Wenn B die $m$te der Personen ist, welche vom Ende der bestimmten Zeit an gezählt, gestorben sind, so ist die Anzahl solcher Personen, wie A, welche zwischen der Todeszeit von B und dem Ablaufe der bestimmten Zeit sterben, $=\mu$, und die Wahrscheinlichkeit, dass A eine dieser Personen ist, ist $=\frac{\mu}{\alpha}$.

Aber diese beiden Annahmen hinsichtlich der Reihenfolge des Todes von B sind gleich wahrscheinlich; denn es muss irgend eine der β Personen in Bezug auf ihren Tod, und vom Anfange der bestimmten Zeit an gerechnet, die $m$te, und irgend eine andere, vom Ende desselben Zeitraumes an gerechnet, ebenfalls die $m$te sein, und B oder irgend eine andere dieser Personen kann in irgend einer der β Perioden gleich

leicht sterben. Hieraus geht also hervor, dass jedem Falle, in welchem A früher stirbt als B, ein anderer gleich wahrscheinlicher Fall entspricht, in welchem A später stirbt als B.

Es bezeichnen ferner α, β und γ die Anzahlen von Personen, welche mit drei Personen A, B und C resp. von gleichen Altern, gleicher Constitution, etc. sind, und welche innerhalb einer bestimmten Zeit resp. nach α, β, γ gleichen Zeitintervallen absterben; so ist es, wenn alle drei Personen A, B, C innerhalb dieser Zeit sterben, gleich wahrscheinlich, dass irgend eine derselben, z. B. B, hinsichtlich der Zeit ihres Todes die erste, zweite oder dritte ist.

Denn wenn wir wieder, wie vorhin, annehmen, dass B nach der Reihenfolge des Sterbens die $m$te der Personen von demselben Alter, etc. ist, welche innerhalb dieser Zeit sterben; so ist nach dem eben Gesagten die Wahrscheinlichkeit, dass A früher stirbt, $=\frac{\mu}{\alpha}$, und ebenso erhellet, dass, wenn π die größte in $\frac{\gamma}{\beta}m$ enthaltene ganze Zahl ist, die Wahrscheinlichkeit, dass C früher stirbt, als B, durch $\frac{\pi}{\gamma}$ ausgedrückt wird. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A, als C früher stirbt, $=\frac{\mu\pi}{\alpha\gamma}$.

Auf eine ähnliche Weise ergibt sich, dass, wenn B hinsichtlich ihres Todes die $m$te der Personen von demselben Alter *etc.*, von dem Ende der bestimmten Zeit an gerechnet, ist, die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A, als C später stirbt als B, durch $\frac{\mu\pi}{\alpha\gamma}$ ausgedrückt wird. Aber nach dem vorhin Bemerkten sind die beiden Annahmen in Beziehung auf die Reihenfolge des Todes von B gleich wahrscheinlich, und folglich ist es auch gleich wahrscheinlich, dass die Person B von den drei gegebenen Personen zuerst, oder zuletzt stirbt. Wenn A zuerst stirbt, so ist es nach dem Vorhergehenden gleich wahrscheinlich, daß von den beiden Personen B, C in dem noch nicht verflossenen Theile des bestimmten Zeitraumes B zuerst oder zuletzt stirbt, d. h. von allen drei Personen die zweite oder letzte ist, welche stirbt. Wenn C zuerst stirbt, so ergibt sich auf dieselbe Weise, dass es gleich wahrscheinlich ist, dass B früher, oder später als A stirbt, d. h. der Reihenfolge des Sterbens nach die zweite oder letzte der drei Personen ist. Wenn A die zuletzt sterbende Person ist, so müssen, welche Zeit auch vorher verflossen sein mag, doch B und C innerhalb derselben gestorben sein, und aus den Vorhergehenden erhellet, dass es gleich wahrscheinlich ist, dass B hinsichtlich der Zeit ihres Todes die erste oder zweite ist. Wenn C die zuletzt sterbende Person ist, so ergibt sich auf dieselbe Weise, dass es

gleich wahrscheinlich ist, daß B früher oder später als A stirbt, d. h. hinsichtlich der Zeitfolge ihres Todes die erste oder zweite der drei gegebenen Personen ist. Nun kann aber B nicht die zweite der drei gegebenen Personen sein, wofern von den beiden Personen A und C nicht die eine früher und die andere später als sie stirbt, und wir haben bewiesen, daß es unter der Voraussetzung, daß A oder C von den drei gegebenen Personen zuerst stirbt, gleich wahrscheinlich ist, daß B die zweite oder letzte absterbende Person ist, und daß es unter der Voraussetzung, daß A oder C von den drei gegebenen Personen zuletzt stirbt, gleich wahrscheinlich ist, daß B die erste oder zweite absterbende Person ist.

Zuerst haben wir aber gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß B zuerst stirbt, dieselbe ist, als die, daß B von den drei gegebenen Personen zuletzt stirbt, woraus erhellet, daß jedem Falle, in welchem B die zweite absterbende Person ist, ein anderer, gleich wahrscheinlicher Fall entspricht, in welchem B zuerst stirbt, und ein dritter ebenso wahrscheinlicher Fall, in welchem B zuletzt stirbt. Und da B entweder die erste, oder zweite, oder dritte absterbende Person sein muß, so ist die Summe dieser drei gleichen Wahrscheinlichkeiten $=1$, und jede derselben folglich $=\frac{1}{3}$.

Hieraus erhellet, daß unter derselben Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit des Absterbens der drei gegebenen Personen in einer bestimmten Ordnung, z. B. nach der Ordnung C, A, B, durch den Bruch $\frac{1}{6}$ ausgedrückt wird. Denn wir haben eben bewiesen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß C zuerst stirbt, $=\frac{1}{3}$ ist. Wenn es also gewiß wäre, daß A früher als B stirbt, so wäre die Wahrscheinlichkeit der angegebenen Ordnung des Absterbens $=\frac{1}{3}$; aber wir haben vorher gezeigt, daß unter der gegenwärtigen Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, daß A früher als B stirbt, nur $=\frac{1}{2}$ ist, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit des Absterbens der drei gegebenen Personen in der angeführten Reihenfolge nur $=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

§. 18. Hieraus folgt auch, daß unter derselben Voraussetzung alle möglichen Ueberlebungs- oder Absterbungsordnungen (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA) der drei betrachteten Personen gleich möglich sind, und daß die Wahrscheinlichkeit für jede $=\frac{1}{6}$ ist.

Da

$$a_{n-1}=\frac{{}^{n-1}a}{a}=\frac{{}^{n}_{1}a}{a}=\frac{{}^{n}_{1}a}{{}_{1}a}\cdot\frac{{}_{1}a}{a}={}_{1}a_{n}\cdot\frac{{}_{1}a}{a}$$

ist, so hat man:

$$a_{n-1}=\frac{{}_{1}a_{n}}{{}_{1}a_{1}},\ b_{n-1}=\frac{{}_{1}b_{n}}{{}_{1}b_{1}},\ c_{n-1}=\frac{{}_{1}c_{n}}{{}_{1}c_{1}},\ etc.;$$

folglich:
$$(abc\ldots)_{n-1} = \frac{{}_1(abc\ldots)_n}{{}_1(abc\ldots)_1},$$

und es ist zu bemerken, dass, während sich der Zähler jedes dieser Brüche mit dem veränderlichen Index n ändert, der Nenner immer derselbe bleibt.

Hieraus folgt auch, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person A das $n$te Jahr nicht erreicht, oder vor dem $n$ten Jahre stirbt, durch $1 - \frac{{}_1a_n}{{}_1a_1}$ ausgedrückt wird, und für eine beliebige Verbindung von Personen $A, B, C, \ldots$ ist dieselbe Wahrscheinlichkeit $= 1 - \frac{{}_1(abc\ldots)_n}{{}_1(abc\ldots)_1}$. Der weiter oben erhaltene Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Absterbens einer Person A vor dem $n$ten Jahre kann also auch in $\frac{{}_1a_n}{{}_1a_1} - a_n$ verwandelt werden, und die Wahrscheinlichkeit für die Auflösung der Verbindung einer beliebigen Anzahl von Personen $A, B, C, \ldots$ in demselben Jahre wird ausgedrückt durch $\frac{{}_1(abc\ldots)_n}{{}_1(abc\ldots)_1} - (abc\ldots)_n$.

§. 19. **Aufgabe.** Wenn zwei Personen A und B gegeben sind, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass A früher stirbt als B.

Auflösung. Dass stirbt

im $n$ten Jahre	später	dafür ist die Wahrscheinlichkeit:
A	B	$\frac{1}{2}\left(\frac{{}_1a_n}{{}_1a_1} - a_n\right) \cdot 2\,b_n$
AB	keiner	$\frac{1}{2}\left(\frac{{}_1a_n}{{}_1a_1} - a_n\right) \cdot \left(\frac{{}_1b_n}{{}_1b_1} - b_n\right)$

und die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{{}_1a_n}{{}_1a_1} - a_n\right) \cdot \left(\frac{{}_1b_n}{{}_1b_1} + b_n\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{{}_1(ab)_n}{{}_1(ab)_1} - (ab)_n + \frac{({}_1ab)_n}{{}_1(ab)_1} - \frac{(a\,{}_1b)_n}{{}_1b_1}\right]$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass die in Rede stehende Ueberlebung im $n$ten Jahre stattfindet. Die gesuchte Totalwahrscheinlichkeit wollen wir mit $\underset{1}{\mathrm{a}}\mathrm{b}$ bezeichnen, so dass:

$$\underset{1}{\mathrm{a}}\mathrm{b} = \frac{1}{2}\Sigma\left[\frac{{}_1(ab)_n}{{}_1(ab)_1} - (ab)_n + \frac{({}_1ab)_n}{{}_1a_1} - \frac{(a\,{}_1b)_n}{{}_1b_1}\right]$$

ist.

Wenn es gewiss wäre, dass $_1A$ und $_1B$ noch ein Jahr überleben, so wäre ihr Alter alsdann resp. dasselbe, als das gegenwärtige Alter von A und B, und man hätte folglich $1+\Sigma(ab)_n = \Sigma\,{}_1(ab)_n$. Aber die Wahrscheinlichkeit, dass $_1A$ und $_1B$ beide ein Jahr überleben, ist $= {}_1(ab)_1$, und folglich ist:

$$\Sigma\,{}_1(ab)_n = {}_1(ab)_1\,[1+\Sigma(ab)_n],$$

also:

$$\Sigma\frac{{}_1(ab)_n}{{}_1(ab)_1} = 1+\Sigma(ab)_n.$$

Nun sei $\Sigma(ab)_n = \mathfrak{ab} - \varphi$ (§. 15), welches wir die verkürzte mittlere Verbindungsdauer für die Personen A und B nennen und mit $\widehat{\mathfrak{ab}}$ bezeichnen wollen, so ist:

$$\Sigma\frac{{}_1(ab)_n}{{}_1(ab)_1} = 1+\widehat{\mathfrak{ab}} \text{ und } \underset{1}{\mathfrak{ab}} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{{}_1\widehat{\mathfrak{ab}}}{{}_1a_1} - \frac{\widehat{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}}}{{}_1b_1}\right).$$

Wenn man also Tafeln der verkürzten mittlern Verbindungsdauer für irgend zwei Personen wie A_1B und AB_1 berechnet hätte, so wäre die numerische Auflösung der Aufgabe leicht. Da aber solche Tafeln bis jetzt nicht bekannt sind, so wird es zweckdienlicher sein, hier zu zeigen, wie man andere, davon unabhängige Tafeln verfertigt, welche die Wahrscheinlichkeit, dass eine gegebene Person früher stirbt als eine andere gegebene Person, geben.

§. 20. Aufgabe. Wenn die Wahrscheinlichkeit ${}^1\underset{1}{(\mathfrak{ab})}$, dass eine um 1 Jahr ältere Person als A früher stirbt, als eine um 1 Jahr ältere Person als B, gegeben ist, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass A früher stirbt, als B.

Auflösung. Wenn es gewiss wäre, dass A und B noch ein Jahr lebten, so wäre die Wahrscheinlichkeit der fraglichen Ueberlebung nach diesem Jahre $= {}^1\underset{1}{(\mathfrak{ab})}$; aber da die Wahrschcheinlichkeit, dass beide Personen das erste Jahr überleben, $= \frac{{}^1(ab)}{ab}$ ist, so ist die gesuchte Ueberlebungswahrscheinlichkeit nach dem ersten Jahre nur $= \frac{{}^1(ab)}{ab}\cdot{}^1\underset{1}{(\mathfrak{ab})}$ und in dem ersten Jahre:

$$\tfrac{1}{2}(1-a_1).(1+b_1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-{}^1a}{a}.\frac{b+{}^1b}{b}\right) = \frac{1}{ab}.\tfrac{1}{2}(a-{}^1a)(b+{}^1b),$$

und wenn man folglich diese beiden Wahrscheinlichkeiten zusammenaddirt so erhält man die gesuchte Totalwahrscheinlichkeit:

$$\underset{1}{\mathrm{ab}} = \frac{1}{(ab)}\left[\tfrac{1}{2}(a - {}^1a).(b + {}^1b) + {}^1(ab).{}^1(\underset{1}{\mathrm{ab}})\right].$$

Ebenso ergibt sich, daß

$${}_1(\underset{1}{\mathrm{ab}}) = \frac{1}{{}_1(ab)}\left[\tfrac{1}{2}({}_1a - a).({}_1b + b) + (ab).\underset{1}{\mathrm{ab}}\right]$$

ist; aber das Glied $(ab).\underset{1}{\mathrm{ab}}$ in der letzten Formel ist nichts anders, als der in der vorhergehenden Gleichung zwischen den Klammern stehende Factor, und wenn man daher von dem höchsten Alter in der Tafel bis zu dem niedrigsten hinabgeht, und diese Ueberlebungswahrscheinlichkeit für jede zwei Alter, deren Unterschied derselbe ist, bestimmt, so ist das bei irgend einer Operation angewandte Glied $(ab).\underset{1}{\mathrm{ab}}$ immer schon durch die nächstvorhergehende bestimmt.

Wenn die älteste der beiden Person A, B auch die älteste in der Sterblichkeitstafel ist, so ist ${}^1(ab).{}^1(\underset{1}{\mathrm{ab}}) = 0$ und $\underset{1}{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2(ab)}.(a - {}^1a).(b + {}^1b)$.

Wenn A die älteste Person in der Sterblichkeitstafel ist, so ist ${}^1a = 0$, und $\underset{1}{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{{}^1b}{b}\right)$.

Wenn B die älteste Person in der Sterblichkeitstafel ist, so ist ${}^1b = 0$, und $\underset{1}{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^1a}{a}\right)$.

Wenn die Personen A und B in jeder Beziehung einander gleich sind, so ist ${}_1\overset{\frown}{\mathrm{ab}} = \overset{\frown}{\mathrm{a}\,{}_1\mathrm{b}}$, ${}_1b_1 = {}_1a_1$, und die weiter oben erhaltene Gleichung gibt $\underset{1}{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Person A nach Verlauf von t Jahren später stirbt als B, wollen wir mit $[(\underset{1}{\mathrm{ab}})]^t$ bezeichnen. Nun ist aber klar, daß diese Ueberlebung nach dem erwähnten Zeitraume nur dann stattfinden kann, wenn beide Personen diesen Zeitraum überleben, und wenn dieses der Fall ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A früher stirbt, als $B = {}^t(\underset{1}{\mathrm{ab}})$.

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide diesen Zeitraum über-

leben, $=(ab)_t$ und folglich wird die Wahrscheinlichkeit der aufgeschobenen Ueberlebung durch die Gleichung:

$$[(\underset{1}{a}b)]^t=(ab)_t\cdot{}^t(\underset{1}{a}b)$$

bestimmt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person B die Person A vor Ablauf der t Jahre überlebt, wollen wir mit ${}^t[(\underset{1}{a}b)]$ bezeichnen, und da die Wahrscheinlichkeiten, dass diese Ueberlebung in, oder nach dem bestimmten Zeitraume stattfindet, zusammengenommen der Totalwahrscheinlichkeit gleich sind, dass A früher stirbt, als B; so ist:

$$^t[(\underset{1}{a}b)]+[(\underset{1}{a}b)]^t=\underset{1}{a}b,$$

folglich:

$$^t[(\underset{1}{a}b)]=\underset{1}{a}b-[(\underset{1}{a}b)]^t.$$

Dass sich die Verbindung der beiden Personen A und B vor Ablauf der t Jahre auflöst, dafür ist die Wahrscheinlichkeit $=1-(ab)_t$. Aber wenn dieses Ereigniss innerhalb dieser Zeit stattfinden soll, so muss entweder A früher sterben, als B, wofür die Wahrscheinlichkeit $={}^t[(\underset{1}{a}b)]$ ist, oder B muss früher sterben, als A, wofür die Wahrscheinlichkeit $={}^t[(\underset{1}{a}b)]$ ist. Die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten ist also der Totalwahrscheinlichkeit gleich, dass sich die Verbindung der beiden Personen innerhalb der bestimmten Zeit auflöst, d. h. es ist:

$$^t[(\underset{1}{a}b)]+{}^t[(\underset{1}{a}b)]=1-(ab)_t \text{ und folglich:}$$

$$^t[(\underset{1}{a}b)]=1-(ab)_t-{}^t[(\underset{1}{a}b)].$$

Wenn $t=\tau$ ist, so ist $(ab)_t=0$, folglich $\underset{1}{b}a=1-b\underset{1}{a}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person A innerhalb der t Jahre später stirbt, als B, wollen wir mit ${}^t[(\underset{2}{a}b)]$ bezeichnen, und da, wenn diese Person innerhalb dieses Zeitraumes stirbt, wofür die Wahrscheinlichkeit $=1-a_t$ ist, sie entweder früher, oder später als B stirbt, wofür die resp. Wahrscheinlichkeiten $={}^t[(\underset{1}{a}b)]$ und $={}^t[(\underset{2}{a}b)]$ sind; so haben wir: ${}^t[(\underset{1}{a}b)]+{}^t[(\underset{2}{a}b)]=1-a_t$, folglich ${}^t[(\underset{2}{a}b)]=1-a_t-{}^t[(\underset{1}{a}b)]$.

Wenn $t = \tau$ ist, so verwandelt sich der letzte Ausdruck in $\tau[(\underset{2}{a}b)]$ $= 1 - a_\tau - \underset{1}{a}b$, und wenn t nicht kleiner ist, als α, so ist $\underset{2}{a}b = 1 - \underset{1}{a}b$ die Totalwahrscheinlichkeit, daß A später stirbt, als B.

Daß A und B beide vor Ablauf der t Jahre sterben, dafür ist die Wahrscheinlichkeit: $(1 - a_t).(1 - b_t)$. Aber diese Wahrscheinlichkeit ist offenbar auch der Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten gleich, daß A innerhalb der t Jahre später stirbt, als B, und daß B später stirbt als A. Folglich ist:

$$t[(\underset{2}{a}b)] + t[(a\underset{2}{b})] = (1 - a_t).(1 - b_t), \text{ und}$$

$$t[(a\underset{2}{b})] = (1 - a_t).(1 - b_t) - t[(\underset{2}{a}b)].$$

Wenn t nicht kleiner, als die größte Lebensdauer der jüngsten der beiden Personen nach der Sterblichkeitstafel ist, so verwandelt sich die letzte Formel in: $(a\underset{2}{b}) = 1 - (\underset{2}{a}b)$.

Leib- oder Lebensrenten.

§. 21. Was eine Leib- oder Lebensrente ist, ist bereits oben erklärt, und wir wollen den Werth einer auf eine Person A lautenden Leibrente mit A und den Werth einer auf die Verbindung einer beliebigen Anzahl von Personen $A, B, C, \ldots$ lautenden Leibrente allgemein mit $\mathrm{ABC}\ldots$ bezeichnen. Ferner sollen ${}^t\mathrm{A}$ und ${}_t\mathrm{A}$ resp. die Werthe der Leibrenten bezeichnen, welche auf Personen lauten, die resp. um t Jahre, älter oder jünger sind, als A, und allgemein wollen wir mit ${}^t(\mathrm{ABC}\ldots)$ den Werth einer Leibrente bezeichnen, welche auf die Verbindung von Personen lautet, die resp. um t Jahre älter sind als $A, B, C, \ldots$, und ebenso wollen wir mit ${}_t(\mathrm{ABC}\ldots)$ den Werth einer Leibrente bezeichnen, welche auf die Verbindung von Personen lautet, die resp. um t Jahre jünger sind als $A, B, C, \ldots$.

Ferner wollen wir den gegenwärtigen Werth von 1 Thaler, welcher nach einem Jahre gewiß gezahlt wird, mit v bezeichnen, so ist v^n der gegenwärtige Werth von 1 Thaler, welchen man erst nach Verlauf von n Jahren erhält. Aber wenn dieser Thaler am Ende des $n$ten Jahres nur dann gezahlt wird, wenn eine bestimmte Person A diesen Zeitpunkt überlebt, so wird der gegenwärtige Werth dieses Thalers nach §. 23 offenbar ausgedrückt durch $a_n v^n$.

Ebenso ist einleuchtend, daß der gegenwärtige Werth dieses Tha-

lers, wenn er nach n Jahren gezahlt wird, wofern eine bestimmte Verbindung von Personen $A, B, C, \ldots$ nach Ablauf dieser Zeit noch existirt, durch $(abc\ldots)_n v^n$ ausgedrückt wird.

Und allgemein, wenn dieser Thaler nach n Jahren nur dann gezahlt wird, wofern von irgend einer Anzahl $m+\mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ noch m derselben leben, durch $\overline{(abc\ldots)_n}^{\,m} v^n$.

Hieraus erhellet, dass allgemein $\mathrm{ABC}\ldots = \Sigma(abc\ldots)_n v^n$ ist. Wenn man blos drei Personen A, B, C betrachtet, so hat man $\mathrm{ABC} = \Sigma(abc)_n v^n$; für zwei Personen A, B ist $\mathrm{AB} = \Sigma(ab)_n v^n$ und für eine einzige Person A hat man $\mathrm{A} = \Sigma a_n v^n$.

§. 22. **Aufgabe 1.** Wenn der Werth $^1(\mathrm{ABC}\ldots)$ einer Leibrente auf die Verbindung irgend einer Anzahl von Personen gegeben ist, den Werth $\mathrm{ABC}\ldots$ einer auf die Verbindung derselben Anzahl von Personen, welche aber resp. um 1 Jahr jünger sind, lautenden Leibrente zu finden.

Auflösung. Wenn es gewiss wäre, dass die Personen $A, B, C, \ldots$ ein Jahr überlebten, so wäre der gegenwärtige Werth der auf die Verbindung der jüngern Personen lautenden Leibrente um eine Jahresrente grösser, als die auf die Verbindung der ältern Personen lautende Leibrente, d. h. $= v\,[1 + {}^1(\mathrm{ABC}\ldots)]$. Aber dass die Personen $A, B, C, \ldots$ zusammen nach einem Jahre noch leben, ist nicht gewiß, sondern hat nur eine Wahrscheinlichkeit $= (abc\ldots)_1$, und folglich ist:

$$\mathrm{ABC}\ldots = (abc\ldots)_1\, v.[1 + {}^1(\mathrm{ABC}\ldots)].$$

Für drei Personen A, B, C hat man:

$$\mathrm{ABC} = (abc)_1\, v.[1 + {}^1(\mathrm{ABC})];$$

für zwei Personen A und B ist:

$$\mathrm{AB} = (ab)_1\, v.[1 + {}^1(\mathrm{AB})],$$

und für eine einzelne Person A ist:

$$\mathrm{A} = a_1\, v(1 + {}^1\mathrm{A}).$$

Wenn die älteste der Personen $^1A, {}^1B, {}^1C, \ldots$ zugleich die älteste in der Sterblichkeitstafel ist, so ist:

$$^1(\mathrm{ABC}\ldots) = 0 \text{ und } \mathrm{ABC}\ldots = (abc\ldots)_1\, v$$

§. 23. Wenn wir den Werth einer um t Jahre aufgeschobenen

und auf die Verbindung der Personen $A, B, C, \ldots$ lautenden Leibrente, d. h. einer solchen, welche erst nach t Jahren zahlbar wird, wenn diese Verbindung von Personen noch existirt, mit $[(\mathrm{ABC}\ldots)]t$ bezeichnen; so wäre dieser Werth nach Verlauf der t Jahre, wenn diese Verbindung von Personen alsdann noch mit Gewissheit existirte, $={}^t(\mathrm{ABC}\ldots)$, und ihr gegenwärtiger Werth wäre $={}^t(\mathrm{ABC}\ldots)v^t$. Aber da es nicht gewiss ist, dass die in Rede stehende Verbindung von Personen nach t Jahren noch existirt, sondern nur eine Wahrscheinlichkeit $=(abc\ldots)_t$ hat, so ist folglich:

$$[(\mathrm{ABC}\ldots)]t=(abc\ldots)_t v^t . {}^t(\mathrm{ABC}\ldots).$$

Für eine einzelne Person A ist also: $[\mathrm{A}]t=a_t v^t . {}^t\mathrm{A}$.

§. 24. Den Werth einer auf eine beliebige Verbindung von Personen $A, B, C, \ldots$ lautenden temporären Leibrente, d. h. welche nur eine bestimmte Anzahl t von Jahren gezahlt wird, wenn diese Verbindung von Personen noch existirt, wollen wir mit $t[(\mathrm{ABC}\ldots)]$ bezeichnen, so haben wir, da die temporäre Leibrente für t Jahre und die um t Jahre aufgeschobene Leibrente offenbar der sogleich und während der ganzen Dauer der Verbindung der Personen zahlbaren Leibrente gleich ist, die Gleichung:

$$\mathrm{ABC}\ldots=t[(\mathrm{ABC}\ldots)]+[(\mathrm{ABC})]t,$$

woraus folgt:

$$t[(\mathrm{ABC}\ldots)]=\mathrm{ABC}\ldots-[(\mathrm{ABC}\ldots)]t.$$

Für eine einzelne Person A hat man folglich:

$$t[\mathrm{A}]=\mathrm{A}-[\mathrm{A}]t.$$

Wenn die Leibrente erst nach t Jahren, und von da an nur t' Jahre hindurch zahlbar ist, wofern die fragliche Verbindung von Personen noch existirt; so ist ihr Werth:

$$[t'[(\mathrm{ABC}\ldots)]]t=[\mathrm{ABC}\ldots-[(\mathrm{ABC}\ldots)]t']t$$
$$=[(\mathrm{ABC}\ldots)]t-[(\mathrm{ABC}\ldots)](t+t').$$

Wenn t nicht kleiner ist als $\tau-1$, so ist ${}^t(\mathrm{ABC}\ldots)=0$; folglich $[(\mathrm{ABC}\ldots)]t=0$ und $t[(\mathrm{ABC}\ldots)]=\mathrm{ABC}\ldots$; folglich für eine einzelne Person A ist $t[\mathrm{A}]=\mathrm{A}$.

§. 25. Aufgabe 2. Den gegenwärtigen Werth $\overset{m}{\overline{ABC\ldots}}$ einer Leibrente zu finden, welche auf die Verbindung der letzten m von $m+\mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ lautet.

Auflösung. Wenn $\mu=0$ ist, so lautet die Leibrente auf die Verbindung aller Personen und ihr Werth wird auf die in der vorhergehenden Aufgabe angegebene Art gefunden. Da aber in der Praxis selten mehr als drei Personen in Betracht kommen, so wollen wir zuerst blos die folgenden drei vorkommenden Fälle betrachten, nämlich 1) wenn die Leibrente auf die überlebende von zwei Personen A und B lautet, in welchem Falle ihr Werth durch $\overset{1}{\overline{AB}}$ ausgedrückt wird; 2) wenn die Leibrente auf die überlebende von drei Personen A, B, C lautet, wo ihr Werth durch $\overset{1}{\overline{ABC}}$ ausgedrückt wird, und 3) wenn sie auf die Verbindung der beiden überlebenden dieser drei Personen lautet, wo alsdann ihr Werth durch $\overset{2}{\overline{ABC}}$ ausgedrückt wird.

Fall	Die Leibrente lautet auf	Wahrscheinlichkeit der Existenz der Person, oder der Verbindung von Personen nach Verlauf von n Jahren.
1	$\overset{1}{\overline{AB}}$	$a_n+b_n-(ab)_n$.
2	$\overset{1}{\overline{ABC}}$	$a_n+b_n+c_n-(ab)_n-(ac)_n-(bc)_n+(abc)_n$.
3	$\overset{2}{\overline{ABC}}$	$(ab)_n+(ac)_n+(bc(_n-2(abc)_n$. (S. 393 — 394.)

Es ist also im ersten Falle $\overset{1}{\overline{AB}}=A+B-AB$, (S. 415.)

im zweiten Falle $\overset{1}{\overline{ABC}}=A+B+C-AB-AC-BC+ABC$,

und im dritten Falle $\overset{2}{\overline{ABC}}=AB+AC+BC-2ABC$.

Allgemeine Auflösung. Wenn ν irgend eine ganze Zahl, nicht größer als $\mu+1$, und $\overset{\nu}{o}$ die Summe der Werthe der Leibrenten auf alle in der νten Ordnung von Combinationen vorkommenden Verbindungen von Personen, d. h. jeder möglichen Combination aus $\mu+\nu-1$ aller $m+\mu$ Personen bezeichnet; so wird die Aufgabe für jeden Fall durch die allgemeine Formel:

$$\overline{\overset{m}{\mathrm{ABB}}}\ldots = \overset{1}{o} - m\overset{2}{o} + m\frac{m+1}{2}\overset{3}{o} - m\,.\,\frac{m+1}{2}\,.\,\frac{m+2}{3}\overset{4}{o} + etc.$$

gelöst (S. 400).

Wenn $m=1$ ist, so verwandelt sich diese allgemeine Formel in:

$$\overline{\overset{1}{\mathrm{ABC}}}\ldots = \overset{1}{o} - \overset{2}{o} + \overset{3}{o} - \overset{4}{o} + \ldots,$$

wo der Index jeder Ordnung die Anzahl der in jeder Verbindung vorkommenden Personen angibt.

Wenn man blos zwei Personen A und B hat, so verwandelt sich die allgemeine Formel in:

$$\overline{\overset{1}{\mathrm{AB}}} = \overset{1}{o} - \overset{2}{o},$$

wo $\overset{1}{o} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ und $\overset{2}{o} = \mathrm{AB}$ ist; folglich ist, wie weiter oben:

$$\overline{\overset{1}{\mathrm{AB}}} = \mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{AB}.$$

Wenn man drei Personen A, B, C betrachtet, so gibt die allgemeine Formel:

$$\overline{\overset{1}{\mathrm{ABC}}} = \overset{1}{o} - \overset{2}{o} + \overset{3}{o},$$

wo $\overset{1}{o} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$, $\overset{2}{o} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$ und $\overset{3}{o} = \mathrm{ABC}$ ist. Folglich ist, wie weiter oben:

$$\overline{\overset{1}{\mathrm{ABC}}} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - \mathrm{AB} - \mathrm{AC} - \mathrm{BC} + \mathrm{ABC}.$$

Ferner sei bei drei Personen A, B, C, $m=2$ und folglich $\mu=1$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in:

$$\overline{\overset{2}{\mathrm{ABC}}} = \overset{1}{o} - 2\overset{2}{o},$$

wo $\overset{1}{o} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$ und $\overset{2}{o} = \mathrm{ABC}$, folglich:

$$\overline{\overset{2}{\mathrm{ABC}}} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC} - 2\,\mathrm{ABC}$$

ist, wie weiter oben.

Wenn die Personen alle gleich alt sind, so hat die auf die Verbindung aller in irgend einer Combination irgend einer Ordnung vorkommender Personen lautende Leibrente genau denselben Werth als eine Leibrente, welche auf die Verbindung der Personen irgend einer andern Combination derselben Ordnung lautet. Der Werth der Leibrenten auf alle Combinationen irgend einer Ordnung ist daher dem Werthe einer Leibrente auf e i n e Combination gleich, so viele Male wiederholt, als die Ordnung Combinationen hat, so dass, wenn man die Gesammtzahl der Personen $m+\mu=\omega$ setzt und den Werth einer Leibrente auf irgend eine Combination der νten Ordnung von Personen $\left[\omega.\frac{\omega-1}{2}.\frac{\omega-2}{3}\ldots.\frac{\omega-(m+\nu-2)}{m+\nu-1}\right]$ mal für $\overset{\nu}{o}$ nimmt, die allgemeine Formel auch in diesem Falle anwendbar ist.

Wenn alle Personen gleich alt sind, und $m=1$ ist, so hat man folglich:

$$\overset{1}{\overline{\mathrm{A\,A\,A}}}\ldots=\omega\,\mathrm{A}-\omega\frac{\omega-1}{2}\mathrm{A\,A}+\omega.\frac{\omega-1}{2}.\frac{\omega-2}{3}\mathrm{AAA}-\text{etc.}$$

§. 26. Ebenso ist offenbar:

$$[(\overset{1}{\overline{\mathrm{AB}}})]t=[\mathrm{A}]t+[\mathrm{B}]t-[(\mathrm{AB})]t,$$

$$[(\overset{1}{\overline{\mathrm{ABC}}})]t=[\mathrm{A}]t+[\mathrm{B}]t+[\mathrm{C}]t-[(\mathrm{AB})]t-[(\mathrm{AC})]t-[(\mathrm{BC})]t+[(\mathrm{ABC})]t,$$

$$[(\overset{2}{\overline{\mathrm{ABC}}})]t=[(\mathrm{AB})]t+[(\mathrm{AC})]t+[(\mathrm{BC})]t-2[(\mathrm{ABC})]t$$

und allgemein:

$$[(\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}})]t=[\overset{1}{o}]t-m[\overset{2}{o}]t+m\frac{m+1}{2}[\overset{3}{o}]t-etc.$$

§. 27. Ebenso hat man:

$$t[\overset{1}{\overline{\mathrm{AB}}}]=t[\mathrm{A}]+t[\mathrm{B}]-t[\mathrm{AB}],$$

$$t[\overset{1}{\overline{\mathrm{ABC}}}]=t[\mathrm{A}]+t[\mathrm{B}]+t[\mathrm{C}]-t[\mathrm{AB}]-t[\mathrm{AC}]-t[\mathrm{BC}]+t[\mathrm{ABC}]$$

$$t[\overset{2}{\overline{\mathrm{ABC}}}]=t[\mathrm{AB}]+t[\mathrm{AC}]+t[\mathrm{BC}]-2.t[\mathrm{ABC}]$$

und allgemein:

$$t[\overset{m}{\overline{ABC\ldots}}] = t[\overset{1}{o}] - m.t[\overset{2}{o}] + m\frac{m+1}{2}t[\overset{3}{o}] - etc.$$

Wenn t nicht kleiner als $\tau - 1$ ist, so hat man:

$$[(\overset{1}{\overline{ABC}})]^t = [A]^t + [B]^t + [C]^t - [AB]^t - [AC]^t - [BC]^t$$

und:

$$t[\overset{1}{\overline{ABC}}] = t[A] + t[B] + t[C] - t[AB] - [AC] - t[BC] + t[ABC]. \quad (\text{§. 13 u. 24.})$$

Wenn wir die älteste der betrachteten Personen dadurch unterscheiden, daß wir über den sie bezeichnenden Buchstaben einen Punkt (.) setzen, und B ist die älteste von drei Personen, so verwandeln sich die beiden letzten Formeln, wenn t nicht kleiner ist, als $\beta - 1$, resp. in:

$$[(\overset{1}{\overline{A\dot{B}C}})]^t = [A]^t + [C]^t - [(AC)]^t$$

und $$t[\overset{1}{\overline{A\dot{B}C}}] = t[A] + B + t[C] - AB - t[AC] - BC + ABC, \quad (\text{§. 24.})$$

und Aehnliches gilt für den Fall, wenn t nicht kleiner ist, als $\tau - 1$.

§. 29. Aufgabe 3. Den gegenwärtigen Werth einer Leibrente zu bestimmen, welche von der gleichzeitigen Existenz der letzten m Ueberlebenden von $m + \mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ nach der Auflösung der Verbindung der letzten m' Ueberlebenden von $m' + \mu'$ anderen Personen P, Q, R, ... abhängt.

Auflösung. Wir wollen diesen Werth mit $\overset{m'}{\overline{PQR\ldots}} \,|\, \overset{m}{\overline{ABC\ldots}}$ bezeichnen. Obgleich in der Aufgabe nicht gesagt ist, daß die Personen $A, B, C, \ldots$ oder $P, Q, R, \ldots$, von deren Leben diese Leibrente abhängt, irgend ein Interesse bei derselben haben, oder nicht, was auch auf die Aufgabe weiter keinen Einfluß hat; so wollen wir doch die Personen $A, B, C, \ldots$ die Expectanten und die Personen $P, Q, R \ldots$ die Besitzer nennen, und zunächst wollen wir wieder alle besondern Fälle betrachten, welche die Aufgabe bei zwei oder drei Personen darbieten kann.

Fall.	Besitzer	Expectanten	dafür ist die Wahrscheinlichkeit:
	Daſs nach Ablauf von n Jahren todt sind	leben	
1	P	A	$(1-p_n)a_n = a_n-(ap)_n$
2	P	AB	$(1-p_n).(ab)_n = (ab)_n-(abp)_n$
3	PQ	A	$[1-(pq)_n]a_n = a_n-(apq)_n$
4	$\overset{1}{\overline{PQ}}$	A	$[1-p_n-q_n+(pq)_n]a_n = a_n-(ap)_n-(aq)_n+(apq)_n$ (§. 10.)
5	P	$\overset{1}{\overline{AB}}$	$(1-p_n).[a_n+b_n-(ab)_n] = a_n+b_n-(ab)_n-(ap)_n-(bp)_n+(abp)_n$

Ferner ist:

im Falle		der Werth einer Leibrente lautend auf:	nach der Erlöschung von
1	$P \mid A = A - AP$	A	P
2	$P \mid AB = AB - ABP$	die Verbindung AB	P
3	$PQ \mid A = A - APQ$	A	der Verbindung PQ
4	$\overset{1}{\overline{PQ}} \mid A = A - AP - AQ + APQ$	A	des Ueberlebenden von P u. Q
5	$P \mid \overset{1}{\overline{AB}} = A + B - AB - AP - BP + ABP$	den Ueberlebenden von A u. B	P

Allgemeine Auflösung. Wenn $\overset{\nu}{O}$ die Summe der Werthe der Leibrenten auf alle Verbindungen der Expectanten in der νten Combinationsordnung, $\underset{\nu'}{O}$ dieselbe Summe für alle Verbindungen der Besitzer in der ν'ten Combinationsordnung und $\overset{\nu}{\underset{\nu'}{O}}$ die Summe der Werthe der Leibrenten auf die Verbindung der Personen in jeder der doppelten Combinationen, welche gebildet werden können, wenn man jede Combination der νten Ordnung der Expectanten mit jeder Combination der ν'ten Ordnung der Besitzer verbindet, bezeichnet; so wird die Aufgabe in jedem Falle durch folgende allgemeine Formel gelöst:

$$\overline{\text{PQR}\ldots}^{\,m'}|\overline{\text{ABC}\ldots}^{\,m} =$$

$$\begin{array}{llll}
+ & \overset{1}{O} - & m\overset{2}{O} + & m.\frac{m+1}{2}\overset{3}{O} - etc. \\
- & \overset{1}{\underset{1}{O}} + & m'\underset{2}{O} - & \left(m'.\frac{m'+1}{2}\right)\underset{3}{O} + etc. \\
+ & m\overset{2}{\underset{1}{O}} - & mm'\overset{2}{\underset{2}{O}} + & m\left(m'.\frac{m'+1}{2}\right)\overset{2}{\underset{3}{O}} - etc. \\
- & m.\frac{m+1}{2}\overset{3}{\underset{1}{O}} + & \left(m.\frac{m+1}{2}\right)m'\overset{3}{\underset{2}{O}} - & \left(m.\frac{m+1}{2}\right).\left(m'.\frac{m'+1}{2}\right)\overset{3}{\underset{3}{O}} + etc. \\
+ & m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}.\overset{4}{\underset{1}{O}} - & \left(m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}\right)m'\overset{4}{\underset{2}{O}} + & \left(m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}\right).\left(m'.\frac{m'+1}{2}\right)\overset{4}{\underset{3}{O}} - etc. \\
 & etc. & etc. & etc.
\end{array}$$

Diese Aufgabe begreift offenbar die zweite als besondern Fall unter sich.

Wenn $\mu = 0$ und $\mu' = 0$ ist, so hängt die fragliche Leibrente von der gleichzeitigen Existenz aller Expectanten nach der Erlöschung der Ver=

bindung aller Besitzer ab. Man hat also blos eine Combinationsord-nung $\overset{1}{O}$ der Expectanten, welche aber blos eine Combination enthält, worin alle diese Personen vorkommen, und eine doppelte Combination $\overset{1}{\underset{1}{O}}$ aus allen Expectanten und allen Besitzern, welche wir mit (ABC... PQR...) bezeichnen wollen, und die allgemeine Formel verwandelt sich in:

$$PQR\ldots|ABC\ldots = \overset{1}{O} - \overset{1}{\underset{1}{O}} = ABC\ldots - (ABC\ldots PQR\ldots).$$

Wenn $\mu = 0$ und $m' = 1$ ist, so hängt die Leibrente von der gleichzeitigen Existenz aller Expectanten nach dem Tode aller Besitzer ab. Man hat also wieder blos eine Combination der Expectanten und die allgemeine Formel verwandelt sich in:

$$\overset{1}{\overline{PQR\ldots}}|ABC\ldots = \overset{1}{O} - \overset{1}{\underset{1}{O}} + \overset{1}{\underset{2}{O}} - \overset{1}{\underset{3}{O}} + \overset{1}{\underset{4}{O}} - etc.$$

wo wegen $m' + \nu' - 1 = \nu'$ der Index jeder Combinationsordnung der Besitzer die Anzahl der in jeder Combination vorkommenden Besitzer angibt.

Wenn $m = 1$ und $\mu' = 0$ ist, so hängt die Leibrente von dem letzten Ueberlebenden der Expectanten nach der Erlöschung der Verbin-dung aller Besitzer ab. Man hat also blos eine Combinationsordnung der Besitzer, welche nur aus der einen Combination aller Besitzer be-steht, und die allgemeine Formel verwandelt sich in:

$$\begin{aligned} PQR\ldots|\overset{1}{\overline{ABC\ldots}} &= \overset{1}{O} - \overset{2}{O} + \overset{3}{O} - \overset{4}{O} + \ldots \\ &\quad - \overset{1}{\underset{1}{O}} + \overset{2}{\underset{1}{O}} - \overset{3}{\underset{1}{O}} + \overset{4}{\underset{1}{O}} - \ldots \\ &= \overset{1}{\overline{ABC\ldots}} - \overset{1}{\underset{1}{O}} + \overset{2}{\underset{1}{O}} - \overset{3}{\underset{1}{O}} + \overset{4}{\underset{1}{O}} - \ldots \text{ (S. 418.)} \end{aligned}$$

wo der Index jeder Combinationsordnung der Expectanten wegen $m + \nu - 1 = \nu$ die Anzahl der in jeder Combination vorkommenden Expectan-ten angibt.

Wenn $m = 1$ und $m' = 1$ ist, so hängt die Leibrente von dem letzten Ueberlebenden der Expectanten nach dem Tode des letzten über-lebenden Besitzers ab, und die allgemeine Formel verwandelt sich in:

$$\overline{PQR\ldots}^{1}|\overline{ABC\ldots}^{1} = \overset{1}{O} - \overset{2}{O} + \overset{3}{O} - \overset{4}{O} + \ldots$$
$$- \underset{1}{\overset{1}{O}} + \underset{2}{\overset{1}{O}} - \underset{3}{\overset{1}{O}} + \underset{4}{\overset{1}{O}} - \ldots$$
$$+ \underset{1}{\overset{2}{O}} - \underset{2}{\overset{2}{O}} + \underset{3}{\overset{2}{O}} - \underset{4}{\overset{2}{O}} + \ldots$$
$$- \underset{1}{\overset{3}{O}} + \underset{2}{\overset{3}{O}} - \underset{3}{\overset{3}{O}} + \underset{4}{\overset{3}{O}} - \ldots$$
$$etc. \quad etc. \quad etc. \quad etc.$$

wo wegen $m+\nu-1=\nu$ und $m'+\nu'-1=\nu'$ der Index jeder einfachen Combinationsordnung die Anzahl der in jeder dieser Combinationen vorkommenden Personen angibt, und die Summe der Indices jeder Ordnung doppelter Combinationen die Anzahl der in jeder doppelten Combination vorkommenden Personen. Die erste Horizontalreihe enthält offenbar alle verschiedenen Combinationen, welche sich aus den Expectanten bilden lassen, und wenn n irgend eine ganze Zahl bezeichnet, welche die Anzahl der verschiedenen Combinationsordnungen der Expectanten nicht überschreitet, so enthält die $n$te Horizontalreihe nach der ersten immer alle doppelten Combinationen, welche gebildet werden können, wenn man jede Combination der $n$ten Ordnung der Expectanten mit jeder Combination aller Ordnungen der Besitzer verbindet.

Hieraus erhellet, dass die Formel alle verschiedenen Combinationen enthält, welche sich aus allen Personen, sowohl den Expectanten, als Besitzern, bilden lassen, mit Ausnahme der einfachen Combinationen, welche sich aus den Besitzern allein bilden lassen, und welche alle in dem Ausdrucke des Werthes einer Leibrente, lautend auf den letzten überlebenden Besitzer, nämlich in:

$$\overline{PQR\ldots}^{1} = \underset{1}{O} - \underset{2}{O} + \underset{3}{O} - \underset{4}{O} + \ldots$$

vorkommen. Wenn also diese letzte Ordnung von Combinationen mit den hier angegebenen Zeichen zu der vorhergehenden Formel addirt wird, so enthält die Summe alle möglichen Combinationen aller Personen, sowohl der Expectanten, als der Besitzer, und wenn jede Combination irgend einer Ordnung nur eine einzelne Person, oder eine ungerade Anzahl verbundener Personen enthält, so kommt diese Combinationsordnung in der Formel mit dem positiven Zeichen vor; aber wenn die Anzahl der Personen in jeder Combination dieser Ordnung gerade ist, so ist das Zeichen dieser Ordnung negativ.

Hieraus folgt, daſſ das ſo gebildete Aggregat den Werth einer Leibrente, lautend auf die letzte überlebende aller Perſonen, ſowohl der Expectanten, als Beſitzer, welchen wir mit $\overset{1}{\overline{ABC\ldots PQR\ldots}}$ bezeichnen wollen, ausdrückt, und wir haben folglich:

$$\overset{1}{\overline{PQR\ldots}}\,|\,\overset{1}{\overline{ABC\ldots}} = \overset{1}{\overline{ABC\ldots PQR\ldots}} - \overset{1}{\overline{PQR\ldots}}$$

Wenn die Geſammtzahl der Expectanten und Beſitzer nicht größer iſt als 3, ſo kann, da wenigſtens ein Expectant vorhanden iſt, die Anzahl der Beſitzer niemals größer ſein als 2, und da wenigſtens ein Beſitzer da ſein muſſ, ſo kann die Anzahl der Expectanten nicht größer ſein als 2. Die allgemeine Formel reducirt ſich alſo auf $\overset{1}{O} - m\overset{2}{O} - \underset{1}{\overset{1}{O}} + m\underset{1}{\overset{2}{O}} + m'\underset{2}{\overset{1}{O}}$. Aber wenn $m = 2$ iſt, ſo kann blos die eine Ordnung $\overset{1}{O}$ der Combinationen der Expectanten vorkommen und es iſt $\overset{2}{O} = 0$, und wenn $m' = 2$ iſt, ſo iſt auch $\underset{2}{O} = 0$. Hieraus erhellet, daſſ jede Combinationsordnung, welche entweder m, oder m' zum Coefficienten hat, verſchwindet, ausgenommen, wenn dieſer Coefficient die Einheit iſt, und die zuletzt angeführte Formel iſt daher gleichbedeutend mit $\overset{1}{O} - \overset{2}{O} - \underset{1}{\overset{1}{O}} + \underset{1}{\overset{2}{O}} + \underset{2}{\overset{1}{O}}$. Die vor der allgemeinen Auflöſung gegebenen Auflöſungen der Aufgabe für alle Fälle von zwei oder drei Perſonen ergeben ſich alſo unter dieſer Vorausſetzung auf folgende Weiſe:

Im Falle	gibt die zuletzt erhaltene Formel den Werth von:
1	$P\,|\,A = \overset{1}{O} - \underset{1}{\overset{1}{O}} = A - AP$
2	$P\,|\,AB = \overset{1}{O} - \underset{1}{\overset{1}{O}} = AB - ABP$
3	$PQ\,|\,A = \overset{1}{O} - \underset{1}{\overset{1}{O}} = A - APQ$
4	$\overset{1}{\overline{PQ}}\,|\,A = \overset{1}{O} - \underset{1}{\overset{1}{O}} + \underset{2}{\overset{1}{O}} = A - AP - AQ + APQ$
5	$P\,|\,\overset{1}{\overline{AB}} = \overset{1}{O} - \overset{2}{O} - \underset{1}{\overset{1}{O}} + \underset{1}{\overset{2}{O}} = A + B - AB - AP - BP + ABP.$

Fall	Denn wenn $\overset{1}{O}=$	$\overset{2}{O}=$	$O_1=$	$O_2=$	so ist: $\overset{1}{O}_1=$	$\overset{2}{O}_1=$	und $\overset{1}{O}_2=$
1	A	0	P	0	AP	0	0
2	AB	0	P	0	ABP	0	0
3	A	0	PQ	0	APQ	0	0
4	A	0	P+Q	PQ	AP+AQ	0	APQ
5	A+B	AB	P	0	AP+BP	ABP	0

Wir wollen nun noch einige besondere Fälle der allgemeinen Aufgabe direct auflösen.

Beispiel 1. Zwei Personen A und B besitzen eine Leibrente, welche auf die überlebende von ihnen lautet, und unter diese und eine dritte Person C nach dem Tode einer der Personen A und B gleich vertheilt wird, so lange sie beide leben. Man soll den Werth des Interesses der Person C bei dieser Leibrente bestimmen.

Erste Auflösung.

Daß am Ende des $n$ten Jahres todt ist	leben	dafür ist die mit dem Antheile der Person C an der Leibrente multiplicirte Wahrscheinlichkeit:
A	BC	$\frac{1}{2}(1-a_n).(bc)_n=\frac{1}{2}[(bc)_n-(abc)_n]$
B	AC	$\frac{1}{2}(1-b)_n.(ac)_n=\frac{1}{2}[(ac)_n-(abc)_n]$

und da die Summe dieser Größen $=\frac{1}{2}(ac)_n+\frac{1}{2}(bc)_n-(abc)_n$ ist, so ist der Werth des Interesses der Person C an der Leibrente $=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC-ABC$.

Zweite Auflösung. Der Werth des Interesses der Person C wird nach der Aufgabe in Zeichen ausgedrückt durch $\frac{1}{2}A|BC+\frac{1}{2}B|AC$, und ist folglich nach dem zweiten Falle des vorletzten Schemas $=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC-ABC$, wie vorhin.

Beispiel 2. Eine Leibrente, welche von der Verbindung der beiden letzten überlebenden von drei Personen A, B, C abhängt, wird während des Zusammenlebens dieser drei Personen gleich unter sie vertheilt und nach dem Tode einer derselben wird sie unter die beiden Ueberlebenden, so lange sie noch zusammen leben, gleich vertheilt; man

soll nun den Werth des Interesses der Person A an der Leibrente bestimmen.

Erste Auflösung.

Dass am Ende des n ten Jahres		dafür ist die mit dem Antheile der Person A an der Leibrente multiplicirte Wahrscheinlichkeit:
todt ist	leben	
keine	ABC	$\ldots\ldots + \frac{1}{3}(abc)_n$
B	AC	$\frac{1}{2}(ac)_n - \frac{1}{2}(abc)_n$
C	AB	$\frac{1}{2}(ab)_n - \frac{1}{2}(abc)_n$

und da die Summe hiervon $= \frac{1}{2}(ab)_n + \frac{1}{2}(ac)_n - \frac{2}{3}(abc)_n$ ist, so ist folglich der Werth des Interesses der Person C an der Leibrente $= \frac{1}{2}\mathrm{AB} + \frac{1}{2}\mathrm{AC} - \frac{2}{3}\mathrm{ABC}$.

Zweite Auflösung. Der gesuchte Werth wird nach der Angabe der Aufgabe in Zeichen ausgedrückt durch $\frac{1}{3}\mathrm{ABC} + \frac{1}{2}\mathrm{C}|\mathrm{AB} + \frac{1}{2}\mathrm{B}|\mathrm{AC}$, und ist folglich $= \frac{1}{2}\mathrm{AB} + \frac{1}{2}\mathrm{AC} - \frac{2}{3}\mathrm{ABC}$, wie vorhin.

Da sich die Personen A, B, C in Beziehung auf diese Leibrente alle unter gleichen Umständen befinden, so ist klar, dass der Werth des Interesses von B erhalten wird, wenn man in dem Ausdrucke für den Werth des Interesses von A die Buchstaben A und B vertauscht, wodurch man erhält $\frac{1}{2}\mathrm{AB} + \frac{1}{2}\mathrm{BC} - \frac{2}{3}\mathrm{ABC}$, und wenn man in dem letzten Ausdrucke die Buchstaben B und C vertauscht, so erhält man den Ausdruck für den Werth des Interesses der Person C an der Leibrente $= \frac{1}{2}\mathrm{AC} + \frac{1}{2}\mathrm{BC} - \frac{2}{3}\mathrm{ABC}$. Die Summe dieser drei Interessen ist gleich $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC} - 2\mathrm{ABC}$, und drückt den Totalwerth der Leibrente aus, welche auf die Verbindung der beiden letzten Ueberlebenden lautet.

Beispiel 3. Eine Leibrente wird nach dem Tode der Person A unter B und C während ihres Zusammenlebens gleich vertheilt und geht dann ganz auf den Ueberlebenden über; man soll den Werth des Interesses der Person B an dieser Leibrente bestimmen.

Erste Auflösung.

Daß am Ende des n ten Jahres todt sind	leben	dafür ist die mit dem Antheile der Person B an der Leibrente multiplicirte Wahrscheinlichkeit:
A	BC	$\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2}(bc)_n - \frac{1}{2}(abc)^n$
AC	B	$b_n - (ab)_n - (bc)_n + (abc)_n$

und da die Summe hiervon $= b_n - (ab)_n - \frac{1}{2}(bc)_n + \frac{1}{2}(abc)_n$ ist, so ist folglich der Werth des Interesses der Person B an der Leibrente $= \mathrm{B} - \mathrm{AB} - \frac{1}{2}\mathrm{BC} + \frac{1}{2}\mathrm{ABC}$.

Zweite Auflösung. Nach der Aufgabe wird der gesuchte Werth ein Zeichen durch $\frac{1}{2}\mathrm{A}|\mathrm{BC} + \mathrm{AC}|\mathrm{B}$ oder $\mathrm{A}|\mathrm{B} - \frac{1}{2}\mathrm{A}|\mathrm{BC}$ ausgedrückt.

Aus dem ersten dieser Ausdrücke ergibt sich nach dem 2ten und 4ten Falle des Schemas auf S. 425 und aus dem zweiten Ausdrucke nach dem 1sten und 2ten Falle ebendaselbst der Werth des Interesses von B an der Leibrente $= \mathrm{B} - \mathrm{AB} - \frac{1}{2}\mathrm{BC} + \frac{1}{2}\mathrm{ABC}$.

Wenn man in diesem letzten Ausdrucke B und C mit einander vertauscht, so erhält man den Werth des Interesses der Person C an der Leibrente $= \mathrm{C} - \mathrm{AC} - \frac{1}{2}\mathrm{BC} + \frac{1}{2}\mathrm{ABC}$.

Wenn wir annehmen, daß die Person A während ihres Lebens die Leibrente zieht, so ist der Werth ihres Interesses daran offenbar $= \mathrm{A}$, und wenn man diesen Werth zu der Summe der Interessen von B und C addirt, so erhält man $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - \mathrm{AB} - \mathrm{AC} - \mathrm{AC} + \mathrm{ABC}$ für den Totalwerth der auf die letzte überlebende der drei Personen lautenden Leibrente, was mit dem Frühern übereinstimmt.

Beispiel 4. Eine Leibrente, welche von der zuletzt lebenden der drei Personen A, B, C abhängt, wird unter A und B während ihrer gleichzeitigen Existenz gleich vertheilt, und nach dem Tode einer dieser beiden Personen wird sie unter die überlebende und die Person C, wenn diese noch lebt, während des Zusammenlebens dieser beiden letzten Personen gleich vertheilt, und fällt dann der überlebenden von ihnen ganz zu. Man soll nun den Werth des Interesses der Person A an dieser Leibrente finden.

Erste Auflösung.

Daß am Ende des n ten Jahres		dafür ist die mit dem Antheile der Person A an der Leibrente multiplicirte Wahrscheinlichkeit:
todt sind	leben	
keine	ABC	$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2}(abc)_n$
C	AB	$\ldots \frac{1}{2}(ab)_n \ldots\ldots - \frac{1}{2}(abc)_n$
B	AC	$\ldots\ldots + \frac{1}{2}(ac)_n - \frac{1}{2}(abc)_n$
BC	A	$a_n - (ab)_n - (ac)_n + (abc)_n$

und da die Summe hiervon $= a_n - \frac{1}{2}(ab)_n - \frac{1}{2}(ac)_n + \frac{1}{2}(abc)_n$ ist, so ist der Werth des Interesses der Person A an der Leibrente $= \mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{AB} - \frac{1}{2}\mathrm{AC} + \frac{1}{2}\mathrm{ABC}$.

Zweite Auflösung. Der gesuchte Werth wird nach der Aufgabe in Zeichen ausgedrückt durch $\frac{1}{2}\mathrm{AB} + \frac{1}{2}\mathrm{B}\,|\,\mathrm{AC} + \overset{1}{\overline{\mathrm{BC}}}\,|\,\mathrm{A} = \mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{AB} - \frac{1}{2}\mathrm{AC} + \frac{1}{2}\mathrm{ABC}$, wie vorhin. (S. 425.)

Durch Vertauschung von A und B in dem letzten Ausdrucke erhält man den Werth des Interesses der Person B an einer Leibrente $= \mathrm{B} - \frac{1}{2}\mathrm{AB} - \frac{1}{2}\mathrm{BC} + \frac{1}{2}\mathrm{ABC}$.

Wenn man die Summe der Werthe der Interessen der Personen A und B, nämlich $\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{AB} - \frac{1}{2}\mathrm{AC} - \frac{1}{2}\mathrm{BC} + \mathrm{ABC}$ von dem Totalwerthe der auf der letzten überlebenden der drei Personen ruhenden Leibrente abzieht, so erhält man $\mathrm{C} - \frac{1}{2}\mathrm{AC} - \frac{1}{2}\mathrm{BC}$ für den Werth des Interesses der Person C an der Leibrente.

Beispiel 5. Sobald irgend zwei der drei Personen A, B, C gestorben sind, zieht die Person D und ihre Erben so lange eine Leibrente, als die überlebende der Personen A, B, C noch lebt, und man soll den Werth des Interesses der Person D an dieser Leibrente bestimmen.

Erste Auflösung.

Daß am Ende des n ten Jahres		dafür ist die Wahrscheinlichkeit:
todt sind	leben	
AB	C	$c_n - (ac)_n - (bc)_n + (abc)_n$
AC	B	$b_n - (ab)_n - (bc)_n + (abc)_n$
BC	A	$a_n - (ab)_n - (ac)_n + (abc)_n$

und da die Summe hiervon $= a_n + b_n + c_n - 2(ab)_n - 2(ac)_n - 2(bc)_n + 3(abc)_n$ ist, so ist folglich der Werth des Interesses der Person D an der Leibrente $= \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - 2\,\mathrm{AB} - 2\,\mathrm{AC} - 2\,\mathrm{BC} + 3\,\mathrm{ABC}$.

Zweite Auflösung. Der Werth des Interesses der Person D wird nach der Aufgabe in Zeichen ausgedrückt durch:

$$\overset{1}{\overline{\mathrm{BC}}}\,|\,\mathrm{A} + \overset{1}{\overline{\mathrm{AC}}}\,|\,\mathrm{B} + \overset{1}{\overline{\mathrm{AB}}}\,|\,\mathrm{C} \text{ oder durch } \overset{1}{\overline{\mathrm{ABC}}} - \overset{2}{\overline{\mathrm{ABC}}}.$$

Aus dem ersten dieser Ausdrücke ergibt sich nach S. 425 4ter Fall und aus dem zweiten nach S. 418 für den Werth des Interesses der Person D dieselbe Größe:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - 2\,\mathrm{AB} - 2\,\mathrm{AC} - 2\,\mathrm{BC} + 3\,\mathrm{ABC},$$

wie in der ersten Auflösung.

Beispiel 6. Eine Leibrente, welche von dem letzten Ueberlebenden von einer Person A und $m + \mu$ andern Personen abhängt, wird am Ende jedes Jahres unter die alsdann noch Lebenden gleich vertheilt, und man soll den Werth des Interesses der Person A an dieser Leibrente bestimmen.

Bei dieser allgemeinen Aufgabe wollen wir, wie bei der vorhergehenden, zuerst die besondern Fälle betrachten, wo nicht mehr als 3 Personen in Betracht kommen.

Erster Fall. Wenn blos zwei Personen A und B betrachtet werden.

Erste Auflösung.

Daß am Ende des $n$ten Jahres todt ist	lebt	dafür ist die mit dem Antheile der Person A an der Leibrente multiplicirte Wahrscheinlichkeit:
keiner	AB	$\ldots + \frac{1}{2}(ab)_n$
B	A	$a_n - (ab)_n$,

und da die Summe hiervon $= a_n - \frac{1}{2}(ab)_n$ ist, so ist der gesuchte Werth $= \mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{AB}$.

Zweite Auflösung. Der Werth des Interesses der Person A ist nach der Aufgabe $= \frac{1}{2}\mathrm{AB} + \mathrm{B}\,|\,\mathrm{A} = \mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{AB}$ (S. 425).

Durch Vertauschung von A und B erhält man den Werth des Interesses von $B = \mathrm{B} - \frac{1}{2}\mathrm{AB}$, und die Summe dieser beiden Wer-

the oder $\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{AB}$ ist der Totalwerth der Leibrente auf den letzten Ueberlebenden, was mit dem ersten Falle in §. 25 übereinstimmt.

Zweiter Fall. Wenn drei Personen A, B, C in Betracht kommen.

Erste Auflösung.

Daß an dem Ende des n ten Jahres		dafür ist die mit dem Antheile der Person A an der Leibrente multiplicirte Wahrscheinlichkeit:
todt sind	leben	
keine	ABC	. . . . $+\frac{1}{3}(abc)_n$
C	AB	. . $+\frac{1}{2}(ab)_n$ . . . . . $-\frac{1}{2}(abc)_n$
B	AC	. . . . $+\frac{1}{2}(ac)_n-\frac{1}{2}(abc)_n$
BC	A	$a_n-(ab)_n-(ac)_n+(abc)_n$

und da die Summe hiervon $=a_n-\frac{1}{2}(ab)_n-\frac{1}{2}(ac)_n+\frac{1}{3}(abc)_n$ ist, so ist der gesuchte Werth des Interesses der Person A an der Leibrente $=\mathrm{A}-\frac{1}{2}\mathrm{AB}-\frac{1}{2}\mathrm{AC}+\frac{1}{3}\mathrm{ABC}$.

Zweite Auflösung. Nach der Aufgabe ist der Werth des Interesses der Person A an der Leibrente in Zeichen:

$$\tfrac{1}{3}\mathrm{ABC}+\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\,|\,\mathrm{AB}-\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,|\,\mathrm{AC}+\mathrm{BC}\,|\,\mathrm{A},$$

oder:
$$\mathrm{A}-\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\,|\,\mathrm{AB}-\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,|\,\mathrm{AC}-\tfrac{2}{3}\mathrm{ABC}.$$

Aus dem ersten dieser beiden Ausdrücke ergibt sich nach dem 2ten und 4ten Falle auf S. 425 und aus dem zweiten nach dem 2ten Falle ebendaselbst der Werth des Interesses der Person A an der Leibrente $=\mathrm{A}-\frac{1}{2}\mathrm{AB}-\frac{1}{2}\mathrm{AC}+\frac{1}{3}\mathrm{ABC}$, wie vorhin.

Wenn man in dem letzten Ausdrucke die Buchstaben A und B mit einander vertauscht, so erhält man $\mathrm{B}-\frac{1}{1}\mathrm{AB}-\frac{1}{2}\mathrm{BC}+\frac{1}{3}\mathrm{ABC}$ für den Werth des Interesses der Person B an der Leibrente, und wenn man in diesem Ausdrucke die Buchstaben B und C mit einander vertauscht, so ergibt sich der Werth des Interesses der Person C an der Leibrente $=\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{AC}-\frac{1}{2}\mathrm{BC}+\frac{1}{3}\mathrm{ABC}$. Die Summe der für die Interessen von A, B, C erhaltenen Werthe ist $=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{AB}-\mathrm{AB}-\mathrm{BC}+\mathrm{ABC}$, d. h. gleich dem Totalwerthe einer Leibrente, welche von der letzten

überlebenden von drei Personen abhängt, was mit dem 2ten Falle in §. 25 übereinstimmt.

Erste allgemeine Auflösung. Aus §. 9 erhellet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass A mit m der $m+\mu$ Personen den Zeitraum von n Jahren überlebt, und dass die andern μ Personen innerhalb dieses Zeitraumes sterben, durch:

$$a_n\Big[\overset{1}{o}_n-(m+1)\overset{2}{o}_n+(m+1).\frac{m+2}{3}\overset{3}{o}_n$$
$$-(m+1).\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\overset{4}{o}_n+etc.\ldots\Big]$$

ausgedrückt wird. Wenn daher ν irgend eine ganze Zahl, die nicht größer ist, als $\mu+1$ und $\mathrm{A}\overset{\nu}{O}$ die Summe der Werthe der Leibrenten auf die Verbindung von A und jeder Combination von $m+\nu-1$ Personen, welche aus den $m+\mu$ andern Personen gebildet werden können, bezeichnet, so wird der Werth der Leibrente, welche von der gleichzeitigen Existenz der Person A und m der übrigen Personen abhängt, ausgedrückt durch:

$$\mathrm{A}\overset{1}{O}-(m+1)\mathrm{A}\overset{2}{O}+(m+1).\frac{m+2}{2}\mathrm{A}\overset{3}{O}$$
$$-(m+1)\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\mathrm{A}\overset{4}{O}+etc.$$

Aber da diese Leibrente unter die $m+1$ Personen, wovon sie abhängt, gleich vertheilt wird, so wird der Werth des Interesses der Person A an derselben:

$$\frac{\mathrm{A}\overset{1}{O}}{m+1}-\mathrm{A}\overset{2}{O}+\frac{m+2}{2}\mathrm{A}\overset{3}{O}-\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\mathrm{A}\overset{4}{O}$$
$$+\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}.\frac{m+4}{4}\mathrm{A}\overset{5}{O}-etc.$$

Wenn $m=$	so gibt die letzte Formel:
0	$A - A\overset{1}{O} + A\overset{2}{O} - A\overset{3}{O} + A\overset{4}{O} - A\overset{5}{O} + etc.$
1	$+\frac{1}{2}A\overset{1}{O} - A\overset{2}{O} + \frac{3}{2}A\overset{3}{O} - 2A\overset{4}{O} + \frac{5}{2}A\overset{5}{O} - etc.$
2	$\ldots\ldots + \frac{1}{3}A\overset{2}{O} - A\overset{3}{O} + 2A\overset{4}{O} - \frac{10}{3}A\overset{5}{O} + etc.$
3	$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{4}A\overset{3}{O} - A\overset{4}{O} + \frac{5}{2}A\overset{5}{O} - etc.$
4	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{5}A\overset{4}{O} - A\overset{5}{O} + etc.$
5	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{6}A\overset{5}{O} - etc.$
etc.	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *etc. etc.*

und die Summe aller dieser Werthe:

$$A - \frac{1}{2}A\overset{1}{O} + \frac{1}{3}A\overset{2}{O} - \frac{1}{4}A\overset{3}{O} + \frac{1}{5}A\overset{4}{O} - \frac{1}{6}A\overset{5}{O} + etc.$$

ist der gesuchte Totalwerth des Interesses der Person A an der Leibrente.

Zweite allgemeine Auflösung. Es bezeichne $A\overset{\sigma}{O}$ die Summe der Werthe der Leibrenten auf die gleichzeitige Existenz der Person A und jeder Combination von m Personen, welche aus den $m+\mu$ andern Personen gebildet werden können, und indem $\nu' = \nu - 1$ irgend eine zwischen 1 und $\mu+1$ liegende ganze Zahl ist, bezeichne $A\overset{\sigma}{\underset{\nu'}{O}}$ die Summe der Werthe der Leibrenten auf die gleichzeitige Existenz der Person A und jeder doppelten Combination, welche gebildet werden kann, indem man jede mögliche Combination von m aus den $m+\mu$ andern Personen mit jeder der Combinationen von $\nu - 1$ Personen, die sich aus den übrigen μ bilden lassen, verbindet; so wird nach §. 28 der Werth einer Leibrente, welche von der gleichzeitigen Existenz von A und m dieser Personen nach dem Tode der μ übrigen Personen abhängt, ausgedrückt durch:

$$A\overset{\sigma}{O} - A\overset{\sigma}{\underset{1}{O}} + A\overset{\sigma}{\underset{2}{O}} - A\overset{\sigma}{\underset{3}{O}} + A\overset{\sigma}{\underset{4}{O}} - etc.$$

und wenn man, wie in §. 9, schließt, so ergibt sich, wenn $\nu > 1$ ist, daß jede Combination aus $m+\nu-1$ Personen außer A, welche im νten

Gliede dieser Reihe vorkommt, $\left[\frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}.\frac{m+4}{4}\ldots\frac{m+\nu-1}{\nu-1}\right]$ mal wiederholt vorkommt.

Wenn endlich ν und $\mathrm{A}\overset{\nu}{O}$ dasselbe bedeuten, wie in der vorhergehenden Auflösung, so ist für $\nu=1$ das νte Glied das erste der obigen Reihe und $=\mathrm{A}\overset{1}{O}$, und nach dem eben Gesagten ist einleuchtend, daß, wenn $\nu>1$ ist, und überall $\left[(m+1).\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\ldots\frac{m+\nu-1}{\nu-1}\right]\mathrm{A}\overset{\nu}{O}$ für $\mathrm{A}\overset{\sigma}{O}_{\nu'}$ in diese Reihe substituirt wird, sie sich in folgende:

$$\mathrm{A}\overset{1}{O}-(m+1)\mathrm{A}\overset{2}{O}+(m+1).\frac{m+2}{2}\mathrm{A}\overset{3}{O}-$$
$$(m+1).\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\mathrm{A}\overset{4}{O}+etc.$$

verwandelt, welche den Werth einer Leibrente auf die gleichzeitige Existenz von A und m der übrigen Personen ausdrückt, und mit dem in der ersten Auflösung erhaltenen Resultate übereinstimmt.

§. 29. In Beziehung auf die gegenwärtige Aufgabe gilt hinsichtlich der entsprechenden aufgeschobenen und temporären Leibrenten ganz dasselbe, wie bei der zweiten Aufgabe, d. h. man braucht für die in den einzelnen Gliedern der obigen Formel vorkommenden Leibrenten auf die ganze Dauer der Existenz einzelner Personen oder Verbindungen von Personen nur die entsprechenden aufgeschobenen oder temporären Leibrenten zu setzen.

§. 30. Aufgabe 4. Eine Person P und ihre Erben ziehen innerhalb $t+\nu$ Jahren eine gewisse Rente so lange die Verbindung der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ existirt, und wenn sich diese Verbindung vor Ablauf der t Jahre auflöst, so geht die Leibrente für den noch übrigen Theil ν der bestimmten Zeit auf die Person Q und ihre Erben über; man soll nun den Werth des Interesses der Person Q an dieser Leibrente bestimmen.

Auflösung. Die Erwartung der Person Q kann in zwei Theile unterschieden werden, nämlich 1) deß sie die Leibrente schon während der t Jahre zieht und 2) daß sie dieselbe nach Verlauf dieser Zeit zieht.

Die Summe der gegenwärtigen Werthe der Interessen von P und Q an der Leibrente ist für den Zeitraum von t Jahren offenbar dem ganzen gegenwärtigen Werthe einer gewissen Rente für diesen

Zeitraum gleich, d. h. $=\frac{1-v^t}{r}$, und der Werth des Interesses der Person P an der Leibrente ist für den Zeitraum von t Jahren $= {}_t[\overline{ABC\ldots}^{m}]$; folglich ist der Werth des Interesses der Person Q an der Leibrente für denselben Zeitraum $=\frac{1-v^t}{r} - {}_t[\overline{ABC\ldots}^{m}]$.

Der gegenwärtige Werth einer gewissen Rente für ν Jahre nach Verlauf von t Jahren ist $=\frac{v^t(1-v^\nu)}{r}$ und die Person Q nebst ihren Erben erhalten diese gewisse Rente, wenn sich die Verbindung der letzten m überlebenden der $m+\mu$ Personen vor Ablauf der t Jahre auflöst. Die Wahrscheinlichkeit für die Auflösung dieser Verbindung innerhalb der t Jahre ist aber gleich $1-(\overline{abc\ldots}^{m})_t$, und folglich ist der Werth des Interesses der Person Q an der Leibrente nach Verlauf der t Jahre $=\left[1-(\overline{abc\ldots}^{m})\right]\frac{v^t(1-v^t)}{r}$;*) also der ganze Werth des Interesses der Person Q an der Leibrente gleich:

$$\frac{1}{r}\left[1-v^{\nu+t}-v^t(1-v^\nu).(\overline{abc\ldots}^{m})_t\right]-{}_t[\overline{ABC\ldots}^{m}]\ldots \quad (x)$$

Wenn die ganze gewisse Rente eine perpetuirliche ist, so ist $v^{t+\nu}=0$ und der Werth des Interesses der Person Q gleich:

---

*) Wenn die Person Q und ihre Erben, selbst wenn sich die Verbindung der m überlebenden der gegebenen $m+\mu$ Personen innerhalb des Zeitraumes von t Jahren auflöst, die gewisse Rente doch erst nach Verlauf dieser Zeit ziehen, so ist der ganze Werth des Interesses von $Q=\left[1-(\overline{abc\ldots}^{m})_t\right]\frac{v^t(1-v^\nu)}{r}$, und wenn die gewisse Rente eine perpetuirliche ist, $=\left[1-(\overline{abc\ldots}^{m})\right]\frac{v^t}{r}$.

Wenn die Person Q und ihre Erben nur die nach Verlauf der t Jahren zahlbaren Jahresrenten erhalten sollen, aber doch die am Ende des $t$ten Jahres zahlbare Jahresrente, so ist das Interesse der Person Q gleich:

$$\left[1-(\overline{abc\ldots}^{m})_t\right]\frac{v^{t-1}(1-v)^\nu}{r},$$

und wenn die Rente eine perpetuirliche ist, gleich:

$$\left[1-(\overline{abc\ldots}^{m})_t\right]\frac{v^{t-1}}{r}.$$

$$\frac{1}{r}\left[1-\overline{(abc\ldots)}^{m}_{t}.v^t\right]-{}^t[\overline{ABC\ldots}^{m}].$$

Wenn der Zeitraum t nicht kleiner ist, als die größte Dauer der Verbindung von m beliebigen der gegebenen Personen, so ist $\overline{(abc\ldots)}^{m}_{t}=0$ und ${}^t[\overline{ABC\ldots}^{m}]=\overline{ABC\ldots}^{m}$, und folglich verwandelt sich in diesem Falle die allgemeine Formel in:

$$\frac{1-v^{r+t}}{r}-\overline{ABC\ldots}^{m} \qquad (y)$$

Wenn in dem zuletzt angenommenen Falle die gewisse Rente eine perpetuirliche ist, so verwandelt sich die letzte Formel in:

$$\frac{1}{r}-\overline{ABC\ldots}^{m}$$

Wenn die Person Q oder ihre Erben die gewisse Rente nur dann erhalten, wenn sich die Verbindung der letzten m der $m+\mu$ Personen nach Verlauf der t Jahre auflöst; so wird der gegenwärtige Werth des Interesses der Person Q offenbar ausgedrückt durch den Unterschied zwischen den Werthen (x) und (y), d. h. durch:

$$\frac{v^t}{r}(1-v^r).\overline{(abc\ldots)}^{m}_{t}-[\overline{ABC\ldots}^{m}]_t$$

Wenn die gewisse Rente eine perpetuirliche ist, so ist $v^r=0$, und der letzte Ausdruck für das Interesse der Person Q verwandelt sich in:

$$\overline{(abc\ldots)}^{m}_{t}.\frac{v^t}{r}-[\overline{ABC\ldots}^{m}]^t.$$

Wenn der Zeitraum t nicht kleiner ist, als die größte Dauer der Verbindung der letzten m überlebenden der gegebenen Personen, so ist der Werth des Interesses der Person Q in den beiden letzten Fällen $=0$.

§. 31. Aufgabe 5. Den gegenwärtigen Werth $\overset{1}{\overline{BC}}|A$ einer Leibrente auf eine Person A nach der Erlöschung der Verbindung zweier anderer Personen B und C, vor-

ausgesetzt, dass die Verbindung durch den Tod von B aufgelöst wird, zu bestimmen.

Auflösung. Der gegenwärtige Werth der $n$ten Jahresrente dieser Leibrente ist offenbar gleich ${}^{n}[\underset{1}{\mathrm{b\,c}}]\,a_n v^n$ (S. 413) und man hat zur Bestimmung der Summe der gegenwärtigen Werthe dieser Jahresrenten für den Zeitraum, in welchem ${}^{n}[\underset{1}{\mathrm{b\,c}}]$ veränderlich ist, d. h. so lange n die möglichst größte Verbindungsdauer der beiden Personen B und C nicht überschreitet, kein anderes allgemeines und zuverlässiges Verfahren, als den gegenwärtigen Werth jeder Jahresrente einzeln zu berechnen, und dann alle diese Werthe zusammenzuaddiren.*) Sobald aber n diese Grenze überschritten hat, ist ${}^{n}[\underset{1}{\mathrm{b\,c}}]$ immer der constanten Größe $\underset{1}{\mathrm{b\,c}}$ gleich, und der gegenwärtige Werth aller spätern Jahresrenten ist $=\underset{1}{\mathrm{b\,c}}\,[\mathrm{A}]\tau$.**)

Die einzige Schwierigkeit dieser Aufgabe besteht also in der Bestimmung des Werthes der Leibrente für die τ Jahre, auf welche die mögliche Verbindungsdauer aller Personen beschränkt ist, und während dieser Zeit kann die Wahrscheinlichkeit, die $n$te Jahresrente zu erhalten, in die beiden folgenden unterschieden werden.

	Dass am Ende des $n$ten Jahres leben	todt sind
1	AC	B dafür ist die Wahrscheinlichkeit $=(1-b_n).(ac)_n$
2	A	B und C, indem B zuerst gestorben ist.

*) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ueberlebung in dem $n$ten Jahre stattfindet, wird immer nach der Formel $\frac{1}{2bc}({}^{n-1}b-{}^{n}b).({}^{n-1}c+{}^{n}c)$ berechnet, und man nimmt die Summe der n ersten dieser Wahrscheinlichkeiten für den Werth von ${}^{n}[\underset{1}{\mathrm{b\,c}}]$.

**) Wenn A die älteste der drei Personen ist, so ist ${}^{n}[\underset{1}{\mathrm{b\,c}}]$ nicht immer $=\underset{1}{\mathrm{b\,c}}$ wenn $n>\tau$ ist; aber in diesem Falle ist $[\mathrm{A}]_\tau$ und folglich ${}^{n}[\underset{1}{\mathrm{b\,c}}].[\mathrm{A}]_\tau$ immer $=0$, und daher ist $\underset{1}{\mathrm{b\,c}}.[\mathrm{A}]_\tau$ ein genauer allgemeiner Ausdruck des gegenwärtigen Werthes aller nach Verlauf der t Jahre fälligen Jahresrenten.

Diese zweite Wahrscheinlichkeit kann wieder in die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden von einander unabhängigen, aber gleichzeitig stattfindenden Ereignisse zerlegt werden:

1) Daß A alsdann lebt und sowohl B, als C todt ist, wofür die Wahrscheinlichkeit immer genau durch $(1-b_n)[a_n-(ac)_n]$ ausgedrückt wird; 2) daß, wenn B und C alsdann beide todt sind, B von beiden zuerst gestorben ist.

Die ganze Schwierigkeit besteht also in der Bestimmung dieser letzten Wahrscheinlichkeit, welche nicht in allen Fällen während der τ Jahre absolut constant und genau bestimmbar ist. Aus §. 17 folgt aber, daß, wenn das jährliche Decrement, d. h. die jährliche Abnahme der Anzahlen der Personen von demselben Alter, *etc.* wie B, C für die beiden Personen B und C während der fraglichen Zeit constant ist, obgleich beide Decremente von einander verschieden sind, die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit immer genau durch $\frac{1}{2}$ ausgedrückt wird, und es läßt sich leicht zeigen, daß dasselbe Maß dieser Wahrscheinlichkeit auch in andern Fällen anwendbar ist, und daß auch in vielen Fällen, wo der Bruch $\frac{1}{2}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit nicht genau ausdrückt, der durch Anwendung des Werthes $\frac{1}{2}$ in den erhaltenen Formeln verursachte Fehler unbeträchtlich ist. Wir werden daher den Werth $\frac{1}{2}$ hier anwenden und haben folglich, wenn n nicht größer ist, als τ, dafür

daß am Ende des $n$ten Jahres todt sind	leben	die Wahrscheinlichkeit:
B	AC	$\frac{1}{2}(1-b_n).2(ac)_n$
B und C, und zwar B zuerst von beiden	A	$\frac{1}{2}(1-b_n).[a_n-(ac)_n]$,

und da die Summe hiervon gleich:

$$\tfrac{1}{2}(1-b_n).[a_n+(ac)_n]=\tfrac{1}{2}[a_n-(ab)_n+(ac)_n-(abc)_n]$$

ist; so ist der Werth der Leibrente für die τ ersten Jahre gleich:

$$\tfrac{1}{2}\tau[\Sigma[a_n-(ab)_n+(ac)_n-(abc)_n]v^n]=$$
$$\tfrac{1}{2}(\tau[\mathrm{A}]-\tau[\mathrm{AB}]+\tau[\mathrm{AC}]-\mathrm{ABC})$$

und da der gegenwärtige Werth derselben nach dieser Zeit, wie wir ge-

sehen haben, gleich $\underset{1}{b}c.[A]\tau$ ist, so haben wir die allgemeine Formel:

$$\underset{1}{B}C|A = \tfrac{1}{2}(A-\tau[AB]+\tau[AC]-ABC)-(\tfrac{1}{2}-\underset{1}{b}c).[A]\tau,$$

welche, jenachdem *A*, oder *B*, oder *C* die älteste der drei Personen ist, sich resp. verwandelt in:

$$\underset{1}{B}C|\dot{A} = \tfrac{1}{2}(A-AB+AC-ABC),$$

oder:

$$\underset{1}{\dot{B}}C|A = \tfrac{1}{2}(A-AB+\beta[AC]-ABC)-(\tfrac{1}{2}-\underset{1}{b}c).[A]\beta,$$

oder:

$$\underset{1}{B}\dot{C}|A = \tfrac{1}{2}(A-\gamma[AB]+AC-ABC)-(\tfrac{1}{2}-\underset{1}{b}c).[A]\gamma.$$

Wenn die Personen *B* und *C* in allen Rücksichten einander gleich sind, so ist $\frac{1}{2}-\underset{1}{b}c=0$ und $\tau[AB]=\tau[AC]$, und mithin verwandelt sich die allgemeine Formel in:

$$\underset{1}{B}B|A = \tfrac{1}{2}(A-ABB) = \tfrac{1}{2}BB|A,$$

was von selbst einleuchtend ist.

§. 32. Aufgabe 6. Den gegenwärtigen Werth $\underset{2}{\overset{1}{\overline{BC}}}|A$ einer Leibrente auf die Person *A* nach dem Tode der überlebenden von zwei Personen *B* und *C*, vorausgesetzt, dass *B* die überlebende ist, zu bestimmen.

Auflösung. Wenn die Person *P* und ihre Erben die Leibrente in der vorhergehenden Aufgabe und die Person *Q* oder ihre Erben die in der gegenwärtigen Aufgabe ziehen sollen, so ist klar, dass *P* oder *Q*, oder ihre resp. Erben die Leibrente erhalten, wenn die Person *A* die Person *B* überlebt, und das Ereigniss, in Folge dessen die eine Art der Expectanten in den Besitz der Leibrente kommt, schließt nothwendig das andere aus. Daher sind die Werthe der Leibrenten in der vorhergehenden und der gegenwärtigen Aufgabe zusammengenommen dem Werthe einer Leibrente auf die Person *A* nach dem Tode der Person *B* gleich, welcher Werth in Zeichen durch:

$$\underset{1}{B}C|A+\overset{1}{\overline{\underset{2}{B}C}}|A=B|A$$

ausgedrückt wird, woraus folgt:

$$\overset{1}{\overline{\underset{2}{B}C}}|A=B|A-\underset{1}{B}C|A=A-AB-\underset{1}{B}C|A \text{ (S. 421. 1.)}$$

und unter den in §. 31 angeführten Bedingungen haben wir folgende allgemeine Formel:

$$\overset{1}{\overline{\underset{2}{B}C}}|A=\tfrac{1}{2}(A-AB-\tau[AC]+ABC)-\tfrac{1}{2}[AB]\tau+(\tfrac{1}{2}-\underset{1}{b}c)[A]\tau,$$

woraus folgt:

$$\overset{1}{\overline{\underset{2}{B}C}}|\dot{A}=\tfrac{1}{2}(A-AB-AC+ABC),$$

$$\overset{1}{\overline{\underset{2}{\dot{B}}C}}|A=\tfrac{1}{2}(A-AB-\beta[AC]+ABC)+(\tfrac{1}{2}-\underset{1}{b}c)[A]\beta$$

und:

$$\overset{1}{\overline{\underset{2}{B}\dot{C}}}|A=\tfrac{1}{2}(A-AB-AC+ABC)-\tfrac{1}{2}[AB)\gamma+(\tfrac{1}{2}-\underset{1}{b}c)[A]\gamma.$$

Wenn die Personen B und C einander gleich sind, so verwandelt sich die allgemeine Formel in:

$$\overset{1}{\overline{\underset{2}{B}B}}|A=\tfrac{1}{2}(A-2AB+ABB)=B|A-\tfrac{1}{2}BB|A \text{ (S. 421. 1 u. 3.)}$$

Lebensversicherungen.

§. 33. Wenn eine Person P ein Interesse hat, welches irgend einem Risiko ausgesetzt ist, und eine andere Person Q macht sich verbindlich, gegen eine gewisse, ihr von P ausgezahlte Summe dieses Risiko über sich zu nehmen, so wird ein solcher Vertrag eine **Versicherung** genannt, und wenn dieses Risiko von dem Tode einer oder mehrerer Personen abhängt, so heißt ein solcher Vertrag eine **Lebensversiche-**

rung. Wenn sich die Lebensversicherung auf mehrere Jahre erstreckt, so ist es immer mit einigen Schwierigkeiten verbunden, ihren ganzen Werth zur Zeit des Abschlusses des Vertrages auf einmal zu erlegen, und es wird daher in dem schriftlichen Vertrage über die Versicherung, welcher die Police genannt wird, eine jährlich zu zahlende Summe oder Prämie festgesetzt, welche im Anfange des Jahres gezahlt wird, aber welche mit dem Tode der versicherten Person oder Personen wegfällt.

Da sich offenbar die Werthe der Prämien für die Versicherung zweier Summen bei demselben Risiko und für dieselbe Zeit immer wie diese versicherten Summen verhalten, so wollen wir bei unsern Betrachtungen über Lebensversicherungen immer annehmen, dass die versicherte Summe $= 1$ Thaler ist. Auch wollen wir annehmen, dass die versicherte Summe immer am Ende des Jahres gezahlt wird, in welchem das Ereigniss stattfindet, worauf sich die Versicherung bezieht, während die in der Police bestimmte jährliche Prämie zu Anfang jedes Jahres gezahlt werden muss.

Wir wollen den Werth einer Versicherung auf die Person A mit $\mathfrak{A}$ und auf die Verbindung der Personen $A, B, C, \ldots$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ bezeichnen. Ferner wollen wir den Werth einer Versicherung, welche auf die Verbindung von m überlebenden von $m+\mu$ Personen lautet, mit $\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}$ und die jährliche Prämie für eine Versicherung immer dadurch bezeichnen, dass wir vor den Totalwerth der Versicherung Pr. setzen, so dass z. B. Pr. $\mathfrak{A}$ die jährliche Prämie für eine Versicherung auf die Person A, Pr. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ die jährliche Prämie für eine Versicherung auf die Verbindung aller gegebenen Personen $A, B, C, \ldots$ und Pr. $\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}$ die jährliche Prämie für eine Versicherung auf die Verbindung der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die letzten m überlebenden von $m+\mu$ jetzt lebenden Personen am Ende des $(n-1)$ten Jahres, von jetzt an gerechnet, noch leben, ist für $n=1$ der Gewissheit gleich, weil diese Personen nach der Voraussetzung jetzt alle leben, und in demselben Falle ist $v^{n-1} = v^0 = 1$ der gegenwärtige Werth eines sofort zahlbaren Thalers. Hiernach ist für $n=1$ der Ausdruck:

$$(\overset{m}{\overline{a\,b\,c\ldots}})_{n-1} v^{n-1} = 1,$$

und jenachdem $n = 2, 3, 4, \ldots$ ist, ist dieser Ausdruck resp. gleich:

$$\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_1 v^1,\ \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_2 v^2,\ \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_3 v^3, \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeiten, daſſ die Verbindung der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen das 2te, 3te, 4te, ... Jahr **erreicht**, sind offenbar resp. dieselben, als die, daſſ diese Verbindung des 1ste, 2te, 4te, ... Jahr hindurch existirt. Hiernach ist offenbar:

$$\Sigma \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} v^n = v\,.\,\Sigma \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1}\,.\,v^{n-1}$$

$$= v\left[1+\Sigma \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n v^n\right] = v\left(1+\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right)$$

Wenn $n=t$ ist, so ist:

$$\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} v^n = v\,.\,\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{t-1} v^{t-1},$$

und wie vorhin erhellet, daſſ:

$${}_t\left[\Sigma \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} v^n\right] = v\left(1+{}_{(t-1)}\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right]\right)$$

$$= v\left(1-\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_t\,.\,v^t+{}_t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right]\right).$$

§. 34. **Aufgabe 7. Den Werth** $\left(\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}\right)$ **einer Lebensversicherung auf die Verbindung der letzten** m **überlebenden von** $m+\mu$ **Personen** $A, B, C, \ldots$ **zu bestimmen.**

Auflösung 1. Der gegenwärtige Werth der Erwartung, am Ende des $n$ten Jahres 1 Thaler zu erhalten, ist (§. 12):

$$\left[\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n\right] v^n,$$

und folglich der Totalwerth der Versicherung, oder die Summe der gegenwärtigen Werthe aller solcher Erwartungen:

$$\Sigma\left[\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_n\right] v^n = v\left(1+\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right) - \overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}$$

Es ist also:

$$\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}} = v - (1-v)\,\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}} \qquad (m)$$

Auflösung 2. Wenn der Versicherte, statt am Ende des Jah-

res 1 Thlr. zu erhalten, nach der Erlöschung der Verbindung der m Ueberlebenden eine perpetuirliche Rente zieht, deren erste Jahresrente am Ende des Jahres gezahlt wird, in welchem sich die Verbindung der m Personen auflöst; so kommt der Versicherte, oder seine Erben am Ende dieses Jahres in den Besitz von 1 Thlr. und einer perpetuirlichen gewissen Rente von 1 Thlr. jährlich, deren Werth $=\frac{1}{r}$ ist, wo r die jährlichen Zinsen von 1 Thaler bezeichnet, also zusammen $=1+\frac{1}{r}$ $=\frac{1}{1-v}$, so daß die Versicherung einer solchen perpetuirlichen Rente denselben Werth hat, als die von $\frac{1}{1-v}$ Thaler. Aber der gegenwärtige Werth der Anwartschaft auf die perpetuirliche Rente ist (S. 436):

$$\frac{1}{r}-\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}=\frac{v}{1-v}-\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}},$$

welcher daher auch der Werth der Versicherung von $\frac{1}{1-v}$ Thlr. auf dieselben Personen ist, und folglich haben wir:

$$\frac{1}{1-v}:1=\left(\frac{v}{1-v}-\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right):\left(v-(1-v).\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right)=$$

dem Werthe der Versicherung von 1 Thlr. auf die fraglichen Personen, und mithin derselbe, wie vorhin.

§. 35. Da die jährliche Prämie während der gleichzeitigen Existenz der m Ueberlebenden im Anfange jedes Jahres gezahlt werden muß, so muß die erste jetzt und jede folgende am Ende jedes Jahres der gleichzeitigen Existenz der m Ueberlebenden gezahlt werden. Der gegenwärtige Werth aller zu zahlenden Prämien besteht also aus der ersten Prämie von Pr. $\overset{m}{\overline{\mathfrak{ABC}\ldots}}$ Thlr. und aus dem gegenwärtigen Werthe einer Leibrente auf die Verbindung von jährlich Pr. $\overset{m}{\overline{\mathfrak{ABC}\ldots}}$ Thlr. Da nun diese Summe dem Totalwerthe der Versicherung gleich sein muß, so haben wir die Gleichung:

$$\mathrm{Pr.}\ \overset{m}{\overline{\mathfrak{ABC}\ldots}}\,(1+\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}})=v-(1-v)\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}$$

$$=1-(1-v(1+\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}),$$

woraus folgt:

$$\text{Pr.}\ \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}^{m} = \frac{1}{1+\overline{\text{A B C}\ldots}^{m}} + v - 1. \qquad (h)$$

Ebenso ergibt sich für eine Person A:

$$\mathfrak{A} = v - (1-v)\,\text{A}$$

und:

$$\text{Pr.}\ \mathfrak{A} = \frac{1}{1+\text{A}} + v - 1. \qquad (i)$$

Wenn die Versicherung auf die Verbindung aller Personen lautet, so haben wir:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots = v - (1-v)\,\text{A B C}\ldots$$

und:

$$\text{Pr.}\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots = \frac{1}{1+\text{A B C}\ldots} + v - 1..$$

Für eine einzelne Person, oder für irgend eine Verbindung von Personen haben wir auch:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots = \Sigma\left[\frac{{}_1(a\,b\,c\ldots)_n}{{}_1(a\,b\,c\ldots)_1} - (a\,b\,c\ldots)_n\right] v^n$$

$$= \frac{{}_1(\text{A B C}\ldots)}{{}_1(a\,b\,c\ldots)_1} - \text{A B C}\ldots \quad (\text{§. } 18).$$

wodurch der Werth der Versicherung ohne Einführung von v oder $\frac{1}{1+r}$ ausgedrückt wird. Es ist aber:

$$\frac{{}_1(\text{A B C}\ldots)}{{}_1(a\,b\,c\ldots)_1} = v(1+\text{A B C}\ldots) \quad (\text{§. } 18.),$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots = v - (1-v)\,\text{A B C}\ldots,$$

wie vorhin.

Wenn die Versicherung auf die überlebende von zwei Personen A und B lautet, so ist:

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^{1} = v - (1-v)\,\overline{\text{A B}}^{1}$$

und:

$$\text{Pr. } \overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} = \frac{1}{1+\overset{1}{\overline{\mathrm{A\,B}}}} + v - 1.$$

Wenn die Versicherung auf die überlebende von drei Personen *A*, *B* und *C* lautet, so geben die allgemeinen Formeln:

$$\overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = v - (1-v)\overset{1}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}}}$$

und:

$$\text{Pr. } \overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = \frac{1}{1+\overset{1}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}}}} + v - 1.$$

Wenn die Versicherung auf die Verbindung der beiden letzten überlebenden von drei Personen *A*, *B*, *C* lautet, so ist:

$$\overset{2}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = v - (1-v)\overset{2}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}}}$$

und:

$$\text{Pr. } \overset{2}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = \frac{1}{1+\overset{2}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}}}} + v - 1.$$

Hat man nach der ersten Auflösungsmethode den Ausdruck $v - (1-v)\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}$ des gegenwärtigen Werthes eines Thalers, welcher am Ende des Jahres gezahlt wird, worin sich die Verbindung der letzten m überlebenden Personen auflöst, und den gegenwärtigen Werth einer perpetuirlichen Rente, deren erste Jahresrente am Ende des Jahres gezahlt wird, worin sich diese Verbindung auflöst, gefunden; so ergibt sich, da sich die erwähnten gegenwärtigen Werthe wie $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{1-v} : 1$ verhalten, der gegenwärtige Werth der Anwartschaft auf die perpetuirliche Rente nach der Auflösung der Verbindung der m überlebenden Personen $= \frac{1}{r} - \overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}$, übereinstimmend mit dem Obigen.

Temporäre Lebensversicherungen.

§. 36. Wenn die Lebensversicherung blos für den Zeitraum von t Jahren gültig ist, d. h. wenn die versicherte Summe am Ende des Jahres, worin sich die Verbindung der m überlebenden von $m+\mu$ Per=

sonen auflöst, nur dann gezahlt wird, wenn diese Auflösung der Verbindung der m Personen vor Ablauf der t Jahre stattfindet; so wird der gegenwärtige Werth dieser Versicherung ausgedrückt durch:

$$t\left[\Sigma\left[\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n-1} - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{n}\right]v^n\right] \text{ (§. 18)},$$

d. h. durch:

$$v\left[1 - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{t} . v^t + t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right]\right] - t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right] \text{ (§. 25 u. 33)}$$

so daß

$$t\left[\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\ldots}}\right] = v\left[1 - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{t} . v^t\right] - (1-v) . t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right] \;(m')$$

ist.

Andere Auflösung. Bei der zweiten Auflösungsmethode der 7ten Aufgabe haben wir bemerkt, daß sich der gegenwärtige Werth der Versicherung von 1 Thaler, welche auf die in Rede stehenden Personen lautet, zu dem gegenwärtigen Werthe der Versicherung einer perpetuirlichen Rente, welche bei der Auflösung der Verbindung der m überlebenden Personen zahlbar wird, wie $1 : \frac{1}{1-v}$ verhält, und nach §. 30 ist der gegenwärtige Werth der Versicherung der perpetuirlichen Rente:

$$\frac{1}{1-v}\left[1 - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{t} v^t\right] - t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right],$$

woraus offenbar folgt:

$$t\left[\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}\right] = v\left[1 - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{t} . v^t\right] - (1-v) . t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right],$$

Umgekehrt, wenn man nach der ersten Auflösungsmethode der vorhergehenden Aufgabe den Ausdruck für den gegenwärtigen Werth der Versicherung von 1 Thaler auf die fraglichen Personen und für die bestimmte Zeit durch $1 - v$ dividirt, so erhält man:

$$\frac{1}{r}\left[1 - \overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}_{t} . v^t\right] - t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right]$$

für den gegenwärtigen Werth der Versicherung einer perpetuirlichen Leib-

rente, welche bei der Auflösung der Verbindung der letzten m überlebenden Personen, vorausgesetzt, dass diese Auflösung vor Ablauf der bestimmten Zeit geschieht, zahlbar wird, was mit §. 30 übereinstimmt.

Aus §§. 33 u. 34 erhellet, dass der gegenwärtige Werth der jährlichen, für diese Versicherung zu zahlenden Prämien durch:

$$\text{Pr. } {}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}]\left[1-(\overset{m}{\overline{a\,b\,c\ldots}})_t . v^t + {}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}]\right] =$$

$$v[1-(\overset{m}{\overline{a\,b\,c\ldots}})_t . v^t] - (1-v) . {}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}] =$$

$$1-(\overset{m}{\overline{a\,b\,e\ldots}})_t . v^t - (1-v) . \left[1-(\overset{m}{\overline{a\,b\,c\ldots}})_t . v^t + {}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}]\right]$$

ausgedrückt wird, und folglich ist:

$$\text{Pr. } {}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}] = \frac{1-(\overset{m}{\overline{a\,b\,c\ldots}})_t\, v^t}{1-(\overset{m}{\overline{a\,b\,c\ldots}})\ v^t + {}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}]} + v - 1. \qquad (h')$$

Ebenso erhellet, dass, wenn man nur **eine** Person A betrachtet:

$${}^{t}[\mathfrak{A}] = v(1-a_t v^t) - (1-v)\,{}^{t}[\mathrm{A}] =$$

$$v\left(1-\frac{{}^{t}a}{a}v^t\right) - (1-v) . \left(\mathrm{A}-\frac{{}^{t}a}{a}v^t . {}^{t}\mathrm{A}\right),$$

und:

$$\text{Pr. } {}^{t}[\mathfrak{A}] = \frac{1-a_t v^t}{1-a_t v^t + {}^{t}[\mathrm{A}]} + v - 1 \qquad (i')$$

ist, oder:

$$\text{Pr. } {}^{t}[\mathfrak{A}] = \frac{1-\frac{{}^{t}a}{a}v^t}{1+\mathrm{A}-\frac{{}^{t}a}{a}v^t(1+{}^{t}\mathrm{A})} + v - 1.$$

Wenn t nicht kleiner ist, als die größte Verbindungsdauer der m überlebenden Personen, so ist $(\overset{m}{\overline{a\,b\,c\ldots}})_t = 0$ und ${}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}] = \overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}$, und in diesem Falle stimmen die Formeln (m) u. (m') in §. 34 und §. 36 wegen ${}^{t}[\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}] = \overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}$ überein, und dasselbe ist mit den Formeln (h) u. (h') in §. 35 u. 36 der Fall, weil alsdann

Pr. $^t[\overline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\ldots}^{\,m}]$ = Pr. $\overline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\ldots}^{\,m}$ ist. In demselben Falle sind auch die Formeln (i) u. (i') in §. 35 u. 36 identisch.

Wenn die Versicherung auf die Verbindung aller Personen lautet, so ist:

$$\overline{(a\,b\,c\ldots)}^{\,m}_t = (a\,b\,c\ldots)_t$$

und:
$$^t[\overline{A\,B\,C\ldots}^{\,m}] = {}^t[A\,B\,C\ldots] = A\,B\,C\ldots$$
$$-(a\,b\,c\ldots)_t . v^t . {}^t(A\,B\,C\ldots),$$

und folglich verwandelt sich in diesem Falle die Formel (m') in:

$$^t[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\ldots] = v\left[1 - \frac{^t(a\,b\,c\ldots)}{a\,b\,c\ldots}v^t\right] -$$
$$(1-v)\left[A\,B\,C\ldots - \frac{^t(a\,b\,c\ldots)}{a\,b\,c\ldots}v^t . {}^t(A\,B\,C\ldots)\right]$$

und die Formel (h') in:

$$Pr.[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\ldots] =$$
$$\frac{1 - \frac{^t(a\,b\,c\ldots)}{a\,b\,c\ldots}v^t}{1 + A\,B\,C\ldots - \frac{^t(a\,b\,c\ldots)}{a\,b\,c\ldots}v^t[1 + {}^t(A\,B\,C\ldots)]} + v - 1.$$

Aufgeschobene Lebensversicherungen.

§. 37. Wenn die Lebensversicherung um t Jahre aufgeschoben ist, d. h. wenn die versicherte Summe nur dann am Ende des Jahres gezahlt wird, in welchem sich die Verbindung der m überlebenden Personen auflöst, wenn diese Auflösung erst nach Verlauf der t Jahre erfolgt, so wird der gegenwärtige Werth der Versicherung ausgedrückt durch:

$$\left[\Sigma\left[\overline{(a\,b\,c\ldots)}^{\,m}_{n-1} - \overline{(a\,b\,c\ldots)}^{\,m}_n\right] v^n\right]_t,$$

wo sich das Summenzeichen Σ auf die Werthe von n erstreckt, welche größer sind, als t, und wie in §. 33 ergibt sich, daß der vorhergehende Ausdruck dem folgenden:

$$v\left[\overline{(a\,b\,c\ldots)}^{\,m}_t . v^t + [\overline{A\,B\,C\ldots}^{\,m}]_t\right] - [\overline{A\,B\,C\ldots}^{\,m}]^t$$

gleich ist, so dass man hat:

$$\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}{}_t=\overset{m}{\overline{(a\,b\,c\ldots)}}{}_t\, v^{t+1}-(1-v\overset{m}{\overline{[\mathrm{A\,B\,C}\ldots]}}{}_t. \quad (r)$$

Wenn $t=o$ ist, so ist:

$$\overset{m}{\overline{(abc\ldots)}}{}_t.\,v^{t+1}=v,\quad \overset{m}{\overline{[\mathrm{A\,B\,C}\ldots]}}{}_t=\mathrm{A\,B\,C}\ldots$$

und die Formel (r) wird mit der Formel (m) identisch, weil alsdann:

$$\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}{}_t=\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}$$

ist. Wenn eine Versicherung, welche von der gleichzeitigen Existenz der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen abhängt, nur auf t Jahre zu Gunsten einer Person P, und eine andere um t Jahre aufgeschobene Versicherung zu Gunsten einer Person Q abgeschlossen ist, so ist einleuchtend, dass, da sich die Verbindung dieser letzten m überlebenden Personen entweder vor, oder nach Ablauf der t Jahre auflösen muss, die versicherte Summe am Ende des Jahres, worin sich diese Verbindung auflöst, entweder an P, oder Q, oder an ihre resp. Erben gezahlt werden muss, und folglich ist die Summe der gegenwärtigen Werthe der Interessen dieser letzten Personen an der Versicherung gleich dem gesammten gegenwärtigen Werthe einer Versicherung auf die Verbindung der m überlebenden Personen, d. h. es ist:

$${}_t\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}+\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}{}_t=\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}},$$

folglich: $${}_t\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}=\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}-\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}{}_t,$$

und: $$\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}{}_t=\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}-{}_t\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}.$$

Ebenso ergibt sich, dass sich die Formel (r) aus den Formeln (m) und (m'), und umgekehrt die Formel (m') aus den Formeln (m) und (r) ableiten lässt.

§. 38. Bei manchen Versicherungsanstalten müssen die Mitglieder ein Eintrittsgeld zahlen, welches daher offenbar als ein Theil der für die Versicherung zu zahlenden Summe betrachtet werden muss. Es bezeichne folglich, indem f einen echten Bruch ausdrückt, $f.{}_t\overset{m}{\overline{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots]}}$ den

Werth des Antrittsgeldes, so drückt $(1-f).t[\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}]$ die außer diesem Antrittsgelde für die Versicherung noch zu zahlende Summe aus, und die im Anfange jedes Jahres zu zahlende Prämie wird ausgedrückt durch:

$$(1-f).\left[\frac{1-(\overset{m}{\overline{abc\ldots}})_t.v^t}{1-(\overset{m}{\overline{abc\ldots}})_t.v^t+t[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}]}+v-1\right].$$

Wenn t nicht kleiner ist, als die größte Verbindungsdauer der m überlebenden Personen, so ist die Antrittssumme $=f(\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}})$ und die jährliche Prämie gleich:

$$(1-f).\left[\frac{1}{1+\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}}+v-1\right],$$

indem sich die Versicherung auf die gesammte Verbindungsdauer der fraglichen Personen bezieht.

§. **39.** Gewöhnlich wird die jährliche Prämie für eine Versicherung im Anfange jedes Jahres gezahlt, und zwar die erste bei dem Abschlusse des Versicherungscontractes; allein es wird nicht unnütz, sein den Werth der jährlichen Prämie für den Fall zu bestimmen, wo sie am Ende jedes Jahres gezahlt wird, und zwar die erste nach Verlauf eines Jahres von der Zeit des Versicherungsvertrages an gerechnet.

Die Versicherung soll von der gleichzeitigen Existenz der m überlebenden von $m+\mu$ Personen abhängen und auf den Zeitraum von t Jahren abgeschlossen sein. Ferner betrage die jährliche Prämie, welche am Ende jedes Jahres der gleichzeitigen Existenz der m überlebenden Personen zahlbar ist, p Thaler, so dass folglich der gegenwärtige Totalwerth der Versicherung dem gegenwärtigen Werthe einer Leibrente von p Thaler auf die Verbindung der letzten m überlebenden Personen und für die bestimmte Versicherungszeit gleich ist. Wir haben also die Gleichung:

$$p.t[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}]=v[1-(\overset{m}{\overline{abc\ldots}})_t v^t]-(1-v).t[\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}] \quad (\S.\ 36.)$$

woraus folgt:

$$p = \frac{v\left[1 - \overset{m}{\overline{(a\,b\,c\ldots)}}_t \cdot v^t\right]}{t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}\right]} + v - 1.$$

Wenn t nicht kleiner, als die größte Verbindungsdauer der m überlebenden Personen ist, so wird die am Ende jedes Jahres für eine Versicherung auf die Verbindung der m überlebenden Personen und für die ganze Dauer dieser Verbindung zahlbare Prämie ausgedrückt durch:

$$p = \frac{v}{\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}} + v - 1.$$

Wenn man nur eine Person A betrachtet, so drückt:

$$p = \frac{v\,(1 - a_t \cdot v^t)}{t[\mathrm{A}]} + v - 1 = \frac{v\left(1 - \frac{t_a}{a}\,v^t\right)}{\mathrm{A} - \frac{t_a}{a}\,v^t \cdot {}^t\mathrm{A}} + v - 1$$

die am Ende jedes Jahres für eine Versicherung auf diese Person und auf t Jahre zu zahlende Prämie aus, und die am Ende jedes Jahres zahlbare Prämie für die Versicherung auf dieselbe Person A und auf ihre ganze Lebensdauer wird ausgedrückt durch:

$$p = \frac{v}{\mathrm{A}} + v - 1.$$

§. **40.** Sowohl aufgeschobene Leibrenten, als aufgeschobene Lebensversicherungen werden zuweilen in jährlichen Prämien während der Aufschubszeit bezahlt, wo aber diese jährlichen Zahlungen aufhören, sobald die betreffende Person oder Verbindung von Personen innerhalb dieser Zeit erlöscht. Wenn der gegenwärtige Totalwerth der aufgeschobenen Leibrente mit V bezeichnet wird, so muss die am Ende jedes Jahres zahlbare Prämie nach §. 39 gleich:

$$\frac{V}{t\left[\overset{m}{\overline{\mathrm{A\,B\,C}\ldots}}\right]}$$

sein, und wenn sie im Anfange jedes Jahres zahlbar ist, so muß sie gleich:

$$\frac{V}{1-\overline{(abc\ldots)}^{m}t\,.\,v^t+t\overline{[\mathrm{ABC}\ldots]}^{m}}$$

sein, wo t die Aufschubszeit bezeichnet.

Wenn sich die Leibrente blos auf eine Person A bezieht, und um t Jahre aufgeschoben ist, so ist $V=\frac{{}^ta}{a}v^t\,.\,{}^t\mathrm{A}$.

Wenn also die jährliche Prämie am Ende jedes Jahres zahlbar ist, so muss sie gleich:

$$\frac{\frac{{}^ta}{a}v^t\,.\,{}^t\mathrm{A}}{\mathrm{A}-\frac{a}{a}v^t\,.\,{}^t\mathrm{A}},$$

und wenn sie im Anfange jedes Jahres zahlbar ist, gleich:

$$\frac{\frac{{}^ta}{a}v^t\,.\,{}^t\mathrm{A}}{1+\mathrm{A}-\frac{{}^ta}{a}v^t(1+{}^t\mathrm{A})}$$

sein.

Wenn die Leibrente von der Verbindung der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ abhängt und während der gleichzeitigen Existenz der m' überlebenden von $m'+\mu'$ andern Personen $P, Q, R, \ldots$ aufgeschoben ist, wie in §. 28, so erhält man durch Hinweglassung der ersten Horizontalreihe der allgemeinen Formel in §. 28, welche nur die einzelnen Combinationen der Expectanten enthält, und wenn man die Zeichen aller übrigen Glieder in die entgegengesetzten verwandelt, die Größe, durch welche der gegenwärtige Totalwerth der aufgeschobenen Leibrente dividirt werden muss, damit der Quotient die Prämie ausdrückt, welche am Ende jedes Jahres der gleichzeitigen Existenz der m überlebenden Expectanten und der m' überlebenden Besitzer gezahlt werden muss (§. 25 u. 28). Aber der so erhaltene Divisor ist offenbar gleich:

$$\overline{\mathrm{ABC}\ldots}^{m}-\overline{\mathrm{PQR}\ldots}^{m'}|\overline{\mathrm{ABC}\ldots}^{m},$$

und um die im Anfange jedes Jahres des erwähnten Zeitraumes zu zahlende Prämie zu erhalten, muss man diesen letzten Divisor um die Einheit vermehren.

Wenn also die Gesammtanzahl der Expectanten und Besitzer nicht größer als 3 ist, so sind die Divisoren für die jährliche Prämie in den 5 vorkommenden Fällen, und für welche die Totalwerthe der Leibrenten in §. 28 angegeben sind, folgende:

	Divisor zur Bestimmung der jährlichen Prämie, zahlbar	
Fall.	am Ende jedes Jahres.	im Anfange jedes Jahres.
1	AP	1+AP
2	ABP	1+ABP
3	APQ	1+APQ
4	AP+AQ—APQ	1+AP+AQ—APQ
5	AP+BP—ABP	1+AP+BP—ABP

§. 41. Aus §. 12 erhellet, daß:

$$\overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$\overset{2}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

ist; und allgemein, wenn wir die Summe der gegenwärtigen Werthe der Versicherungen auf die Verbindung der Personen in jeder Combination der νten Ordnung, d. h. auf jede mögliche Verbindung von $m+\nu-1$ Personen, welche sich aus $m+\mu$ Personen bilden lassen, mit $\overset{\nu}{\mathfrak{H}}$ bezeichnen; so haben wir nach §. 12:

$$\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}} = \overset{1}{\mathfrak{H}} - m\overset{2}{\mathfrak{H}} + m.\frac{m+1}{2}\overset{3}{\mathfrak{H}} - m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}\overset{4}{\mathfrak{H}} + \ldots$$

Dieses alles ist dem in §. 28 in Beziehung auf die Werthe der Leibrenten Gesagten analog, und es erhellet hieraus, daß, wenn die Werthe der Versicherungen auf jede mögliche Verbindung von Personen berechnet wären, sich die Aufgaben über die Werthe der Versicherungen auf die gleichzeitige Existenz irgend einer Anzahl von überlebenden aus einer beliebigen gegebenen Anzahl von Personen genau auf dieselbe Weise daraus ableiten ließen, wie dieses bei den Leibrenten ge=

schehen ist. Es ist aber hierbei nicht nöthig, sowohl Tafeln für die Werthe der Leibrenten, als für die der Lebensversicherungen auf eine Verbindung von Personen zu berechnen; denn aus dem Obigen geht hervor, dass, wenn der Werth einer Leibrente auf irgend eine Anzahl von Personen bestimmt ist, sich der Werth einer Versicherung auf dieselben Personen leicht daraus ableiten lässt, und ebenso leicht ließe sich umgekehrt der Werth der Leibrente aus dem bekannten Werthe der Versicherung ableiten.

Wenn die betrachteten Personen alle einander gleich sind, so folgt aus den letzten Formeln offenbar:

$$\overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}} = 2\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{A},$$

$$\overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}}} = 3\mathfrak{A} - 3\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A},$$

$$\overset{2}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}}} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}$$

und in Beziehung auf den allgemeinen Fall einer beliebigen Anzahl gleicher Personen vergleiche man das S. 419 Gesagte, was auch hier anwendbar ist.

Von den Versicherungen, welche von einer bestimmten Ordnung des Ueberlebens abhängen.

§. 42. Wir wollen den Werth einer Summe bestimmen, welche bei der Erlöschung einer Person, oder einer Verbindung von mehrern Personen zahlbar ist, wofern das Absterben dieser Personen in einer vorher bestimmten Ordnung stnttfindet. Die Bezeichnungen, welche wir bei dieser Untersuchung anwenden wollen, sind in folgendem Schema enthalten:

Der gegenwärtige Totalwerth von 1 Thaler, zahlbar am Ende des Jahres, worin stirbt	soll bezeichnet werden mit:
A früher als *B*	$\underset{1}{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$
A später als *B*	$\underset{2}{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$
A zuerst von den drei Personen *A*, *B*, *C* . .	$\underset{1}{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$
A zum zweiten	$\underset{2}{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$
entweder *A*, oder *B* zuerst von den drei Personen *A*, *B*, *C*	$\underset{1}{\mathfrak{A}}.\underset{1}{\mathfrak{B}}\mathfrak{C}$
A zuerst, oder zum zweiten von diesen drei Personen .	$\underset{1\cdot 2}{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$
die überlebende der beiden Personen *A* und *B* früher als die dritte Person *C* . .	$\overset{1}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}\underset{3}{\mathfrak{C}}$
die überlebende der beiden Personen *A* und *B* später als dieselbe	$\overset{2}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}\underset{1\cdot 2}{\mathfrak{C}}$

§. 43. Aufgabe 8. Den gegenwärtigen Werth $\underset{1}{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ von 1 Thlr. zu bestimmen, welcher am Ende des Jahres, worin die Person *A* stirbt, zahlbar ist, wofern eine andere Person *B* noch lebt.

Auflösung. Aus §§. 18 u. 19 erhellet, daß der Werth der Erwartung, am Ende des *n* ten Jahres 1 Thaler zu erhalten, durch:

$$\tfrac{1}{2}\left[(ab)_{n-1}-(ab)_n+\frac{({}_1ab)_n}{{}_1a_1}-\frac{(a\,{}_1b)_n}{{}_1b_1}\right]v^n$$

und der gesuchte Totalwerth durch:

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\left[(ab)_n+\frac{({}_1ab)_n}{{}_1a_1}-\frac{(a\,{}_1b)_n}{{}_1b_1}\right]v^n \quad (\S.\ 12)$$

ausgedrückt wird. Folglich ist:

$$\underset{1}{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\frac{{}_1\mathrm{AB}}{{}_1a_1}-\frac{\mathrm{A}\,{}_1\mathrm{B}}{{}_1b_1}\right].$$

Hieraus folgt, wenn man *C* für *B* substituirt:

$$\underset{1}{\mathfrak{A}}\mathfrak{C}=\tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\frac{{}_1\mathrm{AC}}{{}_1a_1}-\frac{\mathrm{A}\,{}_1\mathrm{C}}{{}_1c_1}\right],$$

und wenn man B für A setzt:

$$\underset{1}{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{C}=\tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}+\frac{{}_1\mathrm{B\,C}}{{}_1b_1}-\frac{\mathrm{B}\,{}_1\mathrm{C}}{{}_1c_1}\right]$$

Schließt man wie in §§. 26 u. 27, so erhellet aus dem Obigen, daſſ für eine temporäre Versicherung:

$$t[\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}]=\tfrac{1}{2}\left[t[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]+\frac{1}{{}_1a_1}t[{}_1\mathrm{AB}]-\frac{1}{{}_1b_1}t[\mathrm{A}\,{}_1\mathrm{B}]\right]$$

und für eine aufgeschobene:

$$[\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}]t=\tfrac{1}{2}\left[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]t+\frac{1}{{}_1a_1}[{}_1\mathrm{AB}]t-\frac{1}{{}_1b_1}[\mathrm{A}\,{}_1\mathrm{B}]t\right]$$

ist. Wenn die beiden Personen einander gleich sind, so ist:

$$\frac{{}_1\mathrm{AB}}{{}_1a_1}=\frac{\mathrm{A}\,{}_1\mathrm{B}}{{}_1b_1}=\frac{{}_1\mathrm{AA}}{{}_1a_1}\text{ und folglich }\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{A}=\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}.$$

Der Werth der jedem Falle entsprechenden jährlichen Prämie wird resp. ausgedrückt durch:

$$\text{Pr. }\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{{}_1\mathrm{AB}}{{}_1a_1}-\frac{\mathrm{A}\,{}_1\mathrm{B}}{{}_1b_1}}{1+\mathrm{AB}}+v-1\right],\quad (\S.\ 35)$$

$$\text{Pr. }[\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}]t=\frac{[\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}]t}{1+\mathrm{AB}},$$

$$\text{Pr. }t[\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}]=\frac{t[\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}]}{1-(ab)_t v^t+t[\mathrm{AB}]},$$

d. h.

$$\text{Pr. }t[\underset{1}{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}]=\tfrac{1}{2}\,\frac{1-(ab)_t v^t+\frac{1}{{}_1a_1}t[{}_1\mathrm{AB}]-\frac{1}{{}_1b_1}t[\mathrm{A}\,{}_1\mathrm{B}]}{1-(ab)_t v^t+t[\mathrm{AB}]}+v-1.$$

(§. 36.)

Wenn eine Summe einer Person P oder ihren Erben für den Fall, daſſ A früher stirbt, als B und einer Person Q oder ihren Erben für den Fall, daſſ B früher stirbt, als A, versichert ist, so muſſ diese Summe offenbar bei der Auflösung der Verbindung der Personen A und B entweder an P, oder Q, oder an ihre resp. Erben gezahlt werden, so daſſ:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

folglich:
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}_1\mathfrak{B},$$
$$t[\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1] = t[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] - t[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}]$$

und:
$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1]t = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]t - [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}]t$$

ist.

§. 44. **Aufgabe 9.** Den gegenwärtigen Werth $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}$ von 1 Thaler zu bestimmen, welcher am Ende des Jahres zahlbar ist, worin die Person A stirbt, vorausgesetzt, dass die Person B schon früher gestorben ist.

Auflösung. Wenn eine Summe einer Person P für den Fall, dass A früher stirbt, als B und dieselbe Summe einer Person Q für den Fall, dass A später stirbt, als B, versichert ist; so muss entweder P, oder Q, oder ihre resp. Erben diese Summe bei dem Tode der Person A erhalten, und die Summe der gegenwärtigen Werthe der Interessen der Personen P und Q, oder ihrer resp. Erben an dieser Versicherung ist daher offenbar dem gegenwärtigen Werthe der Versicherung derselben Summe auf die Person A gleich, d. h. es ist:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{A}, \text{ folglich } \mathfrak{A}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}.$$

Ebenso erhellet, dass:

$$t[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}] = t[\mathfrak{A}] - t[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}]$$

und:
$$[\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}]t = [\mathfrak{A}]t - [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}]t$$

ist. Wenn die beiden Personen einander gleich sind, so ist:

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A} = \mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}^{1}. \quad (\text{§§. 40 u. 43.})$$

Ferner ist:
$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_2 = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^{1};$$

folglich:
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2 = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^{1} - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B},$$

was sich auch auf folgende Weise ergibt. Es ist nämlich:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B},$$

folglich: $$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1,$$

d. h. $$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1.$$

Wenn drei Personen in Betracht kommen, so besteht eine der größten Schwierigkeiten in der genauen Bestimmung aller der möglichen Fälle und ihrer resp. Wahrscheinlichkeiten, in welchen die versicherte Summe zahlbar ist; allein der Raum gestattet uns hier nicht, in diese Art von Aufgaben näher einzugehen.

Von den Leibrenten auf successive Besitzer.

§. 45. Aufgabe 10. Am Ende des Jahres, worin sich die Verbindung der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ auflöst, erhält die Person Π oder ihre Erben die Summe von 1 Thaler und kommt zugleich in den Besitz einer Leibrente von 1 Thaler, welche sie während der gleichzeitigen Existenz der letzten m' überlebenden von $m'+\mu'$ andern Personen $P, Q, R, \ldots$ zieht, und man soll den Werth des Interesses von Π bestimmen.

Auflösung 1. Der Werth der Leibrente ist zur Zeit ihres Beginnens $=\overset{m'}{\overline{\mathrm{PQR}\ldots}}$ und der Totalwerth der ganzen Erwartung der Person Π oder ihrer Erben zu der erwähnten Zeit ist $=1+\overset{m}{\overline{\mathrm{PQR}\ldots}}$, folglich der gegenwärtige Werth ihres Interesses gleich:

$$(1+\overset{m'}{\overline{\mathrm{PQR}\ldots}})\,\overset{m}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots}}=$$

$$(1+\overset{m'}{\overline{\mathrm{PQR}\ldots}}).\left[v-(1-v\overset{m}{\overline{\mathrm{ABC}\ldots}}\right] \quad (\S.\ 34.)$$

Auflösung 2. Am Ende des Jahres, worin sich die Verbindung der letzten m überlebenden der $m+\mu$ Personen $A, B, C, \ldots$ auflöst, ist der Werth des Interesses der Person Π oder ihrer Erben $=1+\overset{m'}{\overline{\mathrm{PQR}\ldots}}$, und der Werth einer perpetuirlichen Leibrente von 1 Thaler, deren erste Jahresrente zu dieser Zeit gezahlt wird, ist für denselben Zeitpunkt $=1+\frac{1}{r}=\frac{1}{rv}=\frac{1}{1-v}$. Aber der gegenwärtige Werth des Interesses der Person Π verhält sich zu dem gegenwärtigen

Werthe $\frac{1}{r} - \overline{\text{A B C} \ldots}^{m}$ der Anwartschaft auf die perpetuirliche Rente, wie $1 + \overline{\text{P Q R} \ldots}^{m'}$ zu $\frac{1}{1-\rho}$ (S. 436 u. 443) und ist folglich gleich:

$$\left(1 + \overline{\text{P Q R} \ldots}^{m'}\right)\left[\rho - (1-\rho)\overline{\text{A B C} \ldots}^{m}\right],$$

wie vorhin.

Ebenso erhellet, dass, wenn man nur eine Person A betrachtet, bei deren Tode die Person Π, oder ihre Erben die Summe von 1 Thaler erhält und in den Besitz einer Leibrente auf eine Person P, die alsdann bestimmt wird, kommt, der gegenwärtige Werth des Interesses der Person Π durch:

$$(1+\text{P})[\rho - (1-\rho)\text{A}] = (1+\text{A}).(1+\text{P})\rho - \text{A}(1+\text{P})$$

ausgedrückt wird, und wenn man hierzu den Werth **A** der Leibrente für die erste Person addirt, so erhält man:

$$(1+\text{A}).(1+\text{P})\rho - \text{A} \times \text{P}$$

für den gegenwärtigen Werth des Interesses der beiden successiven Besitzer A und P.

Wenn statt der Leibrente auf die Personen P, Q, R, ... eine gewisse Rente für den Zeitraum von ν Jahren gesetzt wird, die am Ende des Jahres zahlbar wird, worin sich die Verbindung der letzten m überlebenden von $m+\mu$ Personen A, B, C, ... auflöst; so erhält man, wenn man den Werth $\frac{1-\rho^{\nu}}{r}$ dieser gewissen Rente für den Zeitpunkt ihres Beginnens statt des Werthes $\overline{\text{P Q R} \ldots}^{m}$ des Interesses der ernannten Nachfolger zu derselben Zeit in die allgemeine Formel substituirt:

$$\left(1 + \frac{1-\rho^{\nu}}{r}\right)\left[\rho - (1-\rho)\overline{\text{A B C} \ldots}^{m}\right]$$

für den gegenwärtigen Werth des Interesses der Person Π.

Wenn die gewisse Rente eine perpetuirliche ist, so ist $\rho^{\nu} = 0$ und der Werth des Interesses der Person $\Pi = \frac{1}{r} - \overline{\text{A B C} \ldots}^{m}$, was mit §. 30 u. 34 übereinstimmt.

§. 46. **Aufgabe 11.** Wenn der gegenwärtige Werth s

einer Leibrente für $n-1$ successive Besitzer und der Werth s' derselben für den $n$ten Besitzer zur Zeit seiner Ernennung oder Nachfolge gegeben sind, den gegenwärtigen Werth der Leibrente für diesen $n$ten Besitzer und den für alle n successive Besitzer zu finden.

Auflösung. Wenn man wie bei der zweiten Auflösung der vorhergehenden Aufgabe schließt, so ist klar, dass der Werth der perpetuirlichen Rente nach allen successiven Besitzern vor dem $n$ten $=\frac{v}{1-v}-s$ ist, und dass sich verhält:

$$\frac{1}{1-v}:1+s'=\frac{v}{1-v}-s:(1+s').[v-(1-v)s],$$

und folglich ist:

$$(1+s).(1+s')v-s(1+s')$$

der gegenwärtige Werth des Interesses des $n$ten Nachfolgers, welches dem gegenwärtigen Werthe der Versicherung der Summe von $1+s'$ Thaler auf eine oder mehrere Personen, deren Interesse denselben Werth s hat, gleich ist (§. 34), und wenn man hierzu den Werth s der Interessen der $n-1$ frühern Nachfolger addirt; so erhält man:

$$(1+s).(1+s')v-s\times s'$$

für den Werth der Interessen aller n Nachfolger. Oder wenn der Werth der Interessen aller n Nachfolger vermittelst der Formel $(1+s).(1+s')v-s\times s'$ zuerst bestimmt ist, so erhält man durch Abzug von s oder des gegebenen Werthes der Interessen aller vorhergehenden Nachfolger den gegenwärtigen Werth des Interesses des $n$ten Nachfolgers.

§. 47. Es sei t die Anzahl der Jahre, während welcher eine gewisse Rente von dem Totalwerthe $\overline{\overset{m}{\mathrm{ABC}\ldots}}$ zahlbar sein muss, so ist:

$$\frac{1-v^t}{r}=\frac{v-v^{t+1}}{1-v}=\overline{\overset{m}{\mathrm{ABC}\ldots}}$$

und: $$\overline{\overset{m}{\mathfrak{ABC}\ldots}}=v-(1-v)\overline{\overset{m}{\mathrm{ABC}\ldots}}=v^{t+1}.\ (\S.\ 34)$$

Wenn also der Werth einer Leibrente auf eine oder mehrere Personen gegeben ist, so lässt sich der Werth einer Versicherung auf dieselben daraus ableiten, wenn man zuerst die Anzahl der Jahre einer gewissen Rente von demselben Werthe als die Interessen der gegebenen

Person oder Personen berechnet und dann den gegenwärtigen Werth von 1 Thaler bestimmt, welcher am Ende des ersten Jahres nach Verlauf dieser Zeit zahlbar ist.

Es bezeichne nun t und t' die Anzahl von Jahren, während welcher gewisse Renten zahlbar sein müssen, damit ihre Totalwerthe resp. $= s$ und $= s'$ sind, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$v - (1 - v)s = v^{t+1},$$

und:

$$(1 + s').[v - (1 - v)s] = \frac{v^{t+1} - v^{t+t'+2}}{1 - v}$$

der gegenwärtige Werth des Interesses des $n$ten Nachfolgers (§. 46), und wenn man hierzu den Werth der Interessen der $n - 1$ vorhergehenden Nachfolger, nämlich $s = \frac{v - v^{t+1}}{1 - v}$ addirt; so erhält man:

$$\frac{v}{1 - v}(1 - v^{t+t'+1}) = \frac{1 - v^{t+t'+1}}{r}$$

für den gegenwärtigen Werth der Interessen aller n successiven Nachfolger, welcher folglich dem Werthe einer gewissen Rente für den Zeitraum von $t + t' + 1$ Jahren gleich ist. Aber nach der Voraussetzung ist der Werth der Interessen der $n - 1$ ersten Nachfolger dem Werthe einer gewissen Rente für den Zeitraum von t Jahren gleich, und wenn man noch den Werth des Interesses eines $n$ten Nachfolgers, welches zur Zeit der Ernennung dem Werthe einer gewissen Rente für t' Jahre gleich ist, hinzuaddirt, so wird der Zeitraum einer gewissen Rente, welche einer Leibrente auf alle Nachfolger gleich ist, um $t' + 1$ Jahre erweitert. Wenn man ferner das Interesse eines neuen Nachfolgers, welches zur Zeit seiner Ernennung dem Werthe einer gewissen Rente für t' Jahre gleich ist, addirt, so wird der Zeitraum, am Ende dessen 1 Thaler, welchen man gewiss erhält, jetzt denselben Werth hat, als 1 Thaler, welcher am Ende des Jahres erhalten wird, in welchem der letzte Nachfolger stirbt, um $t' + 1$ Jahre erweitert.

Hieraus folgt also, dass, wenn die Werthe der Leibrenten auf den jetzigen Besitzer und auf den 1ten, 2ten, 3ten, ... von ν andern nachfolgenden Besitzern zur Zeit ihrer resp. Ernennungen mit A, A', A'', ... bezeichnet werden, und die Zeiträume der gewissen Renten von gleichen Werthen resp. mit t, t', t'', ..., der gegenwärtige Werth der Interessen aller Nachfolger $= \frac{1 - v^{\sigma}}{r}$ ist, d. h. gleich dem Werthe ei-

ner gewissen Rente für den Zeitraum von σ Jahren, wo $\sigma = \nu + t + t' + t'' + t''' + \ldots + t^{(\nu)}$ ist.

Wenn das Interesse jedes Nachfolgers des gegenwärtigen Besitzers zur Zeit ihrer successiven Ernennung dem Werthe einer gewissen Rente für den Zeitraum von t' Jahren gleich ist, so ist $\sigma = t + \nu(t' + 1)$, und der gegenwärtige Werth der Interessen aller Nachfolger ist alsdann $= \frac{1 - v^{t+\nu(t'+1)}}{r}$.

Hieraus folgt ferner, daß der gegenwärtige Werth von 1 Thaler, welcher bei dem Tode des νten Nachfolgers zahlbar ist, $= v^{\sigma+1}$ ist, wo σ denselben Werth hat, wie vorhin. Ferner folgt aus dem Vorhergehenden, daß, wenn das Interesse jedes der ν Nachfolger des jetzigen Besitzers dem Werthe einer Leibrente auf jeden derselben zur Zeit seiner Ernennung oder dem Werthe einer gewissen Rente für t' Jahre gleich ist, der Werth von 1 Thlr., welcher am Ende des Jahres zahlbar ist, in welchem der letzte Nachfolger stirbt, $= v^{t+1+\nu(t'+1)}$ ist.

§. 48. Aufgabe 12. Ein Erbpachtcontract über ein Grundstück lautet auf eine gewisse Anzahl von Personen $A, B, C, \ldots$ und das Pachtgeld beträgt s Thaler, mit der Bedingung, daß der Pächter und seine Nachfolger das Recht haben, den Contract bei dem Tode irgend einer der Personen fortwährend wieder zu erneuern, wenn sie die Summe f zahlen; man soll den gegenwärtigen Totalwerth des Pachtgeldes für dieses Gut bestimmen.

Auflösung. Die Werthe der Interessen der Personen, welche das Gut gegenwärtig besitzen, und derer, welche direct auf jede derselben resp. folgen, und die gewissen Renten, welche den Interessen aller dieser Personen zur Zeit ihrer resp. Ernennungen resp. gleich sind, wollen wir mit:

$$\begin{cases} A, & A', & A'', & A''', & etc. \\ t, & t', & t'', & t''', & etc. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B, & B', & B'', & B''', & etc. \\ \mathfrak{t}, & \mathfrak{t}', & \mathfrak{t}'', & \mathfrak{t}''', & etc. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C, & C', & C'', & C''', & etc. \\ \tau, & \tau', & \tau'', & \tau''', & etc. \end{cases}$$

$$etc. \quad etc. \quad etc.$$

bezeichnen, so erhellet aus §. 47, daß der gegenwärtige Werth aller Erneuerungssummen des Contractes durch:

$$f.\left\{\begin{array}{l} v^{t+1}(1+v^{t'+1}+v^{t'+t''+2}+v^{t'+t''+t'''+3}+etc.) \\ +v^{\iota+1}(1+v^{\iota'+1}+v^{\iota'+\iota''+2}+v^{\iota'+\iota''+\iota'''+3}+etc.) \\ +v^{\tau+1}(1+v^{\tau'+1}+v^{\tau'+\tau''+2}+v^{\tau'+\tau''+\tau'''+3}+etc.) \\ +etc.(\quad etc. \qquad etc. \qquad etc. \qquad etc.) \end{array}\right\}$$

ausgedrückt wird, und wenn hierzu die bei dem Abschlusse des Contractes gezahlte Summe s addirt wird, so drückt die Totalsumme den gegenwärtigen Totalwerth dessen aus, was die Pächter und ihre Nachfolger für die immerwährende Benutzung des Grundstückes zahlen können.

Wenn die Personen, durch welche der Pachtcontract erneuert wird, alle einander und ihre Interessen zur Zeit ihrer Ernennung dem Werthe einer gewissen Rente für den Zeitraum von t' Jahren einzeln gleich sind; so ist der Totalwerth der Erbpacht gleich:

$$s+f(v^{t+1}+v^{\iota+1}+v^{\tau+1}+etc.).(1+v^{t'+1}+v^{2(t'+1)}+v^{3(t'+1)}+etc.),$$

wo die Anzahl der Glieder zwischen den ersten Parenthesen der Anzahl der Personen, welche das Gut im Besitz haben, gleich, und die Anzahl der Glieder in den zweiten Parenthesen unbegrenzt ist, weil die Erneuerung des Pachtcontractes fortwährend stattfindet. Aber $v^{t'+1}+v^{2(t'+1)}+v^{3(t'+1)}+\ldots$ ist der gegenwärtige Werth von 1 Thaler, welcher nach Verlauf jeder Periode von $t'+1$ Jahren zahlbar ist, und da ein Kapital von 1 Thaler bei Zinseszinsen nach Verlauf von $t'+1$ Jahren $=(1+r)^{t'+1}$ geworden ist, so ist der Zinsenbetrag für diesen Zeitraum $=(1+r)^{t'+1}-1$. Aber da sich verhält:

$$(1+r)^{t'+1}-1:1=1:\frac{1}{(1+r)^{t'+1}-1}=\frac{v^{t'+1}}{1-v^{t'+1}},$$

so drückt $\frac{v^{t'+1}}{1-v^{t'+1}}$ die Summe aus, welche man bei Zinseszinsen jetzt für 1 Thaler geben kann, der erst nach Verlauf von $t'+1$ Jahren zahlbar ist, so dass:

$$1+v^{t'+1}+v^{2(t'+1)}+v^{3(t'+1)}+etc.=\frac{1}{1-v^{t'+1}}$$

ist, und der obige Ausdruck für den Totalwerth der Erbpacht ist gleich:

$$s+\frac{f}{1-v^{t'+1}}(v^{t+1}+v^{\iota+1}+v^{\tau+1}+etc)$$

oder:

$$s+\frac{f}{1-\rho^{t'+1}}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+etc.)$$

Wenn blos eine Person A das Gut im Besitze hätte, so wäre der vorhrrgehende Werth:

$$s+\frac{f\rho^{t+1}}{1-\rho^{t'+1}} \text{ oder } s+\frac{f\mathfrak{A}}{1-\rho^{t'+1}},$$

und wenn man hiervon die bei Abschluss des Contractes gezahlte Summe s abzieht, so drückt:

$$\frac{f\rho^{t+1}}{1-\rho^{t'+1}}, \text{ oder } \frac{f\mathfrak{A}}{1-\rho^{t'+1}}$$

den gegenwärtigen Werth aller Erneuerungssummen für den fraglichen Fall aus.

Wenn die Anzahl der Personen, auf welche sich die Pacht zuerst bezieht, $= m$ ist, und jede, sowohl bei Abschluss des Contractes, als später bei den Erneuerungen der in Betracht kommenden Personen $= A$ ist, so ist der Totalwerth der Pacht:

$$s+\frac{mf\mathfrak{A}}{1-\mathfrak{A}}=s+\frac{mf(1-r\mathrm{A})}{r(1+\mathrm{A})}.$$

Setzt man den Totalwerth der Pacht:

$$\begin{aligned} f[&\rho^{t+1}(1+\rho^{t'+1}+\rho^{t'+t''+2}+etc.)+\\ &\rho^{\mathrm{t}+1}(1+\rho^{\mathrm{t}'+1}+\rho^{\mathrm{t}'+\mathrm{t}''+2}+etc.)+\\ &\rho^{\tau+1}(1+\rho^{\tau'+1}+\rho^{\tau'+\tau''+2}+etc.)+\\ &etc. \quad etc. \quad etc. \quad etc.]+s=p, \end{aligned}$$

oder gleich dem Werthe einer perpetuirlichen Rente, so dass, wenn π den jährlichen Reinertrag des Gutes bezeichnet, $p=\frac{\pi}{r}$ ist; so hat man:

$$f=\frac{p-s}{\rho^{t+1}(1+\rho^{t'+1}+\rho^{t'+t''+2}+etc.)+\rho^{\mathrm{t}+1}(1+\rho^{\mathrm{t}'+1}+\rho^{\mathrm{t}'+\mathrm{t}''+2}+etc.)+etc.}$$

für die Summe, welche bei jeder Erneuerung gezahlt werden muss,

und welche, wenn die Erneuerungspersonen alle einander gleich sind, sich in:

$$\frac{(p-s)(1-\varrho^{t'+1})}{\varrho^{t+1}+\varrho^{\iota+1}+\varrho^{\tau+1}+etc.}=\frac{(p-s)(1-\varrho^{t'+1})}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\ldots}$$

verwandelt.

Weiter können wir uns hier auf diesen Gegenstand nicht einlassen, und wir verweisen daher diejenigen Leser, welche umständlichere Belehrung wünschen, auf Fr. Baily's Theorie der Lebensrenten, Lebensversicherungen u. s. w. Deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse. Weimar **1839**, bei B. F. Voigt.

Anhang II.

Von der moralischen Hoffnung.

Es ist bereits in §. 24 bemerkt worden, dass der Vortheil, welchen ein Gewinn Jemandem verschafft, von seinem Vermögenszustande abhängig ist, und dasselbe gilt offenbar auch in Beziehung auf einen Verlust. So ist z. B. die Summe von **100** Thalern für eine Person A, welche **100000** Thaler im Vermögen hat, von keinem größern Vortheil, keiner größern Wichtigkeit, oder keinem größern moralischen Werthe als die Summe von **1** Thaler für eine Person B, die nur **1000** Thaler im Vermögen hat. Hiernach ist es natürlich, die Wichtigkeit einer Summe s für eine Person, deren Vermögen $= v$ ist, dem Verhältnisse $\frac{s}{v}$ proportional, also $= m.\frac{s}{v}$ zu setzen, wo die Constante m für verschiedene Zeiten, Oerter, *etc.* verschieden sein kann.

Nach dieser Ansicht der Sache ließe sich also auch die Wichtigkeit oder der moralische Werth des Vermögens einer Person A, welches von dem anfänglichen Werthe v zu dem Werthe V angewachsen ist, für diese Person leicht bestimmen. Denn bezeichnen $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$ die successiven Zuwächse des anfänglichen Vermögens v dieser Person, bis es den Werth V erreicht hat, so wird der moralische Werth oder die Wichtigkeit des Vermögens V für die Person A offenbar ausgedrückt durch:

$$m\left[\frac{i_1}{v}+\frac{i_2}{v+i_1}+\frac{i_3}{v+i_1+i_2}+\ldots+\frac{i_n}{V-i_n}\right].$$

Da aber im Allgemeinen die Incremente $i_1, i_2, i_3, \ldots$ unbekannt sind, so hat Daniel Bernoulli, um zu bestimmten Resultaten zu gelangen, angenommen, sie seien sämmtlich unendlich klein, so dass, wenn allgemein x das anfängliche Vermögen einer Person A bezeichnet, dx ein solches unendlich kleines Increment desselben ist und der moralische Werth eines solchen Incrementes dx nach dem Vorhergehenden folglich durch $m\frac{dx}{x}$ ausgedrückt wird. Die Wichtigkeit oder

der moralische Werth des Vermögens V ist also für eine Person, deren anfängliches Vermögen $= v$ war:

$$\int_v^V m \frac{dx}{x} = m(\log V - \log v) = m \log \frac{V}{v}.$$

Dieser moralische Werth des Vermögens V ist offenbar größer, als wenn v nicht nach unendlich kleinen, sondern nach endlichen Incrementen bis V zunimmt, und zwar wird dieser moralische Werth desto kleiner, je größer diese Incremente sind, was auch mit unserm gewöhnlichen Urtheile übereinstimmt; denn wir legen einem mühsam und allmählig erworbenen Vermögen einen weit größern Werth bei, als einem leicht und mit einem Male erlangten Vermögen. Aus dem Ausdrucke:

$$m \log \frac{V}{v}$$

folgt, daß der moralische Werth eines Vermögens V desto größer ist, je größer dasselbe ist, aber auch, je kleiner das anfängliche Vermögen v war, was ebenfalls mit dem Urtheile des gesunden Verstandes übereinstimmt. Wenn z. B. für eine Person A, $v = 1000$ Thaler, $V = 100000$ Thaler und für eine Person B, $v = 100$ Thaler, und V ebenfalls $= 100000$ Thaler ist, und die Constante m für beide Personen denselben Werth hat; so verhalten sich die moralischen Werthe desselben Vermögens $V = 100000$ Thaler für die beiden Personen A und B wie 2 zu 3.

Wenn $V = v$ ist, d. h. wenn sich das anfängliche Vermögen v gar nicht vermehrt hat, so ist sein moralischer Werth $= 0$, und wenn sich v verkleinert, statt vergrößert hat, so ist $V < v$ und folglich der moralische Werth negativ.

In dem Ausdrucke $m \log \frac{V}{v}$ dürfen die Größen V und v weder als Null, noch als negativ angenommen werden, weil sonst der Ausdruck seine bestimmte Bedeutung verliert; und in der That darf in moralischem Sinne das Vermögen keines Menschen, selbst wenn er bettelt und von geborgtem Gelde lebt, als Null oder negativ betrachtet werden; denn sein Vermögen ist doch wenigstens seiner Subsistenz gleich, welche er sich durch Anwendung seiner Kräfte und durch seinen Fleiß verschafft. Man kann also im moralischen Sinne nur dann sagen, das Vermögen eines Menschen sei $= 0$, wenn er den Hungerstod stirbt.

Wenn eine Person A von dem Vermögen v mehrere ungewisse

Summen s, s_1, s_2, ... mit den resp. Wahrscheinlichkeiten p, p_1, p_2, ... als Gewinne, oder Verluste erwartet, so ist der Werth dieser Erwartungen nach dem Principe der mathematischen Hoffnung:

$$\pm ps \pm p_1 s_1 \pm p_2 s_2 \pm \ldots,$$

aber der moralische Werth dieser Erwartungen wird für die Person A nach dem Vorhergehenden ausgedrückt durch:

$$Y = m\left[p \log\left(\frac{v \pm s}{v}\right) + p_1 \log\left(\frac{v \pm s_1}{v}\right) + p_2 \log\left(\frac{v \pm s_2}{v}\right) + \ldots\right].$$

Bezeichnet nun V den Werth, welchen das Vermögen V der Person A in Folge dieser Erwartungen bekommt, so ist offenbar auch:

$$Y = m \log\left(\frac{V}{v}\right),$$

folglich:

$$\log\left(\frac{V}{v}\right) = p \log\left(\frac{v \pm s}{v}\right) + p_1 \log\left(\frac{v \pm s_1}{v}\right) + p_2 \log\left(\frac{v \pm s_2}{v}\right) + \ldots$$

oder:

$$\log V - \log v = \log\left[(v \pm s)^p (v \pm s_1)^{p_1} (v \pm s_2)^{p_2} \ldots\right]$$
$$- \log v^{p+p_1+p_2+\ldots}$$

also: $$V = (v \pm s)^p (v \pm s_1)^{p_1} (v \pm s_2)^{p_2} \ldots \qquad (x)$$

weil $p + p_1 + p_2 + \ldots = 1$, und folglich $\log v^{p+p_1+p_2+\ldots} = \log v$ ist, wenn, wie vorausgesetzt wird, p, p_1, p_2, ... die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Fälle bezeichnen.

Laplace hat die Differenz $V - v$ die moralische Hoffnung der Person A genannt, und wenn man den Werth $V - v$ nach den Potenzen von v entwickelt, und bei dem Gliede mit den ersten Potenzen der ungewissen Summen s, s_1, s_2, ... stehen bleibt, wenn nämlich diese Summen gegen v sehr klein sind; so erhält man:

$$v^{p+p_1+_2+\ldots} + v^{p+p_1+p_2+\ldots-1}(ps + p_1 s_1 + p_2 s_2 + \ldots) - v$$

oder:

$$ps + p_1 s_1 + p_2 s_2 + \ldots,$$

d. h. wenn die eventuellen Summen gegen das anfängliche Vermögen einer Person A sehr klein sind, so ist die moralische Hoffnung der mathematischen gleich.

Aus dem Ausdrucke $m \log\left(\frac{V}{v}\right)$ folgt ferner, dass dieselbe Summe s für dieselbe Person A als Gewinn eine geringere Wichtigkeit hat, wie als Verlust. Denn setzt man successive $V = v + s$, und $V = v - s$, so ist $m \log\left(\frac{v+s}{v}\right) = m[\log(v+s) - \log v]$ die Wichtigkeit oder der moralische Werth der Summe s als Gewinn, und $m \log\left(\frac{v-s}{v}\right) = m[\log(v-s) - \log v]$ die Wichtigkeit derselben Summe s als Verlust. Nun ist aber dem absoluten Werthe nach:

$$\log v - \log(v-s) > \log(v+s) - \log v,$$

weil bekanntlich die Unterschiede der Logarithmen je zweier, um dieselbe Differenz verschiedener Zahlen desto kleiner sind, je größer diese Zahlen selbst sind.

Hieraus folgt, dass sich die Vermögensumstände einer Person verschlechtern, wenn sie sich auf ein Spiel einlässt, wobei die Wahrscheinlichkeit, eine Summe s zu gewinnen, ebenso groß ist, als die sie zu verlieren, und zwar ist diese Verschlechterung desto beträchtlicher, je geringer das Vermögen der Person A ist.

Dieses findet auch in dem allgemeinen Falle statt, wo die Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen und zu verlieren nicht einander gleich sind, sondern sich nach der mathematischen Hoffnung umgekehrt wie die Einsätze verhalten. Denn bezeichnet v wieder das Vermögen der betrachteten Person A, ehe sie das Spiel eingeht, p die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen und s den Einsatz, so muss, damit das Spiel gleich ist, der Einsatz des andern Spielers $= \frac{(1-p)}{p} s$ sein. Wenn also die Person A das Spiel gewinnt, so ist ihr Vermögen $= v + \frac{(1-p)}{p} s$ mit der Wahrscheinlichkeit p, und wenn sie das Spiel verliert, so ist ihr Vermögen $= v - s$ mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$. Bezeichnet nun wieder V das Vermögen der Person A in Folge dieser Erwartungen, so ist:

$$V = \left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v-s)^{1-p}, \qquad (y)$$

und um zu beweisen, dass:

$$\left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v-s)^{1-p} < v$$

ist, braucht nur gezeigt zu werden, dass

$$\left(1+\frac{1-p}{p}\cdot\frac{s}{v}\right)^p\left(1-\frac{s}{v}\right)^{1-p}<1$$

ist. Wenn man aber von dem ersten Theile dieser letzten Ungleichheit die Neperschen Logarithmen nimmt, so hat man:

$$p\,log\left(1+\frac{1-p}{p}\cdot\frac{s}{v}\right)+(1-p)\,log\left(1-\frac{s}{v}\right)$$
$$=\int(1-p)\frac{ds}{v}\left(\frac{1}{1+\frac{1-p}{p}\cdot\frac{s}{v}}-\frac{1}{1-\frac{s}{v}}\right),$$

welche Größe offenbar negativ oder <1 ist, und folglich ist auch $V<v$. Alle diese Folgerungen aus der Bernoullischen Grundformel stimmen mit dem Urtheile des gesunden Menschenverstandes überein.

Wenn z. B. Jemand 100 Thaler besitzt und die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, 50 Thaler zu gewinnen, oder zu verlieren; so ist in der Formel (x), $v=100$, $p=\frac{1}{2}$, $p_1=\frac{1}{2}$, $s=50$ und $s_1=-50$ und folglich:

$$V=(100+50)^{\frac{1}{2}}(100-50)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7500}=87 \text{ Thlr. ungefähr.}$$

Wenn ferner z. B. eine Urne 1 weiße, 2 schwarze und 3 rothe Kugeln enthält, und Jemand, der 1000 Thaler im Vermögen hat, gewinnt bei dem Zuge der weißen Kugel 500 Thaler, bei dem Zuge einer schwarzen Kugel 300 Thaler und verliert bei dem Zuge einer rothen Kugel 100, so ist in der Formel (x) $v=1000$, $s=500$, $s_1=300$, $s_2=-100$, $p=\frac{1}{6}$, $p_1=\frac{2}{6}$, $p_2=\frac{3}{6}$. Folglich:

$$V=(1000+500)^{\frac{1}{6}}(1000+300)^{\frac{2}{6}}(1000-100)^{\frac{3}{6}}$$
$$=\sqrt[6]{1500.1300^2.900^3}=1107{,}772 \text{ Thaler.}$$

Aus der Formel (x) folgt ferner, dass, wenn Jemand sein ganzes Vermögen auf ein Spiel setzt, bei welchem die Wahrscheinlichkeit, es zu verlieren auch noch so gering ist, dadurch der Werth seines Vermögens auf Null reducirt wird, weil ein Factor dieser Formel $=v-v=0$ wird.

Obgleich nach dem Vorhergehenden mit dem Eingehen jedes Spieles, jeder Wette, *etc.*, wenn sie auch mathematisch gleich oder billig sind, in moralischem Sinne eine Vermögensverschlechterung verbunden ist,

so kann man doch die Frage aufwerfen, wie groß die auf's Spiel zu setzende Summe sein kann, damit die damit verbundene Vermögensverminderung gegen das Vermögen v einer Person im praktischen Leben als ganz unerheblich betrachtet und außer Acht gelassen werden kann.

Wenn man den zweiten Theil der Gleichung (y) in eine Reihe entwickelt, so erhält man:

$$v - \frac{(1-p)}{2pv} s^2 + \ldots \qquad (z)$$

und soll das Spiel, die Wette, *etc.* für die fragliche Person erlaubt sein, so muss der Reihenausdruck (z) von v nur um eine Größe verschieden sein, welche gegen v so klein ist, dass sie vernachlässigt werden kann. Bezeichnen wir diese Größe mit $\frac{1}{n}v$ (wo z. B. $\frac{1}{n} = \frac{1}{100}$, $= \frac{1}{1000}$, *etc.* ist); so muss:

$$\frac{1-p}{2pv} s^2 = \frac{v}{n}$$

sein, und man erhält folglich die größte Summe s, welche die betrachtete Person auf's Spiel setzen kann:

$$s = v\sqrt{\frac{2p}{n(1-p)}}.$$

Vermittelst des Ausdruckes (y) kann man auch bestimmen, wie groß die Wahrscheinlichkeit p sein müsse, damit die Person A ihr ganzes Vermögen v weniger einem zu vernachlässigenden Theile $\frac{1}{n}v$ desselben, auf's Spiel setzen könnte. Zu dem Zwecke braucht man in dem Ausdrucke (y) nur $\left(1 - \frac{1}{n}\right)v$ für s zu setzen, wodurch derselbe übergeht in:

$$v\left(1 + \frac{1-p}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^p \left(\frac{1}{n}\right)^{1-p}.$$

Soll nun das Spiel für die Person A erlaubt sein, so darf ihre Vermögensverschlechterung nur eine zu vernachlässigende Größe $\frac{1}{n}v$ betragen, d. h. es muss die Gleichung:

$$v\left(1 + \frac{1-p}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^p \left(\frac{1}{n}\right)^{1-p} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)v,$$

oder:

$$\left(1+\frac{1-p}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{p}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-p}=1-\frac{1}{n}$$

stattfinden, woraus der Werth von p abgeleitet werden muss.

Setzt man $\frac{1}{n}=\frac{1}{10000}$, so ergibt sich:

$$p=\frac{82303}{82304},\ \text{folglich}\ 1-p=\frac{1}{82304}.$$

Wenn also unter **82304** Fällen nur ein ungünstiger vorkommt, so darf man das ganze Vermögen weniger einer zu vernachlässigenden Summe auf's Spiel setzen, so dass $\frac{82303}{82304}$ gewissermaßen eine moralische Gewissheit und $\frac{1}{82304}$ eine moralische Ungewissheit ausdrückt, wenn $\frac{1}{n}=\frac{1}{10000}$ und die Bernoullische Annahme in Beziehung auf den moralischen Werth des Geldes richtig ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch, dass es vortheilhaft ist, sein Vermögen, oder einen Theil desselben, nicht derselben Gefahr, es zu verlieren, sondern mehrern, von einander unabhängigen Gefahren derselben Art in mehrern Theilen auszusetzen.

Wenn z. B. ein Kaufmann von dem Vermögen v über See Waaren zu dem Betrage s erwartet, und die Wahrscheinlichkeit, dass das Schiff, worauf sich diese Waaren befinden, ankommt, $=p$ ist; so ist die mathematische Hoffnung des Kaufmannes $=ps$ und seine moralische Hoffnung ist nach dem Vorhergehenden:

$$(v+s)^p - v.$$

Da aber:

$$\int\frac{p\,ds}{v+s}<\int\frac{p\,ds}{v+ps}\quad(\text{weil } p<1),$$

d. h.:

$$p\log(v+s)<\log(v+ps),$$

also:

$$(v+s)^p<v+ps,$$

folglich:

$$(v+s)^p - v < ps$$

ist; so geht hieraus hervor, daß die moralische Hoffnung des Kaufmannes **kleiner** ist, als seine mathematische Hoffnung.

Wenn nun dieselben Waaren in gleichen Theilen auf r Schiffe verladen werden, wo für jedes die Wahrscheinlichkeit des Ankommens auch $=p$ ist, so ist das Vermögen des Kaufmannes, wenn alle r Schiffe ankommen, $=v+s$, und die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist $=p^r$. Wenn nur $r-1$ Schiffe ankommen, so ist das Vermögen des Kaufmanns $=v+\frac{r-1}{r}s$ und die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist $=rp^{r-1}(1-p)$. Wenn nur $r-2$ Schiffe anlanden, so ist das Vermögen des Kaufmannes $=v+\frac{(r-2)}{r}s$, und die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $=\frac{r(r-1)}{1.2}p^{r-2}(1-p)^2$, u. s. f. Der Logarithmus des Werthes des Gesammtvermögens des Kaufmannes wird folglich nach dem Vorhergehenden ausgedrückt durch:

$$\log V = \Big[p^r \log(v+s) + rp^{r-1}(1-p)\log\Big(v+\frac{r-1}{r}s\Big) + \frac{r(r-1)}{1.2}p^{r-2}(1-p)^2\log\Big(v+\frac{r-2}{r}s\Big)+\ldots\Big]$$

$$= p\int\Big[\frac{p^{r-1}}{v+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2\left(v+\frac{r-2}{r}s\right)}+\ldots\Big]ds$$

und wenn man hiervon den Logarithmus des Werthes des Vermögens des Kaufmannes, wenn die in Rede stehenden Waaren nur auf ein Schiff verladen sind, nämlich:

$$\int\frac{ds}{v+s} =$$

$$p\int\Big[\frac{p^{r-1}}{v+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v+s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2.(v+s)}+\ldots\Big]ds$$

abzieht, so ist der Unterschied:

$$\frac{r-1}{r}\int\frac{ds}{v+s}\left[\frac{p^{r-1}}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-2)p^{r-1}(1-p)}{v+\frac{r-2}{r}s}+\ldots\right]$$

offenbar positiv. Es ist also moralisch vortheilhaft, die Waaren von

dem Werthe s auf mehrere Schiffe zu verladen, und zwar ist dieser Vortheil desto größer, je größer die Anzahl r der Schiffe ist. Wenn die Anzahl r der Schiffe sehr groß ist, also der auf jedes kommende Theil der Waaren gegen das sonstige Vermögen v des Kaufmannes sehr klein, so wird nach dem Obigen die moralische Hoffnung des Kaufmannes seiner mathematischen gleich.

Aus dem Vorhergehenden folgt ferner, dass es moralisch vortheilhaft ist, eine ungewisse Summe s, die man mit irgend einer Wahrscheinlichkeit p erwartet, bei einer Versicherungsanstalt zu versichern. Denn erwartet z. B. ein Kaufmann von dem Vermögen v Waaren zu dem Betrage s über See mit der Wahrscheinlichkeit p, so ist der Werth seines ganzen Vermögens, wenn er die Summe s nicht versichert:

$$(v+s)^p,$$

und wenn er versichert, so muss er der Versicherungsanstalt $(1-p)s$ zahlen, wofür er dann die Summe s sicher hat, so dass also sein ganzes Vermögen $=v+s-(1-p)s=v+sp$ ist.

Nun ist aber nach dem vorhin Bewiesenen:

$$(v+s)^p < v+ps,$$

d. h. es ist für den Kaufmann moralisch vortheilhaft, wenn er die ungewisse Summe s versichert und für die Versicherung die Summe $(1-p)s$ zahlt. Da aber die Versicherungsanstalt wegen der Verwaltungskosten, *etc.* für die Versicherung der Summe s mehr als $(1-p)s$ nehmen muss, so muss man $(1-p)s+u$ statt $(1-p)s$ setzen, und der Werth von u darf höchstens so groß sein, dass:

$$(v+s)^p = v+ps-u,$$

also:

$$u = v+ps-(v+s)$$

ist. Zahlt also der Kaufmann weniger als $(1-p)s+u$, so ist die Versicherung für ihn von Vortheil. Hieraus geht hervor, dass die Versicherungsanstalten sich selbst einen gewissen Gewinn und den Versicherten zugleich einen moralischen Vortheil verschaffen können.

Wir wollen das Bernoulli'sche Prinzip der moralischen Hoffnung nun noch auf die Aufgabe in §. 25 anwenden.

Es sei v das Vermögen der Person A vor dem Spiele und s die Summe, welche sie an die Person B zahlen muss, damit das Spiel mathematisch gleich ist, so ist, wenn bei dem 1sten, 2ten, 3ten, ...

$m$ten Wurfe das Wappen getroffen wird, das Vermögen der Person A resp. gleich:

$$(v-s+2),\ (v-s+2^2),\ (v-s+2^3)+\ldots(v-s+2^m)$$

und die resp. Wahrscheinlichkeiten sind:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2^3},\ \ldots\quad \frac{1}{2^m}.$$

Der Werth des Vermögens der Person A wird also, wenn sie sich auf das Spiel eingelassen hat, nach dem Bernoullischen Prinzipe ausgedrückt durch:

$$(v-s+2)^{\frac{1}{2}}(v-s+2^2)^{\frac{1}{2^2}}(v-s+2^3)^{\frac{1}{2^3}}\ldots(v-s+2^m)^{\frac{1}{2^m}}.$$

Setzt man $v-s=v'$, so hat man folglich, wenn sich die Vermögensumstände der Person A durch das Eingehen des Spieles nicht ändern sollen, offenbar die Gleichung:

$$v=(v'+2)^{\frac{1}{2}}(v'+2^2)^{\frac{1}{2^2}}(v'+2^3)^{\frac{1}{2^3}}\ldots(v'+2^m)^{\frac{1}{2^m}},$$

oder wenn man $\frac{1}{v'}=\alpha$ setzt:

$$1+\alpha s=(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}}(1+2^2\alpha)^{\frac{1}{2^3}}\ldots(1+2^m)^{\frac{1}{2^m}}\ (\beta)$$

wo die Factoren im zweiten Theile dieser letzten Gleichung fortwährend abnehmen und die Einheit zur Grenze haben; denn wenn man die beiden Theile der Ungleichheit:

$$(1+2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}}>(1+2^{n+1}\alpha)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

zur 2^{n+1}ten Potenz erhebt, so erhält man:

$$1+2^{n+1}.\alpha+2^{2n}.\alpha^2>1+2^{n+1}.\alpha,$$

woraus das Stattfinden derselben erhellet, und ferner ist:

$$log\left[(1+2^n.\alpha)^{\frac{1}{2^n}}\right]=\frac{n\,log\,2}{2^n}+\frac{1}{2^n}\,log\left(\alpha+\frac{1}{2^n}\right),$$

welcher letzte Ausdruck offenbar für $n = \infty$ verschwindet, so daß folglich für $n = \infty$ der Ausdruck $(1 + 2^n . \alpha)\frac{1}{2^n} = 1$ wird.

Wenn man in der Gleichung (β) die Zahl $m = \infty$ setzt, so daß das Spiel ohne Ende fortgeht, so ist dieses der für die Person A vortheilhafteste Fall, und wenn v' und folglich α als bekannt angenommen werden, so nimmt man die Summe der Logarithmen von einer hinreichend großen Anzahl $n - 1$ der ersten Factoren im zweiten Theile der Gleichung (β), damit $2^n . \alpha$ wenigstens $= 10$ ist, und die Summe der Logarithmen der folgenden bis in's Unendliche fortlaufenden Factoren wird sehr nahe ausgedrückt durch:

$$\frac{\log \alpha}{2^{n-1}} + \frac{(i+1) \log 2}{2^{n-1}} + \frac{0{,}4342945}{\alpha . 2^{2n-1}}.$$

Addirt man diese beiden Summen zusammen, so erhält man den Logarithmus von $v' + s = v$, woraus sich also für das anfängliche Vermögen v der Person A der Werth s ergibt, welchen die Person A der Person B vor dem Spiele geben muß, damit der Vermögenszustand der Person B ungeändert bleibt. Setzt man z. B. $v' = 100$, so findet man $v = 107{,}98$ Thaler, so daß die Person A, wenn ihr ursprüngliches Vermögen 107,89 Thaler beträgt, vernünftigerweise nur 7,89 Thaler auf dieses Spiel setzen muß, während diese Summe nach dem Prinzipe der mathematischen Hoffnung unendlich groß wäre.

Anhang III.

Ueber die Wahrscheinlichkeit der mittlern Beobachtungsresultate.

Die Aufgabe, welche wir hier behandeln wollen, ist bereits der Gegenstand der Arbeit mehrerer Geometer und besonders Laplace's, dessen Untersuchungen über diesen interessanten Gegenstand man in der Théorie analytique des Probabilités (lv. II. chap. IV.) und in den drei Supplementen zu diesem großen Werke findet, gewesen. Die Allgemeinheit der Analyse Laplace's, die Wahrheit und die Wichtigkeit der Gegenstände, auf welche er sie angewandt hat, lassen ohne Zweifel nichts Wesentliches zu wünschen übrig; aber dennoch hat es uns geschienen, daſs einige Punkte dieser Theorie noch weiter entwickelt werden könnten, und daſs die bei Gelegenheit des Studiums derselben gemachten Bemerkungen die Schwierigkeiten aufklären und auch in der Praxis nicht ohne allen Nutzen sein könnten.

1. Es sei s die Anzahl der betrachteten Beobachtungen, i eine ganze und positive Zahl, und wir wollen annehmen, daſs jede dieser Beobachtungen mit $2i+1$ Fehlern behaftet sein kann, welche durch:

$$-i, -i+1, -\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots i-1, i$$

ausgedrückt werden. Ferner wollen wir annehmen, daſs die Wahrscheinlichkeit desselben Fehlers in dieser ganzen Beobachtungsreihe dieselbe sei; es sei n eine dieser Zahlen, welche positiv, negativ oder Null ist, und durch N wollen wir die Wahrscheinlichkeit des Fehlers n bezeichnen; so haben wir, da die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Fehler die Gewiſsheit ist:

$$\Sigma N = 1,$$

wo sich die Summe Σ auf alle Werthe des Fehlers n von $n=-i$ bis $n=i$ erstreckt. Es sei M die Wahrscheinlichkeit, daſs die Summe der Fehler der s Beobachtungen $=m$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist dieselbe, als die, mit s vollkommen gleichen Würfeln, wovon jeder

$2i+1$ Flächen hätte, die mit den Zahlen $-i, \ldots +i$ bezeichnet sind und verschiedene Grade der Wahrscheinlichkeit haben, indem N die Wahrscheinlichkeit für das Treffen der Fläche mit der Zahl n ist, die Summe m zu werfen. Der Werth von M ist also der Coefficient der $m$ten Potenz von t in der Entwickelung der $s$ten Potenz des Polynomes:

$$\Sigma(N t^n),$$

welches aus $2i+1$ Gliedern besteht, oder was dasselbe ist, das von t unabhängige Glied in der Entwickelung von:

$$t^{-m}[\Sigma(N t^n)]$$

nach den Potenzen dieser Veränderlichen, wie solches aus den ersten Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt.

Um dieses Glied zu erhalten, wollen wir, wie gewöhnlich, durch e die Basis des Neperschen Logarithmensystemes und mit π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnen, und bemerken, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{n'\theta\sqrt{-1}} d\theta = 0, \text{ oder } = 2\pi$$

ist, wo der erste Werth stattfindet, wenn n' eine ganze positive oder negative Zahl, und der zweite, wenn $n' = 0$ ist. Hieraus ergibt sich leicht, wenn man $e^{\theta\sqrt{-1}}$ für t in die vorhergehende Größe setzt, dass das gesuchte Glied, oder der Werth von M folgender ist:

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\Sigma N e^{n\theta\sqrt{-1}}\right)^s e^{-m\theta\sqrt{-1}} d\theta.$$

Es sei nun p die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der s Fehler zwischen zwei Zahlen μ und μ' liegt, so ist klar, dass der Werth von p die von $m = \mu$ bis $m = \mu'$ genommene Summe der Werthe von M ist; aber zwischen diesen Grenzen ist die Summe der Werthe von $e^{-m\theta\sqrt{-1}}$ gleich:

$$\frac{e^{-(\mu-\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}} - e^{-(\mu'+\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}\theta}$$

und man hat folglich:

$$p = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\Sigma N e^{n\theta\sqrt{-1}}\right)^s \left(\frac{e^{-(\mu-\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}} - e^{-(\mu'+\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right) d\theta$$

Da der mittlere Fehler der Quotient aus der Summe aller Fehler und ihrer Anzahl ist, so ist diese Wahrscheinlichkeit p auch die Wahrscheinlichkeit, daſſ der mittlere Fehler zwischen $\frac{\mu}{s}$ und $\frac{\mu'}{s}$ liegt.

2. Um diesem letzten Ausdrucke eine solche Form zu geben, daſſ man die Fehler nach unmerklichen Graden wachsen lassen kann, wollen wir das Intervall, worin sie alle liegen, oder den positiven Ueberschuſſ des größten über den kleinsten, mit $2a$ bezeichnen, und dasselbe in $2i+1$ gleiche Theile theilen, wovon ω einen solchen Theil bezeichnet, so daſſ $2a=(2i+1)\omega$ ist. Zu gleicher Zeit wollen wir:

$$n\omega=x,\ \mu\omega=b-c,\ \mu'\omega=b+c,\ \frac{(2i+1)\theta}{2a}=\alpha$$

setzen, so ist N eine Function von x, welche wir durch $\omega f x$ bezeichnen können, und der Werth von p verwandelt sich in:

$$p=\frac{a}{\pi}\int(\Sigma\omega f x\, e^{x\alpha\sqrt{-1}})^s\, e^{-b\alpha\sqrt{-1}}\frac{\sin\left(\frac{a}{2i+1}\right)\alpha}{\sin\frac{a\alpha}{2i+1}}\frac{d\alpha}{2i+1},$$

wo die Werthe von x, auf welche sich die Summe Σ bezieht, nach gleichen Incrementen $=\alpha$ zunehmen und sich von $x=-a$ bis $x=a$ erstrecken, und das Integral in Beziehung auf α von $\alpha=-\frac{(2i+1)\pi}{2a}$ bis $\alpha=\frac{(2i+1)\pi}{2a}$ zu nehmen ist. Die Fehler der Beobachtungen werden jetzt nicht mehr durch ganze Zahlen ausgedrückt, und p ist die Wahrscheinlichkeit, daſſ die Summe der Fehler x der s Beobachtungen zwischen die gegebenen Grenzen $b-c$ und $b+c$ fällt. Wir wollen nun annehmen, daſſ i unendlich groß werde, ohne daſſ a, b und c aufhören, endliche und gegebene Größen zu sein, so daſſ $(2i+1)\sin\frac{a\alpha}{2i+1}=a\alpha$ ist, die Grenzen in Beziehung auf α gleich $\pm\infty$ und die Differenz ω unendlich klein werden. Nimmt man alsdann ω für das Differenzial von x und verwandelt die Summe Σ in ein bestimmtes Integral, so nimmt der Werth von p folgende Form an:

$$p=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{a} f x\, e^{x\alpha\sqrt{-1}}dx\right)^s e^{-b\alpha\sqrt{-1}}\sin c\alpha\frac{d\alpha}{\alpha} \quad (1)$$

Diese Wahrscheinlichkeit bezieht sich nun auf den Fall, wo die Beobachtungsfehler alle zwischen $-a$ und $+a$ liegende Größen haben

können, und da ihre Anzahl unendlich groß ist, so ist die Wahrscheinlichkeit $fx\,dx$ eines beliebigen x derselben unendlich klein. Die Function fx kann jede beliebige Form haben; sie kann continuirlich, oder discontinuirlich sein, wofern alle Werthe derselben von $x = -a$ bis $x = a$ nur positiv sind und die Einheit nicht überschreiten, und ihre Summe, oder das Integral $\int_{-a}^{a} fx\,dx = 1$ ist, welche Bedingung ausdrückt, dass jeder Fehler zuverlässig zwischen die Grenzen $\pm a$ fällt.

Wenn diese Function gegeben ist, so erhält man durch zwei successive Integrationen den zugehörigen Werth von p.

Wenn man in der Gleichung (1) die Zahl $s = 1$ setzt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{a} fx\, e^{x\alpha\sqrt{-1}}\, dx\right) e^{-b\alpha\sqrt{-1}} \sin c\alpha \frac{d\alpha}{\alpha},$$

dass der Fehler einer einzigen Beobachtung zwischen den Grenzen $b - c$ und $b + c$ liegt. Wenn nun das Intervall von $b - c$ bis $b + c$ außerhalb der Grenzen $\pm a$ der möglichen Fehler fällt, d. h. wenn sowohl $b - c$, als $b + c$ größer oder kleiner, als a ist, abgesehen vom Zeichen; so ist klar, dass dieser Werth von $p = 0$ sein muss, wogegen diese Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit, oder $= 1$ wird, wenn das Intervall von $b - c$ bis $b + c$ das Intervall von $-a$ bis $+a$ ganz in sich schließt. Und allgemein, wenn wir fx für alle nicht zwischen den Grenzen $\pm a$ liegende Werthe von x als $= 0$ betrachten; so müssen wir haben:

$$p = \int_{b-c}^{b+c} fx\,dx.$$

Um über diesen Punkt die Richtigkeit unserer Analyse zu zeigen, wollen wir bemerken, dass sich der Werth von p, wenn man die Ordnung der Integrationen nach x und α umkehrt, folgendermaßen ausdrücken lässt:

$$p = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(b+c-x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha - \int_{0}^{\infty}\frac{\sin(b-c-x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right) fx\,dx.$$

Aber es ist:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \tfrac{1}{2}\pi, \text{ oder } = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

jenachdem die Constante k positiv oder negativ ist, und der Unterschied

der beiden Integrale in Beziehung auf α ist folglich $=0$, oder $=\pi$, jenachdem die beiden Größen $b+c-x$ und $b-c-x$ gleiche, oder entgegengesetzte Zeichen haben. Das Integral in Beziehung auf x verschwindet also für alle Werthe dieser Veränderlichen, welche entweder größer, als $b+c$ und $b-c$, oder kleiner, als $b+c$ und $b-c$ sind, und muss nur auf die zugleich zwischen den Grenzen $\pm a$ und zwischen den Grenzen $b-c$, $b+c$ liegenden Werthe von x erstreckt werden. Wenn man also fx für alle außerhalb der Grenzen $\pm a$ liegende Werthe von x als gleich Null betrachtet, so hat man:

$$p=\int_{b-c}^{b+c} fx\,dx,$$

was bewiesen werden sollte.

4. Ehe wir weiter gehen, wird es nicht unzweckmäßig sein, die Formel (1) auf einige specielle Beispiele anzuwenden.

Der einfachste Fall ist der, wo alle zwischen den Grenzen $\pm a$ liegenden Fehler gleich möglich sind. Die Function fx ist alsdann eine Constante und zwar $=\frac{1}{2a}$. Folglich ist:

$$\int_{-a}^{a} fx\, e^{x\alpha\sqrt{-1}}\,dx=\frac{\sin a\alpha}{a\alpha},$$

und mithin:

$$p=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin a\alpha}{a\alpha}\right)^{s}\frac{\sin c\alpha}{\alpha}\cos b\alpha\,d\alpha,$$

welches Integral sich für alle ganzzahligen Werthe von s durch die bekannten Formeln unter endlicher Form erhalten lässt.

Zweitens wollen wir annehmen, dass

$$fx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

sei, und dass die Grenzen $\pm a$ gleich $\pm\infty$ seien, so wird der Bedingung $\int_{-a}^{a} fx\,dx=1$ genügt, und man hat:

$$\int_{-a}^{a} fx\, e^{x\alpha\sqrt{-1}}\,dx=e^{-\frac{\alpha^2}{4}};$$

folglich:

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2 s}{4}} \cos b\alpha \sin c\alpha \frac{d\alpha}{\alpha},$$

welcher Ausdruck sich auf folgende Form bringen lässt:

$$p = \frac{2}{\pi} \int \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2 s}{4}} \cos b\alpha \cos c\alpha \, d\alpha \right) dc,$$

wo das Integral in Beziehung auf c so genommen wird, dass es für $c = 0$ verschwindet. Das Integral in Beziehung auf α wird durch die bekannten Formeln erhalten, und nach verrichteter Integration hat man:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int \left(e^{-\frac{(b-c)^2}{s}} + e^{-\frac{(b+c)^2}{s}} \right) dc.$$

Wenn man $b = b'\sqrt{s}$ und $c = c'\sqrt{s}$ setzt, so erhält man:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-c'}^{c'} e^{-(b+c)^2} \, dc.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn die Grenzen $b \pm c$, zwischen welche die Summe der Fehler fallen muss, der Quadratwurzel aus der Anzahl s der Beobachtungen proportional sind, die Wahrscheinlichkeit p, dass dieses stattfindet, in der hinsichtlich der Form der Function fx gemachten Voraussetzung von dieser Zahl s unabhängig ist. In derselben Voraussetzung entspricht $b = 0$ der größte Werth von p gegen b, was a priori einleuchtend war.

Als letztes Beispiel wollen wir

$$fx = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ a = \infty$$

nehmen, so wird die Bedingung $\int_{-a}^{a} fx \, dx = 1$ erfüllt. Ferner hat man:

$$\int_{-a}^{a} fx \, e^{x\alpha\sqrt{-1}} \, dx = e^{-\alpha}, \text{ oder } = e^{\alpha},$$

jenachdem die Größe α positiv oder negativ ist, woraus folgt:

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha s} \cos b\alpha \frac{\sin c\alpha}{\alpha} \, d\alpha,$$

oder:

$$p = \frac{2}{\pi}\int\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s}\cos b\alpha \cos c\alpha\, d\alpha\right)dc,$$

wo das Integral in Beziehung auf c für $c=0$ verschwindet. Wenn man die Integration in Beziehung auf α nach den gewöhnlichen Regeln verrichtet, so erhält man:

$$p = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{s}{s^2+(b-c)^2}+\frac{s}{s^2+(b+c)^2}\right)dc$$

und endlich:

$$p = \frac{1}{\pi}\, arc\left(tang = \frac{2cs}{s^2+b^2-c^2}\right).$$

Wenn man $b = b's$, $c = c's$ setzt, so liegt der mittlere Fehler zwischen den Grenzen $b' \pm c'$, und die ihnen entsprechende Wahrscheinlichkeit p wird von der Anzahl der Beobachtungen s unabhängig. Hieraus folgt, daſſ in diesem besondern Beispiele der mittlere Fehler nicht gegen Null, oder eine andere bestimmte Grenze convergirt, wenn die Anzahl der Beobachtungen s immer größer und größer wird, sondern daſſ, wie groß diese Zahl auch sein mag, immer dieselbe Wahrscheinlichkeit vorhanden ist, daſſ der zu befürchtende mittlere Fehler zwischen gegebenen Grenzen liegt.

5. Die imaginären Ausdrücke kommen nur scheinbar im zweiten Theile der Gleichung (1) vor, und man kann sie leicht daraus fortschaffen.

Es sei zuvörderst:

$$\left(\int_{-a}^{a} fx \cos\alpha x\, dx\right)^2 + \left(\int_{-a}^{a} fx \sin\alpha x\, dx\right)^2 = \varrho^2,$$

und ferner:

$$\frac{1}{\varrho}\int_{-a}^{a} fx \cos\alpha x\, dx = \cos\varphi$$

$$\frac{1}{\varrho}\int_{-a}^{a} fx \sin\alpha x\, dx = \sin\varphi.$$

Wenn man in der Formel (1) die Elemente des Integrales in Beziehung auf α, welche gleichen und entgegengesetzten Werthen dieser Veränderlichen entsprechen, zusammennimmt, so verwandelt sich diese Formel in:

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varrho^s \cos(s\varphi - b\alpha) \frac{\sin c\alpha}{\alpha} d\alpha. \qquad (2)$$

Die Größe ϱ ist $=1$, wenn $\alpha = 0$ ist; aber für jeden andern Werth von α ist sie kleiner als 1. Denn dem Ausdrucke von ϱ^2 kann man folgende Form geben:

$$\varrho^2 = \int_{-a}^{a} fx \cos\alpha x \, dx \int_{-a}^{a} fx' \cos\alpha x' \, dx'$$

$$+ \int_{-a}^{a} fx \sin\alpha x \, dx \int_{-a}^{a} fx' \sin\alpha x' \, dx'.$$

Verwandelt man jedes dieser beiden Producte einfacher Integrale in ein doppeltes Integral, und dann die Summe der beiden doppelten Integrale in ein einziges; so erhält man:

$$\varrho^2 = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} fx fx' \cos(x - x')\alpha \, dx \, dx',$$

welche Größe kleiner ist, als:

$$\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} fx fx' \, dx \, dx', \text{ oder } < 1.$$

Denn zieht man das erste doppelte Integral von dem zweiten ab, so erhält man das Integral:

$$\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} [1 - \cos(x - x')\alpha] fx fx' \, dx \, dx',$$

dessen sämmtliche Elemente nach der Voraussetzung positiv sind, und welches folglich selbst eine positive Größe ist.

Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit und wird uns dazu dienen, den Werth von p auf eine einfachere Form zu bringen, wenn die Anzahl s der Beobachtungen sehr groß ist.

6. Wir wollen die Zahl s als unendlich groß betrachten, so daß die folgenden Formeln an dieser Grenze streng richtig und desto mehr genähert sind, je größer s ist. Da nun die Größe ϱ kleiner, als 1 ist, wenn die Veränderliche α nicht $=0$ ist, so folgt, daß die Potenz ϱ^s an der Grenze $s = \infty$ nur für unendlich kleine Werthe dieser Veränderlichen endliche Werthe hat und unendlich klein wird, sobald α einen endlichen Werth hat. Entwickelt man also die Größe ϱ nach den Potenzen von α, so kann man bei den beiden ersten Gliedern dieser Reihe stehen bleiben, und wenn man:

$$\int_{-a}^{a} fx' x\,dx = k, \int_{-a}^{a} fx' x^2\,dx = k'$$

setzt, so erhält man auf diese Weise:

$$\varrho = 1 - \tfrac{1}{2}(k' - k^2)\,\alpha^2.$$

Diese Form des Werthes von ϱ lässt jedoch in dem Falle eine Ausnahme zu, wo die Grenzen $\pm a$ unendlich sind. Es ist alsdann möglich, dass das zweite Glied der Entwickelung von ϱ nach den Potenzen von α nur die erste Potenz dieser Veränderlichen enthält, welche alsdann das Zeichen nicht mit α änderte, oder wenn man will $+\sqrt{\alpha^2}$ ausdrückte. Dieses findet wirklich statt, wenn

$$fx = \frac{1}{\pi}(1 + x^2)$$

ist, wie wir im letzten Beispiele des §. 4 gesehen haben.

Allein wir lassen diesen besondern Fall unberücksichtigt, und es genügt, die Ursache desselben angegeben zu haben, weil er ohne Zweifel in der Praxis nicht vorkommt.

Man könnte vielleicht auch befürchten, dass der Coefficient $k' - k^2$ des zweiten Gliedes von ϱ Null würde, und man das folgende Glied der Entwickelung, welches eine höhere Potenz von α, als die zweite enthielte, beibehalten müsste; allein es lässt sich leicht zeigen, dass diese Größe $k' - k^2$ immer positiv ist, welches nothwendig ist, damit $\varrho < 1$ wird, und dass sie ferner niemals $= 0$ sein kann. Denn wegen $\int_{-a}^{a} fx'\,dx' = 1$ hat man:

$$k' - k^2 =$$

$$\int_{-a}^{a} fx\,x^2\,dx \int_{-a}^{a} fx'\,dx' - \int_{-a}^{a} fx\,x\,dx \int_{-a}^{a} fx'\,x'\,dx'$$

oder was dasselbe ist:

$$k' - k^2 = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} (x^2 - xx')\,fx\,fx'\,dx\,dx'.$$

Ferner kann man:

$$k' - k^2 = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} (x'^2 - xx')\,fx\,fx'\,dx\,dx'$$

setzen, und wenn man für $k' - k^2$ die halbe Summe dieser Werthe setzt, so erhält man die positive Größe:

$$k' - k^2 = \tfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}(x - x')fxfx'\,dx\,dx',$$

welche niemals $= 0$ wird, weil alle Elemente dieses doppelten Integrales nothwendig positiv sind.

Nun wollen wir der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2}(k' - k^2) = h^2$$

und $\frac{y}{\sqrt{s}}$ für α setzen, so erhalten wir:

$$\varrho^s = \left(1 - \frac{h^2 y^2}{s}\right)^s,$$

wo die neue Veränderliche y endliche Werthe bekommen kann; aber von welcher Beschaffenheit diese auch sein mögen, so hat man an der Grenze $s = \infty$ doch immer:

$$\varrho^s = e^{-h^2 y^2},$$

Nach dem Werthe von $\sin\varphi$ haben wir zu gleicher Zeit $\varphi = k\alpha$, und die Gleichung (2) verwandelt sich folglich in:

$$p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-h^2 y^2} \cos(ks - b)\frac{y}{\sqrt{s}} \sin\frac{cy}{\sqrt{s}} \cdot \frac{dy}{y},$$

oder was dasselbe ist, in:

$$p = \frac{1}{\pi\sqrt{s}}\int\left(\int_0^{\infty} e^{-h^2 y^2} \cos(ks - b + z)\frac{y}{\sqrt{s}}\,dy\right)dz,$$

wo das Integral in Beziehung auf z von $z = -c$ bis $z = c$ zu nehmen ist. Eigentlich dürfte man der Veränderlichen y nur endliche Werthe beilegen; allein wegen des Exponentialfactors $e^{-h^2 y^2}$ kann man das betreffende Integral bis ins Unendliche erstrecken, ohne einen merklichen Fehler zu befürchten, weil dieser Factor für sehr große Werthe von y sehr klein wird. Dieses Integral wird alsdann durch die bekannten Formeln erhalten, und man hat endlich:

$$p = \frac{1}{2h\sqrt{\pi s}}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{(ks-b+z)^2}{4h^2 s}}\,dz. \qquad (3)$$

Wenn fx constant und $= \frac{1}{2a}$ ist, so hat man:

$$k=0,\ k'=\frac{a^2}{3},\ h^2=\frac{a^2}{6},$$

und folglich:

$$p=\frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{2\pi s}}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{3(b-z)^2}{2a^2 s}}\,dz.$$

Wenn die Grenzen $\pm a$ unendlich sind, so hat man in dem Falle, wo:

$$fx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

ist:

$$k=0,\ h^2=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^2\,dx=\tfrac{1}{4},$$

woraus folgt:

$$p=\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{(b-z)^2}{s}}\,dz,$$

was mit dem zweiten Werthe von p in §. 3, welcher für alle Werthe von s stattfinden muss, übereinstimmt.

7. Für denselben Werth von c wird das Maximum von p in Beziehung auf b durch die Gleichung:

$$\int_{-c}^{c} e^{-\frac{(ks-b+z)^2}{4h^2 s}}(ks-b+z)\,dz=0,$$

oder wenn man die Integration verrichtet, durch folgende:

$$e^{-\frac{(ks-b+c)^2}{4h^2 s}}-e^{-\frac{(ks-b-c)^2}{4h^2 s}}=0,$$

welche sich auf:

$$e^{-\frac{c(ks-b)}{2h^2 s}}=e^{-\frac{c(ks-b)}{2h^2 s}}$$

reducirt und $b=ks$ gibt, bestimmt. Wenn man zu gleicher Zeit $c=2hr\sqrt{s}$ setzt, so verwandelt sich die Formel (3) in:

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}\,dr,$$

wo das Integral so zu nehmen ist, dass es für $r=0$ verschwindet. Dieses ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Fehler einer sehr großen Anzahl s von Beobachtungen zwischen den Grenzen $ks \pm 2hr\sqrt{s}$, oder der mittlere Fehler zwischen den Grenzen $k - \frac{2hr}{\sqrt{s}}$ und $k + \frac{2hr}{\sqrt{s}}$ liegt, so dass, wenn die Größe r und die davon abhängige Wahrscheinlichkeit dieselben bleiben, sich diese Grenzen ohne Ende zusammenziehen, je größer s wird, und man kann diese Zahl immer so groß nehmen, dass man eine gegebene Wahrscheinlichkeit hat, dass der mittlere Fehler beliebig wenig von der Größe k verschieden ist. Der durch die Gleichung (3) gegebene Werth von p nimmt von seinem Maximum an sehr schnell ab, und wenn b von ks nur noch um eine Größe verschieden ist, welche etwas kleiner ist, als $\frac{1}{\sqrt{s}}$, so ist dieser Werth von p unmerklich, wenn die Zahl s immer als sehr groß vorausgesetzt wird.

So oft die positiven und negativen Fehler gleich möglich sind, d. h. wenn die Function fx für gleiche und entgegengesetzte Werthe von x dieselbe bleibt, ist die Größe $k=0$, und der mittlere Fehler nähert sich diesem Werthe 0 ebenfalls fortwährend, je größer die Anzahl s der Beobachtungen wird. Aber wenn durch irgend eine constante Ursache die Fehler in dem einen Sinne über die in dem andern das Uebergewicht bekommen, so ist die Größe k nicht mehr $=0$ und ihr Werth muss bekannt sein, um die feste Grenze angeben zu können, gegen welche der mittlere Fehler ohne Ende convergirt. Es ist klar, dass k, abgesehen vom Zeichen, nicht größer sein kann als a; denn der mittlere Fehler kann offenbar die Grenze der möglichen Fehler nicht überschreiten. Hierzu ist erforderlich, dass $k^2 < a^2$ ist, und in der That hat man:

$$a^2 - k^2 = a^2 \int_{-a}^{a} fx\,dx \int_{-a}^{a} fx'\,dx' - \int_{-a}^{a} x fx\,dx \int_{-a}^{a} x' fx'\,dx'$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} (a^2 - xx') fx\, fx'\, dx\, dx',$$

eine positive Größe, weil alle Elemente dieses doppelten Integrales positiv sind.

8. Die vorhergehende Analyse lässt sich auch leicht auf folgende Aufgabe anwenden, welche die vorhin gelöste als besondern Fall unter sich begreift.

Es sei E die Summe der Fehler von s Beobachtungen, indem jeder mit einem gegebenen Coefficienten multiplicirt ist; die Fehler der

1sten, 2ten, 3ten, ... $(s-1)$ten Beobachtung wollen wir resp. mit $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{s-1}$, und die Coefficienten, womit sie resp. multiplicirt werden, mit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{s-1}$ bezeichnen, so dass

$$E=\gamma\varepsilon+\gamma_1\varepsilon_1+\gamma_2\varepsilon_2+\ldots+\gamma_{s-1}\varepsilon_{s-1}$$

ist, und man soll nun die Wahrscheinlichkeit finden, dass die Summe E zwischen gegebenen Grenzen liegt.

Zunächst wollen wir, wie in §. 1, annehmen, dass alle die möglichen Fehler durch ganze Zahlen oder Null von $-i$ bis $+i$ ausgedrückt werden. Um aber die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit aufzufassen, nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit desselben Fehlers nicht für alle Beobachtungen dieselbe ist, und wir bezeichnen daher die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Fehlers n in der ersten Beobachtung durch N, in der zweiten durch N_1, ... und in der letzten durch N_{s-1}. Ferner sei $\mathfrak{b}$ ein Factor von solcher Beschaffenheit, dass alle die Producte $\mathfrak{b}\gamma, \mathfrak{b}\gamma_1, \mathfrak{b}\gamma_2, \mathfrak{b}\gamma_3, \ldots \mathfrak{b}\gamma_{s-1}$ ganze Zahlen sind, was immer genau, oder mit einem beliebigen Grade von Annäherung zu erreichen ist. Endlich wollen wir der Kürze wegen

$$(\Sigma N t^{\mathfrak{b}\gamma n})(\Sigma N_1 t^{\mathfrak{b}\gamma_1 n})(\Sigma N_2 t^{\mathfrak{b}\gamma_2 n})\ldots(\Sigma N_{s-1} t^{\mathfrak{b}\gamma_{s-1} n})=T$$

setzen, wo sich die in diesem Producte vorkommenden Summen Σ auf alle Werthe von n, von $n=-i$ bis $n=i$ erstrecken. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathfrak{b}E$ einer gegebenen ganzen Zahl m gleich ist, ist der Coefficient von t^m in der Entwickelung von T nach den Potenzen von t, oder das von t unabhängige Glied in dem Producte Tt^{-m}. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit mit M und mit P den Werth von T, wenn hierin $e^{\theta\sqrt{-1}}$ für t gesetzt wird; so hat man:

$$M=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Pe^{-m\theta\sqrt{-1}}d\theta.$$

Bezeichnet man alsdann die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathfrak{b}E$ zwischen zwei gegebenen ganzen Zahlen μ und μ' liegt, oder einer derselben gleich ist, mit p, so ist sie die Summe der Werthe von M, von $m=\mu$ bis $m=\mu'$, und ihr Werth ist folglich:

$$p=\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}\int_{-\pi}^{\pi}P\left[\frac{e^{-(\mu-\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}-e^{-(\mu'+\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right]d\theta.$$

Zur Herstellung der Continuität zwischen den möglichen Werthen jeder Beobachtung wollen wir das gegebene Intervall $2a$, worin sie

alle liegen müssen, in $2i+1$ gleiche Theile, jeder $=\omega$, theilen, und außerdem

$$n\omega=x,\ \mu\omega=(b-c)\varepsilon,\ \mu'\omega=(b+c)\varepsilon,\ \frac{(2i+1)\varepsilon\theta}{2a}=\alpha$$

setzen; so braucht nur noch ω unendlich klein und i unendlich groß angenommen zu werden, damit sich die Fehler stetig ändern. An dieser Grenze werden die Integrale in Beziehung auf α von $\alpha=-\infty$ bis $\alpha=\infty$ genommen, die Summen Σ verwandeln sich in bestimmte, von $x=-a$ bis $x=a$ genommene Integrale, indem α das Differenzial dx ausdrückt, und wenn man $N=\omega fx$ setzt, so hat man z. B.:

$$\Sigma N e^{\varepsilon\gamma n\theta\sqrt{-1}}=\int_{-a}^{a} fx\, e^{\gamma x\alpha\sqrt{-1}}\, dx.$$

Die übrigen Summen Σ verwandeln sich ebenso in bestimmte Integrale, und wenn man:

$$N_1=\omega f_1 x,\ N_2=\omega f_2 x,\ \ldots\ N_{s-1}=\omega f_{s-1} x$$

setzt, so geht der Werth von p über in:

$$p=\left(\int_{-a}^{a} fx\, e^{\gamma x\alpha\sqrt{-1}}\, dx\right)\left(\int_{-a}^{a} f_1 x\, e^{\gamma_1 x\alpha\sqrt{-1}}\, dx\right)\ldots$$
$$\left(\int_{-a}^{a} f_{s-1}\, e^{\gamma_{s-1} x\alpha\sqrt{-1}}\, dx\right),$$

und nach verrichteten Reductionen erhält man für den Werth von p:

$$p=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P e^{-b\alpha\sqrt{-1}} \sin c\alpha \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Die Größe ε ist aus dieser Formel verschwunden, und in der That ist p die Wahrscheinlichkeit, daß εE zwischen $(b-c)\varepsilon$ und $(b+c)\varepsilon$, oder daß die Summe E zwischen $(b-c)$ und $(b+c)$ liegt, was von ε nicht mehr abhängig ist. Die imaginären Ausdrücke werden aus dieser Formel weggeschafft, wenn man:

$$\left(\int_{-a}^{a} fx \cos\gamma x\alpha\, dx\right)^2+\left(\int_{-a}^{a} fx \sin\gamma x\alpha\, dx\right)^2=\varrho^2,$$

$$\frac{1}{\varrho}\int_{-a}^{a} fx \cos\gamma x\alpha\, dx=\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\varrho}\int_{-a}^{a} fx \sin\gamma x\alpha\, dx=\sin\varphi$$

setzt. Wenn $\varrho_1, \varphi_1, \varrho_2, \varphi_2, \ldots$ die Werthe von ϱ und φ bezeichnen, wenn man in den letztern für γ und fx successive γ_1 und $f_1 x$, γ_2 und $f_2 x$, *etc.* setzt, und außerdem:

$$\varrho \cdot \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{s-1} = R,$$
$$\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{s-1} = \psi,$$

so verwandelt sich der Ausdruck von p in:

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R \cos(\psi - b\alpha) \sin c\alpha \frac{d\alpha}{\alpha},$$

oder was dasselbe ist:

$$p = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^{c} \left(\int_0^\infty R \cos(\psi - b + z\alpha)\, d\alpha \right) dz. \qquad (4)$$

Alle Factoren von R reduciren sich auf die Einheit, wenn $\alpha = 0$ ist, und es wird, wie in §. 5, bewiesen, dass sie für jeden andern Werth von α sämmtlich kleiner sind, als 1.

9. Um aus dieser Formel Resultate abzuleiten, welche praktischen Nutzen haben, wollen wir insbesondere den Fall betrachten, wo die Zahl s sehr groß ist, und als unendlich angesehen werden kann. Wenn man in diesem Falle durch r die der Größen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{s-1}$ bezeichnet, welche für denselben Werth von α am wenigsten von der Einheit verschieden ist, so hat man $R < r^s$, und folglich hat das Product R nur für unendlich kleine Werthe von α endliche Werthe. Dieser Schluss kann jedoch falsch sein, wenn die Coefficienten $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine fortwährend abnehmende Reihe bilden. Denn es kann alsdann geschehen, dass die Factoren $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ ohne Ende gegen die Einheit convergiren, so dass man den Factor r unter ihnen nicht angeben kann, welcher sich der Einheit am meisten nähert, und es folglich möglich ist, dass das Product aus diesen unendlich vielen Factoren für alle Werthe von α eine endliche Größe ist. In dem folgenden §. werden wir ein Beispiel dieses besondern Falles anführen; allein in dem gegenwärtigen §. wollen wir den allgemeinen Fall betrachten, wo das Product R für den Grenzwerth $s = \infty$ unendlich klein wird, sobald man α einen endlichen Werth gibt.

Für einen beliebigen Index i sei:

$$\int_{-a}^{a} x f_i x\, dx = k_i, \int_{-a}^{a} x^2 f_i x\, dx = k'_i,$$
$$\tfrac{1}{2}(k'_i - k^2_i) = h^2_i$$

außerdem wollen wir bemerken, daß

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_i x \, dx = 1$$

ist, und jeden der Factoren von R nach den Potenzen von α entwickeln, indem wir nur die beiden ersten Glieder jeder Reihe beibehalten; so erhalten wir:

$$R = (1 - \gamma^2 h^2 \alpha^2)(1 - \gamma_1^2 h_1^2 \alpha^2) \ldots (1 - \gamma_{s-1}^2 h_{s-1}^2 \alpha^2).$$

Wir wollen $\alpha = \frac{y}{\sqrt{s}}$ setzen, so daß die neue Veränderliche y eine endliche Größe sein kann, und wenn wir den Logarithmus von R nach den Potenzen dieser Veränderlichen entwickeln, so erhalten wir:

$$\log R = -y^2 \frac{\Sigma \gamma_i^2 h_i^2}{s} - \tfrac{1}{2} y^4 \frac{\Sigma \gamma_i^4 h_i^4}{s^2} - \tfrac{1}{3} y^6 \frac{\Sigma \gamma_i^6 h_i^6}{s^3} - etc.,$$

wo sich die Summen Σ von $i = 0$ bis $i = s - 1$ erstrecken. Wenn man annimmt, daß die Größen $\gamma^2 h^2$, $\gamma_1^2 h_1^2$, $\gamma_2^2 h_2^2$, ... nicht ohne Ende zunehmen, und bezeichnet die größte derselben durch H^2, so sind diese Summen Σ resp. kleiner als sH^2, sH^4, sH^6, ... und folglich verschwinden alle Glieder der Entwickelung von $\log R$ an der Grenze $s = \infty$, mit Ausnahme des ersten, und man hat blos:

$$\log R = -\frac{1}{s} y^2 \Sigma \gamma_i^2 h_i^2, \text{ also } R = e^{-\frac{1}{s} y^2 \Sigma \gamma_i^2 h_i^2}.$$

Zu gleicher Zeit reduciren sich die Größen φ, φ_1, φ_2, ... resp. auf $\alpha\gamma k$, $\alpha\gamma_1 k_1$, $\alpha\gamma_2 k_2$, ... Man hat also $\psi = \alpha \Sigma \gamma_i k_i$, und die Formel (4) verwandelt sich in:

$$p = \frac{1}{\pi\sqrt{s}} \int_{-c}^{c} \left[\int e^{-\frac{1}{s} y^2 \Sigma \gamma_i^2 h_i^2} \cos(\Sigma \gamma_i k_i - b + z) \frac{y}{\sqrt{s}} dy \right] dz.$$

Wegen der schnellen Abnahme der Elemente des Integrales in Beziehung auf y kann man dasselbe, ohne einen merklichen Fehler zu befürchten, von $y = 0$ bis $y = \infty$ erstrecken, so daß man dieses Integral unter endlicher Form erhalten kann, und man hat:

$$p = \frac{1}{2\sqrt{\pi \Sigma \gamma_i^2 h_i^2}} \int_{-c}^{c} e^{-\frac{(\Sigma \gamma_i k_i - b + z)^2}{4\sqrt{\Sigma \gamma_i^2 h_i^2}}} dz. \qquad (5)$$

Für denselben Werth von c entspricht das Maximum von p in

Beziehung auf b dem Werthe $b = \Sigma\gamma_i h_i$, und diese Wahrscheinlichkeit nimmt zu beiden Seiten ihres größten Werthes sehr schnell ab, so daß sie ganz unmerklich wird, sobald sich b von $\Sigma\gamma_i k_i$ um eine mit $\frac{1}{\sqrt{\Sigma\gamma_i^2 h_i^2}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{s}}$ vergleichbare Größe entfernt. Wenn man $b = \Sigma\gamma_i k_i$ und $c = 2r\sqrt{\Sigma\gamma_i^2 h_i^2}$ setzt, so erhält man:

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr,$$

wo das Integral mit r anfängt. Dieses ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe E zwischen den Grenzen:

$$\Sigma\gamma_i k_i \pm 2r\sqrt{\Sigma\gamma_i^2 h_i^2},$$

oder $\frac{1}{s} E$ zwischen den Grenzen:

$$\frac{1}{s}\Sigma\gamma_i k_i - \frac{2r}{s}\sqrt{\Sigma\gamma_i^2 h_i^2} \text{ und } \frac{1}{s}\Sigma\gamma_i k_i + \frac{2r}{s}\sqrt{\Sigma\gamma_i^2 h_i^2}$$

liegt. Da $\Sigma\gamma_i^2 h_i^2 < H^2 s$ ist, so folgt, daß man s immer so groß nehmen kann, daß man eine gegebene Wahrscheinlichkeit hat, daß $\frac{1}{s} E$ beliebig wenig von der Größe $\frac{1}{s}\Sigma\gamma_i k_i$ verschieden ist, welche letzte Größe folglich der Werth von $\frac{1}{s} E$ bei einer unendlich großen Anzahl von Beobachtungen sein würde.

10. Um ein Beispiel von der im vorhergehenden §. erwähnten Ausnahme zu geben, wollen wir $a = \infty$ setzen, und annehmen, daß das Wahrscheinlichkeitsgesetz für alle Beobachtungen, sowie für gleiche und entgegengesetzte Fehler dasselbe sei, so daß die Winkel $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ in §. 8 verschwinden. Ferner wollen wir $\gamma = 1$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{1}{3}, \ldots$ und allgemein $\gamma_i = \frac{1}{i+1}$ setzen, woraus folgt:

$$\varrho_i = 2\int_0^\infty fx \cos\frac{\alpha x}{i+1} dx.$$

Außerdem sei:

$$fx = e^{\mp 2x},$$

wo das obere Zeichen stattfindet, wenn die Veränderliche x positiv,

und das untere, wenn sie negativ ist. Dieser Ausdruck von fx gibt:

$$\int_0^\infty fx\,dx = \int_0^{-\infty} fx\,dx = \tfrac{1}{2},$$

und genügt folglich der Bedingung $\int_{-a}^{a} fx\,dx = 1$. Der zugehörige Werth von ϱ_i ist:

$$\varrho_i = 2\int_0^\infty e^{-2x} \cos\frac{\alpha x}{i+1}\,dx = \frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{4(i+1)^2}},$$

und hiernach hat man:

$$R = \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{4.4}\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{4.9}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha^2}{4s^2}\right)}$$

Da nun die Anzahl der Factoren des Nenners unendlich groß ist, so ist derselbe nach der bekannten Zerlegungsart der Exponentialgrößen in Producte dieser Art gleich:

$$\frac{e^{\frac{\pi\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi\alpha}{2}}}{\pi\alpha}.$$

Man hat folglich unter endlicher Form:

$$R = \frac{\pi\alpha}{e^{\frac{1}{2}\pi\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\pi\alpha}},$$

und wenn man diesen Werth in die Formel (4) substituirt, $\psi = 0$ setzt, und die Integration in Beziehung auf z verrichtet; so folgt:

$$p = \int_0^\infty \frac{\sin(b+c)\alpha}{e^{\frac{1}{2}\pi\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\pi\alpha}}\,d\alpha - \int_0^\infty \frac{\sin(b-c)\alpha}{e^{\frac{1}{2}\pi\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\pi\alpha}}\,d\alpha.$$

Die genauen Werthe dieser Integrale ergeben sich aus einer bekannten Formel, und der Werth von p verwandelt sich endlich in:

$$p = \frac{e^{2(b+c)} - 1}{2\left(e^{2(b+c)}+1\right)} - \frac{e^{2(b-c)} - 1}{2\left(e^{2(b-c)}+1\right)}.$$

Dieses ist also die Wahrscheinlichkeit, daß der Werth von E oder der ins Unendliche fortlaufenden Reihe:

$$\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + \tfrac{1}{3}\varepsilon_2 + \tfrac{1}{4}\varepsilon_3 + \ldots$$

zwischen $b-a$ und $b+a$ liegt. Wenn man $b=0$ setzt, so reducirt sich diese Wahrscheinlichkeit auf:

$$p = \frac{1-e^{-2c}}{1+e^{-2c}}.$$

Hieraus folgt, daß, ohne für c eine sehr große Zahl nehmen zu müssen, indem man z. B. $c>5$ setzt, eine sich der Gewißheit sehr nähernde Wahrscheinlichkeit vorhanden ist, daß die Summe E zwischen den Grenzen $\pm c$ liegt. Setzt man $b=0$, so hat man:

$$p = \frac{1-e^{-2c}}{2(1+e^{-2c})}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß E zwischen den Grenzen c und $2c$ liegt, welche, wie man sieht, halb so groß ist, als die vorhergehende.

Wenn das Wahrscheinlichkeitsgesetz dasselbe ist, wie in dem eben betrachteten Beispiele, und man nimmt für die Coefficienten $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ die Reihe $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$, so findet man, daß sich die Formel (4) in folgende verwandelt:

$$p = \frac{2}{\pi} \int_{-c}^{c} \left(\int_0^\infty \frac{\cos(b-z)\alpha}{e^{\frac{1}{4}\pi\alpha} + e^{-\frac{1}{4}\pi\alpha}} d\alpha \right) dz;$$

aber man hat:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(b-z)\alpha}{e^{\frac{1}{4}\pi\alpha} + e^{-\frac{1}{4}\pi\alpha}} d\alpha = \frac{2}{e^{2(b-z)} + e^{-2(b-z)}},$$

so daß man die Integration in Beziehung auf z verrichten kann, und

$$p = \frac{2}{\pi} \left[arc\left(tang = e^{-2(b-c)}\right) - arc\left(tang = e^{-2(b+c)}\right) \right]$$

für die Wahrscheinlichkeit erhält, daß der Werth der ins Unendliche fortlaufenden Reihe:

$$\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon_1 + \tfrac{1}{5}\varepsilon_2 + \tfrac{1}{7}\varepsilon_3 + \ldots$$

zwischen den Grenzen $b-c$ und $b+c$ liegt.

Für $b=0$ verwandelt sich dieser Werth von p in:

$$p = \frac{2}{\pi} [arc(tang = e^{2c}) - arc(tang = e^{-2c})]$$
$$= 1 - \frac{4}{\pi} arc(tang = e^{-2c}),$$

welche Größe sehr wenig von der Einheit verschieden ist, wenn c zwar keine sehr große Zahl, aber doch größer, als 5 oder 6 Einheiten ist. Für $b = c$ wird dieser Werth von p halb so groß oder gleich:

$$\tfrac{1}{2} - \frac{2}{\pi} arc(tang = e^{-2c}).$$

Wenn man diese Resultate mit dem im vorhergehenden §. vergleicht, so sieht man, dass die Wahrscheinlichkeiten der Werthe von E sehr verschieden sind, jenachdem die Coefficienten γ, γ_1, γ_2, ... eine abnehmende unendliche Reihe bilden, oder alle einen endlichen Werth haben, wie in dem Folgenden vorausgesetzt werden soll.

11. In den meisten Fällen ist die unmittelbar durch die Beobachtungen gegebene Größe nicht die unbekannte Größe selbst, welche man bestimmen will, sondern eine Function derselben, deren Werth sich von einer Beobachtung zur andern ändert. Sollen aber die Rechnungen, besonders bei einer sehr großen Anzahl von Beobachtungen, nicht unausführbar sein, so muss diese Function eine lineare sein, worin die Unbekannte schon hinreichend genau bekannt ist, damit die daran vorzunehmende Correction sehr klein wird und die höhern Potenzen derselben als die erste vernachlässigt werden können, so dass die Function in Beziehung auf diese Correction, welche alsdann die wirkliche unbekannte Größe der Aufgabe ist, linear wird. Wir wollen sie durch u bezeichnen, durch A_i den Näherungswerth der der $(i+1)$ten Beobachtung entsprechenden Function, durch $A_i + u q_i$ ihren verbesserten Werth, durch B_i den durch diese Beobachtung gegebenen Werth derselben Function, und, wie im Vorhergehenden, durch ε_i den unbekannten Fehler dieser Beobachtung; so haben wir auf diese Weise:

$$B_i + \varepsilon_i = A_i + u q_i,$$

und wenn wir:

$$B_i - A_i = \delta_i$$

setzen, so dass δ der Unterschied zwischen dem beobachteten und dem schon bekannten Näherungswerthe ist, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\varepsilon_i = u q_i - \delta_i.$$

Eine ähnliche Gleichung erhält man für jede der betrachteten s Beobachtungen; die Coefficienten q, q_1, q_2, ... und die Größen δ, δ_1, δ_2, ... sind in jedem besondern Falle gegeben, und es kommt alsdann darauf an, aus diesem Systeme von Gleichungen den am meisten von den Beobachtungsfehlern befreiten Werth der gesuchten Größe abzuleiten.

Zu dem Zwecke wollen wir diese Gleichungen resp. durch die Coefficienten γ, γ_1, γ_2, ... multipliciren, und dann alle zusammenaddiren, so erhalten wir:

$$E = u\Sigma\gamma_i q_i - \Sigma\gamma_i\delta_i,$$

wo sich die Summen Σ, wie im Vorhergehenden, von $i=0$ bis $i=s-1$ erstrecken. Je mehr s zunimmt, desto mehr nähert sich $\frac{1}{s}E$ dem Werthe $\frac{1}{s}\Sigma\gamma_i k_i$, und der Werth, welchem sich u zu gleicher Zeit nähert, ist folglich:

$$u = \frac{\Sigma\gamma_i\delta_i}{\Sigma\gamma_i q_i} + \frac{\Sigma\gamma_i k_i}{\Sigma\gamma_i q_i}, \qquad (6)$$

und wenn man diesen Werth für u nimmt, so drückt $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}dr$ die Wahrscheinlichkeit aus, daß der zu befürchtende Fehler oder der Unterschied zwischen diesem und dem wahren Werthe von u zwischen den Grenzen:

$$\pm\frac{2r\sqrt{\Sigma\gamma_i^2 h_i^2}}{\Sigma\gamma_i q_i}$$

liegt.

Bei derselben Wahrscheinlichkeit ist also der zu befürchtende Fehler desto kleiner, je kleiner der Coefficient von r in diesem Ausdrucke ist. Man muß also das System von Factoren γ, γ_1, γ_2, ... wählen, für welches der Werth dieses Coefficienten ein Minimum wird, und wenn man sein Differenzial in Beziehung auf irgend einen Coefficienten $=0$ setzt; so erhält man:

$$\gamma_i^2 h_i^2 \Sigma\gamma_i q_i - q_i\Sigma\gamma_i^2 h_i^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$\gamma_i = \frac{\mu q_i}{h_i^2},$$

wo μ ein constanter, den sämmtlichen Factoren $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ gemeinschaftlicher Coefficient ist, welcher ganz willkürlich bleibt, wie man sieht, wenn man diesen Ausdruck von γ_i in die vorhergehende Gleichung substituirt. Der Werth von u verwandelt sich alsdann in:

$$u = \frac{\Sigma \frac{q_i \delta_i}{h_i^2}}{\Sigma \frac{q_i^2}{h_i^2}} + \frac{\Sigma \frac{q_i k_i}{h_i^2}}{\Sigma \frac{q_i^2}{h_i^2}} \qquad (7)$$

und die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers sind:

$$\pm \frac{2r}{\sqrt{\Sigma \frac{q_i^2}{h_i^2}}}$$

12. In dem besondern Falle, wo die Fehlerwahrscheinlichkeit für alle Beobachtungen dieselbe ist, und wo folglich alle die Größen h, $h_1, h_2, \ldots$, sowie die Größen $k, k_1, k_2, \ldots$ einander gleich sind, hat man blos:

$$u = \frac{\Sigma q_i \delta_i}{\Sigma q_i^2} + \frac{k \Sigma q_i}{\Sigma q_i^2} \qquad (8)$$

und für die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers:

$$\pm \frac{2rh}{\sqrt{\Sigma q_i^2}}.$$

Wenn die Coefficienten $q, q_1, q_2, \ldots$ eine abnehmende unendliche Reihe bildeten, wie z. B. die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, so hätte man:

$$\Sigma q_i^2 = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

und die Grenzen hätten folglich einen endlichen Werth $= \pm \frac{2rh\sqrt{6}}{\pi}$, statt sich immer mehr zusammenzuziehen, je größer die Anzahl der Beobachtungen wird. Allein man muss bemerken, dass die Coefficienten $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$, da sie den Coefficienten $q, q_1, q_2, q_3, \ldots$ proportional sind, auch eine abnehmende unendliche Reihe bilden würden, so dass, da dieser Fall unter die in §. 11 erwähnte Ausnahme gehört, die eben gefundenen Formeln nicht darauf anwendbar sind.

Denn wenn man dasselbe Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Fehler annähme, wie in diesem §., so hätte man:

$$h=0\,,\; h^2=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\,x^2\,dx^2=1.$$

Da nun $\pm\frac{2r\sqrt{6}}{\pi}$ die Grenzen des Fehlers von u sind, so wären die des Werthes von E gleich $\pm\frac{2r\sqrt{6}}{\pi}\Sigma\gamma_i^2$ oder $\pm\frac{2r\pi}{\sqrt{6}}$, und die entsprechende Wahrscheinlichkeit würde ausgedrückt durch:

$$\frac{1-e^{-\frac{4r\pi}{\sqrt{6}}}}{1+e^{-\frac{4r\pi}{\sqrt{6}}}},$$

während sie nach den vorhergehenden Formeln durch das mit r anfangende Integral:

$$\frac{2}{\pi}\int e^{-r^2}\,dr$$

ausgedrückt würde.

Wenn derselbe Fehler in der ganzen Beobachtungsreihe wieder als gleich wahrscheinlich und die Coefficienten $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ alle der Einheit gleich angenommen werden, so wird der aus der Gleichung (6) abgeleitete Werth von u ausgedrückt durch:

$$u=\frac{\Sigma\delta_i}{\Sigma q_i}+\frac{ks}{\Sigma q_i} \qquad (9)$$

und die Grenzen des mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}\,dr$ zu befürchtenden Fehlers sind:

$$\pm\frac{2rh\sqrt{s}}{\Sigma q_i}.$$

Diese Grenzen können nicht so eng sein, als die, welche der Formel (8) entsprechen, für welche ihre Ausdehnung ein Minimum ist. Es muss also, abgesehen von Zeichen, das Verhältniss:

$$\frac{\Sigma q_i}{\sqrt{s}\sqrt{\Sigma q_i^2}}<1$$

sein, was sich leicht zeigen läßt; denn bezeichnet man die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen je zwei der Coefficienten $q, q_1, q_2, \ldots$ mit Δ^2, und die Summe der Producte aus je zwei dieser Coefficienten mit Q, so hat man:

$$\Delta^2 = (s-1)\Sigma q_i^2 - 2Q,$$

$$(\Sigma q_i)^2 = \Sigma q_i^2 + 2Q;$$

also:
$$\Delta^2 = s\Sigma q_i^2 - (\Sigma q_i)^2; \qquad (10)$$

daher:
$$\frac{\Sigma q_i}{\sqrt{s}\sqrt{\Sigma q_i^2}} = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{s\Sigma q_i^2}},$$

welche Größe offenbar kleiner ist, als 1, ausgenommen in dem Falle, wo die Coefficienten $q, q_1, q_2, \ldots$ alle einander gleich sind und folglich $\Delta = 0$ ist.

13. Nach dem Ausdrucke von ε_i in §. 11 hat man:

$$\Sigma(\varepsilon_i - k)^2 = \Sigma(q_i u - \delta_i - k)^2,$$

und wenn man u durch die Bedingung bestimmt, daß diese Summe ein Minimum sei, so findet man:

$$u = \frac{\Sigma q_i \delta_i}{\Sigma q_i^2} + \frac{k\Sigma q_i}{\Sigma q_i^2},$$

was mit der Formel (8) übereinstimmt. Hieraus folgt also, daß die vortheilhafteste Bestimmungsart von u darin besteht, die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler, nachdem jeder um die Größe k vermindert ist, zu einem Minimum zu machen, und wenn man $k = 0$ setzt, so ist diese Methode die der kleinsten Quadrate, wie Laplace zuerst bewiesen hat. Aber wenn die positiven und negativen Fehler nicht gleich wahrscheinlich sind, so gibt diese Methode sowohl, als die gewöhnliche, wo man die Summe der Fehler $= 0$ macht, einen unvollständigen Werth von u, und um denselben vollständig zu machen, muß man für jede besondere Aufgabe den Werth der Constante k kennen; jedoch kann man bemerken, daß der Coefficient von k in der Formel (8) kleiner ist, als in der Formel (9), welche sich auf die zweite Methode bezieht. Hieraus folgt, daß man durch Weglassung des Gliedes mit k einen größern Fehler zu begehen Gefahr läuft, wenn man von dem gewöhnlichen Verfahren Gebrauch macht, als wenn man die Methode der kleinsten Quadrate anwendet, worin also ein Vorzug dieser letzten Methode besteht.

14. Wir wollen nun annehmen, daſſ die betrachteten s Beobachtungen aus mehrern Gruppen bestehen, wo in jeder das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler dasselbe ist. In der ersten Gruppe sei s' die Anzahl der Beobachtungen und h, k die Werthe von h_i, k_i, in der zweiten Gruppe s'', h', k' die analogen Größen, u. s. f.; so haben wir nach der Formel (7):

$$u = \frac{\frac{1}{h^2}\Sigma' q_i \delta_i + \frac{1}{h'^2}\Sigma'' q_i \delta_i + etc. + \frac{k}{h^2}\Sigma' q_i + \frac{k'}{h'^2}\Sigma'' q_i + etc.}{\frac{1}{h^2}\Sigma' q_i^2 + \frac{1}{h'^2}\Sigma'' q_i^2 + etc.},$$

und die Grenzen des mit der Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2} dr$$

zu befürchtenden Fehlers sind:

$$\frac{\pm 2r}{\sqrt{\frac{1}{h^2}\Sigma' q_i^2 + \frac{1}{h'^2}\Sigma'' q_i^2 + etc.}},$$

wo sich die Summe Σ' auf die erste Beobachtungsgruppe, Σ'' auf die zweite, *etc.* erstreckt.

Dieser Werth von u setzt nicht voraus, daſſ die Zahlen s', s'', ... sehr groß sind, und es ist zu seiner Anwendung nur erforderlich, daſſ ihre Summe oder die Zahl s aller Beobachtungen sehr groß ist. Wenn man, obgleich die Zahlen s', s'', ... nicht nothwendig sehr groß sind, den Werth von u nach der Regel im vorhergehenden §. für jede Beobachtungsgruppe besonders bestimmt, und die Resultate der 1sten, 2ten, 3ten, ... Beobachtungsreihe mit U, U', U'', ... bezeichnet, so daſſ:

$$U\Sigma' q_i^2 = \Sigma' q_i \delta_i + k\Sigma' q_i,$$
$$U'\Sigma'' q_i^2 = \Sigma'' q_i \delta_i + k'\Sigma'' q_i,$$
$$etc.$$

ist, und man setzt ferner der Kürze wegen:

$$\frac{1}{h^2}\Sigma' q_i^2 = g,\ \frac{1}{h'^2}\Sigma'' q_i^2 = g',\ etc.;$$

so verwandelt sich der vorhergehende Werth von u in:

$$u = \frac{gU + g'U' + g''U'' + \text{etc.}}{g + g' + g'' + \text{etc.}},$$

welche Formel also zur Berechnung des Werthes von u nach mehrern Gruppen verschiedenartiger Beobachtungen dient, wenn die durch die Regel im vorhergehenden §. gegebenen Werthe von u und die Größen $g, g', g'', \ldots$ für alle diese Beobachtungsgruppen bekannt sind. Zu gleicher Zeit nehmen die Grenzen des mit der obigen Wahrscheinlichkeit zu befürchtenden Fehlers folgende Form an:

$$\frac{\pm 2r}{\sqrt{g + g' + g'' + \text{etc.}}}.$$

15. Die Anwendung der vorhergehenden Formeln fordert, daſſ man die beiden Größen k und h für jede Art von Beobachtungen kenne, nämlich die Größe k, um den Werth der Unbekannten bilden und die Größe h um die Grenzen des an diesem Werthe mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu befürchtenden Fehlers schätzen zu können. Die natürlichste Voraussetzung, welche man in Beziehung auf die erste dieser beiden Größen machen kann, besteht offenbar darin, sie als Null oder die positiven und negativen Fehler als gleich möglich zu betrachten; aber wenn diese Gleichheit nicht stattfindet, so ist auch nicht $k = 0$, und in sehr vielen Fällen kann man den wahren Werth von k auf folgende Weise bestimmen.

Gesetzt, man wendete successive zwei verschiedene Systeme von Coefficienten $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ und $\gamma', \gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$ an, und hätte die beiden Gleichungen:

$$\Sigma\gamma_i\varepsilon_i = u\Sigma\gamma_i q_i - \Sigma\gamma_i\delta_i,$$
$$\Sigma\gamma'_i\varepsilon_i = u\Sigma\gamma'_i q_i - \Sigma\gamma'_i\delta_i$$

gebildet, so erhielte man, wenn man die erste mit $\Sigma\gamma'_i q_i$ und die zweite mit $\Sigma\gamma_i q_i$ multiplicirt und dann die Resultate von einander abzieht:

$$\Sigma\gamma''_i\varepsilon_i = \Sigma\gamma_i q_i \Sigma\gamma'_i\delta_i - \Sigma\gamma'_i q_i \Sigma\gamma_i\delta_i,$$

wo der Kürze wegen:

$$\gamma_i\Sigma\gamma'_i q_i - \gamma'_i\Sigma\gamma_i q_i = \gamma''_i.$$

gesetzt ist. Nun findet aber nach dem Obigen (§. 9) die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}dr$ statt, daſſ die Summe $\Sigma\gamma''_i\varepsilon_i$ zwischen den Grenzen:

$$k\Sigma\gamma_i'' \pm 2rhV\overline{\Sigma\gamma_i''^2}$$

liegt, indem das Wahrscheinlichkeitsgesetz bei allen Beobachtungen als dasselbe und ihre Anzahl s als sehr groß vorausgesetzt ist. Wenn man $k\Sigma\gamma_i''$ für den Werth dieser Summe nimmt, so wird der correspondirende Werth von k ausgedrückt durch:

$$k = \frac{\Sigma\gamma_i q_i \Sigma\gamma_i' \delta_i - \Sigma\gamma_i' q_i \Sigma\gamma_i \delta_i}{\Sigma\gamma_i''},$$

und die Grenzen des an diesem Werthe mit der obigen Wahrscheinlichkeit zu befürchtenden Fehlers sind:

$$\pm\frac{2rhV\overline{\Sigma\gamma_i''^2}}{\Sigma\gamma_i''}.$$

Sollte das Intervall dieser Grenzen ein Minimum werden, so müsste γ_i'' in Beziehung auf i constant sein; aber es ist leicht einzusehen, dass die Coefficienten γ_i und γ_i' nicht so beschaffen sein können, dass dieses stattfindet.

Wenn man den einen dieser beiden Coefficienten als constant und den andern als q_i proportional betrachtet, so hat man:

$$\gamma_i'' = \mu(q_i\Sigma q_i - \Sigma q_i^2),$$

wo μ eine von i unabhängige Größe ist. Hieraus folgt:

$$\Sigma\gamma_i''^2 = \mu^2[s(\Sigma q_i^2)^2 - (\Sigma q_i)^2\Sigma q_i^2] = \mu^2 \Delta^2 \Sigma q_i^2,$$
$$\Sigma\gamma_i'' = \mu[(\Sigma q_i)^2 - s\Sigma q_i^2] = -\mu\Delta^2,$$

wo Δ^2 dieselbe Bedeutung wie in §. 12 hat. Der Werth von k und die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers sind folglich:

$$k = \frac{\Sigma q_i \Sigma q_i \delta_i - \Sigma q_i^2 \Sigma\delta_i}{\Delta^2} \text{ und } \pm\frac{2rhV\overline{\Sigma q_i^2}}{\Delta},$$

und die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist wieder $= \frac{2}{V\pi}\int e^{-r^2}dr.$

Wenn die Summe, welche Δ^2 ausdrückt, gegen Σq_i^2 sehr groß ist, so wird der Werth von k mit derselben Genauigkeit als die Unbekannte u bestimmt; aber wenn die Coefficienten $q, q_1, q_2, \ldots$ einander gleich, oder wenn ihre Unterschiede nur sehr klein sind, so wird die Größe $\Delta = 0$, oder sehr klein, und die Grenzen des an dem Werthe

von k zu befürchtenden Fehlers finden nicht mehr statt, so daß man alsdann k durch kein Mittel mehr bestimmen kann.

Wenn die betrachteten Beobachtungen die Bestimmung des Coefficienten einer periodischen Ungleichheit zum Zwecke haben und sie umfassen die ganze Ausdehnung dieser Periode, so nähert sich die Summe der Coefficienten q, q_1, q_2, ... immer mehr und mehr dem Werthe Null, in eine je größere Anzahl von Theilen diese Periode getheilt, oder je größer die Anzahl der Beobachtungen ist. Wenn man also Σq_i vernachlässigt, so hat man $\Delta^2 = s\Sigma q_i^2$, und der Werth von k, sowie die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers reduciren sich resp. auf:

$$k = -\frac{\Sigma \delta_i}{s} \text{ und } \pm\frac{2rh}{\sqrt{s}}.$$

Dividirt man also in diesem Falle die Summe der Größen δ, δ_1, δ_2, ... durch ihre Anzahl, so ergibt sich unmittelbar, ob die Größe k einen merklichen Werth hat, und der mit entgegengesetztem Zeichen genommene Quotient drückt diesen Werth sehr genau aus.

16. Statt diese Größe zu bestimmen, könnte man sie aus dem Werthe von u zu eliminiren suchen. Zu dem Zwecke wollen wir den durch die Formel (6) gegebenen allgemeinen Ausdruck von u wieder betrachten. Wenn man annimmt, daß die Größen k_i und h_i für alle Beobachtungen dieselben sind, so verwandeln sich dieser Ausdruck und die sich darauf beziehenden Fehlergrenzen resp. in:

$$u = \frac{\Sigma\gamma_i\delta_i}{\Sigma\gamma_i q_i} + \frac{k\Sigma\gamma_i}{\Sigma\gamma_i q_i} \text{ und } \pm\frac{2rh\sqrt{\Sigma\gamma_i^2}}{\Sigma\gamma_i q_i}.$$

Wir wollen also setzen:

$$\Sigma\gamma_i = 0,$$

wodurch einer der Factoren γ, γ_1, γ_2, ... bestimmt wird, und hierauf wollen wir die Fehlergrenze in Beziehung auf alle übrigen zu einem Minimum machen, so erhalten wir die beiden Differenzialgleichungen:

$$\Sigma d\gamma_i = 0,\ \Sigma\gamma_i q_i \Sigma\gamma_i d\gamma_i - \Sigma\gamma_i^2 \Sigma q_i d\gamma_i = 0.$$

Multiplicirt man die erste durch einen unbestimmten Factor θ, addirt sie hierauf zu der zweiten und setzt dann den Coefficienten jedes Differenziales $= 0$, so erhält man:

$$\theta + \gamma_i \Sigma\gamma_i q_i - q_i \Sigma\gamma_i^2 = 0.$$

Der sich aus dieser Gleichung ergebende Werth von γ_i ist von der Form:

$$\gamma_i = \mu q_i + \theta',$$

wo μ und θ' zu bestimmende Constanten sind. Substituirt man nun diesen Werth in die vorhergehende Gleichung und setzt dann den Coefficienten von q_i außerhalb des Summenzeichens Σ, sowie das in Beziehung auf i constante Glied einzeln gleich Null, so erhält man:

$$\mu \theta' \Sigma q_i + \theta'^2 s = 0,$$

$$\theta + \theta' \mu \Sigma q_i^2 + \theta'^2 \Sigma q_i = 0,$$

woraus folgt:

$$\theta = -\frac{\mu}{s} \Sigma q_i, \; \theta' = \frac{\mu^2}{s^2} \left[s \Sigma q_i^2 - (\Sigma q_i)^2 \right] \Sigma q_i.$$

Hiernach verwandelt sich der Werth von γ_i in:

$$\gamma_i = \mu \left(q_i - \frac{1}{s} \Sigma q_i \right),$$

und der Factor μ bleibt unbestimmt. Der Werth von u ist folglich:

$$u = \frac{s \Sigma q_i \delta_i - (\Sigma q_i)^2}{\Delta^2},$$

wo Δ^2 dieselbe Größe wie früher bezeichnet, und nach verrichteten Reductionen werden die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers ausgedrückt durch:

$$\pm \frac{2 r h \sqrt{s}}{\Delta},$$

indem die entsprechende Wahrscheinlichkeit wieder $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$ ist. Wenn Δ^2 eine gegen s sehr kleine Größe ist, so sind diese Grenzen illusorisch und man kann von diesem Werthe von u keinen Gebrauch machen. Wenn Σq_i eine sehr kleine Größe ist, so sind dieser Werth und diese Grenzen sehr wenig von dem durch die Gleichung (8) gegebenen Werthe von u und von den sich darauf beziehenden Fehlergrenzen verschieden.

17. Wir wollen uns nun mit der Bestimmung der Größe h beschäftigen, welche man kennen muss, wenn man die Fehlergrenzen der

verschiedenen vorhergehenden Formeln berechnen will. Zu dem Zwecke wollen wir bemerken, dass man statt der in §. 1 und 2 betrachteten Summe der Fehler der s Beobachtungen auch die Summe der Werthe einer beliebigen Function dieser Fehler hätte betrachten können. Die Wahrscheinlichkeit p, dass diese Summe zwischen zwei gegebenen Grenzen $b-c$ und $b+c$ läge, würde sich ohne weitere Schwierigkeiten nach diesen beiden §§. bestimmen lassen, und wenn man diese Function mit φ bezeichnete, so gäbe die Formel (1) auch noch den Werth von p, wenn man in der imaginären Exponentialgröße, welche das Integral in Beziehung auf x enthält, φx für x setzte und alle übrigen Bezeichnungen beibehielte. Wenn man alsdann die Zahl s sehr groß annimmt, ferner:

$$\int_{-a}^{a} fx\,\varphi x\,dx = K,\ \int_{-a}^{a} fx\,(\varphi x)^2\,dx = K',\ \tfrac{1}{2}(K'-K^2) = H^2$$

setzt, und die Beobachtungsfehler wieder mit ε, ε_1, ε_2, ... bezeichnet, so findet man, wie in §. 7:

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}\,dr$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe:

$$\varphi\varepsilon + \varphi\varepsilon_1 + \varphi\varepsilon_2 + \ldots + \varphi\varepsilon_{s-1} = \Sigma\varphi\varepsilon_i$$

zwischen den Grenzen:

$$Ks \pm 2rH\sqrt{s}$$

liegt.

Man kann also die Zahl s immer so groß annehmen, dass $\frac{1}{s}\Sigma\varphi\varepsilon_i$ mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit beliebig wenig von K verschieden ist, und wenn man:

$$\frac{1}{s}\Sigma\varphi\varepsilon_i = K$$

setzt, so sind die Grenzen des mit der Wahrscheinlichkeit p zu befürchtenden Fehlers:

$$\pm\frac{2rH}{\sqrt{s}}.$$

Wir wollen nun $\varphi x = x^2$ setzen, in welchem Falle K und die Größe k' in §. 6 einander gleich sind, so dass man nach diesem §. hat:

$$K = k' = 2h^2 + k^2.$$

Die vorhergehende Gleichung verwandelt sich also in:

$$h^2 + \tfrac{1}{2}k^2 = \frac{1}{2s}\Sigma\varepsilon_i^2;$$

aber nach §. 11 hat man:

$$\Sigma\varepsilon_i^2 = \Sigma(u\,q_i - \delta_i)^2,$$

und wenn man folglich für u seinen durch die Formel (8) gegebenen Werth substituirt, dessen Fehler am kleinsten ist, so ergibt sich die Gleichung:

$$2s(h^2 + \tfrac{1}{2}k^2)\Sigma q_i^2 =$$
$$(\Sigma q_i\delta_i + k\Sigma q_i)^2 - 2(\Sigma q_i\delta_i + k\Sigma q_i)\Sigma q_i\delta_i + \Sigma q_i^2\,\Sigma\delta_i^2,$$

oder reducirt:

$$2sh^2\Sigma q_i^2 + \Delta^2 k^2 + (\Sigma q_i\delta_i)^2 - \Sigma q_i^2\,\Sigma\delta_i^2 = 0,$$

welche den Werth von u gibt, wenn der von k gegeben ist.

Diese Formel stimmt mit der von Laplace zu demselben Zwecke gegebenen überein, wenn man $k = 0$ setzt, und alle die Coefficienten $q, q_1, q_2, \ldots$ einander gleich sind. In diesem letzten Falle ist $\Delta = 0$ und die vorhergehende Formel gibt:

$$h^2 = \frac{\Delta'^2}{2s^2}, \text{ oder } h = \frac{\Delta'}{s\sqrt{2}},$$

wo Δ'^2 in Beziehung auf die Größen $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ dasselbe bezeichnet, wie Δ^2 in Beziehung auf die Coefficienten $q, q_1, q_2, \ldots$, d. h. die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen je zwei der Größen $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$

Im Allgemeinen hängt der Fehler, welchen man begeht, wenn man für h den sich aus der eben gefundenen Gleichung ergebenden Werth nimmt, von dem Fehler des angewandten Werthes von u und von dem Fehler der Gleichung $\frac{1}{s}\Sigma\varepsilon_i^2 = K$ ab. Da die Grenzen der letztern eine neue Unbekannte H enthalten, so kann man sie, sowie auch die des an dem Werthe von h zu befürchtenden Fehlers nicht genau bestimmen; allein dieses verhindert nicht, diesen Werth von h in den Formeln der vorhergehenden §§., wo er durch sehr kleine Grötzen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{s}}$ multiplicirt ist, anzuwenden.

18. Wir wollen nun annehmen, daſſ irgend eine Größe, welche wir der Kürze wegen mit A bezeichnen wollen, ihrer Natur nach alle möglichen Werthe zwischen gegebenen Grenzen a und b haben könne, und es sei x irgend einer dieser Werthe. Wenn man zur Bestimmung der Größe A eine Reihe von Versuchen anstellt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſſ der durch einen dieser Versuche gefundene Werth nicht größer ist als x, im Allgemeinen von einem Versuche zum andern veränderlich, und wir wollen sie für den $n$ten Versuch mit $F_n x$ bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit, daſſ dieser Werth genau $= x$ sein wird, kann nur unendlich klein sein, weil die Anzahl der möglichen Werthe unendlich groß ist, und wenn man $\frac{dF_n x}{dx} = f_n x$ setzt, so wird sie ausgedrückt durch $f_n x\, dx$.

Es bezeichne X eine gegebene Function von x, welche ununterbrochen von $x = a$ bis $x = b$ wächst, und wir wollen durch a_1, b_1 ihre beiden äußersten Werthe bezeichnen. Größerer Allgemeinheit wegen wollen wir die Wahrscheinlichkeit suchen, daſſ die Summe der sich aus s successiven Beobachtungen ergebenden Werthe von X zwischen gegebenen Grenzen liegt.

Zuvörderst wollen wir annehmen, daſſ X nur ν, um gleichviel von einander verschiedene Werthe haben könne, worauf wir $\nu = \infty$ und den Unterschied zweier auf einander folgender Werthe von X unendlich klein setzen wollen. Wir wollen also annehmen, daſſ a_1 und b_1 Vielfache derselben Größe ω sind, so daſſ $a_1 = p_1 \omega$ und $b_1 = q_1 \omega$ ist, wo p_1 und q_1 ganze positive oder negative Zahlen sind. Durch $i\omega$ wollen wir einen zwischenliegenden Werth von X bezeichnen, indem i auch eine ganze Zahl, oder Null ist. Setzt man $q_1 - p_1 = \nu - 1$, so ist die Anzahl der Werthe von X gleich ν, und ihre constante Differenz gleich ω. Es sei Q_n die Wahrscheinlichkeit des Werthes von x, welcher bei der $n$ten Beobachtung $X = i\omega$ entspricht. Endlich sei M die Wehrscheinlichkeit, daſſ bei s Beobachtungen die Summe der Werthe von $X = m\omega$ ist, wo m eine zwischen sp_1 und sq_1 liegende ganze Zahl ist; so ist leicht einzusehen, daſſ M der Coefficient von t^m in der Entwickelung des Productes:

$$\Sigma t^i Q_1 . \Sigma t^i Q_2 . \Sigma t^i Q_3 \ldots \Sigma t^i Q_s$$

nach den Potenzen von t ist, wo sich jede der Summen Σ auf alle Werthe von i, von p_1 bis q_1 erstreckt, und folglich jede dieser Summen ν Glieder hat. Man kann auch sagen, daſſ M der von t unabhängige Theil des Productes aus dieser Function von t und aus t^{-m}

ist, und wenn man in diesem Producte $e^{\theta\sqrt{-1}}$ für t und der Kürze wegen

$$\Sigma e^{i\theta\sqrt{-1}} Q_1 . \Sigma e^{i\theta\sqrt{-1}} Q_2 \ldots \Sigma e^{i\theta\sqrt{-1}} Q_s = P$$

setzt, so ergibt sich:

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P e^{-m\theta\sqrt{-1}} d\theta,$$

wo e die Basis des Neperschen Logarithmensystemes und π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser ist.

Durch p wollen wir die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass dieselbe Summe der ν Werthe von X zwischen $\mu\omega$ und $\mu'\omega$ liegt, wo μ und μ' ganze Zahlen, oder Null sind, welche zwischen den Grenzen sp_1 und sq_1 liegen. Offenbar ist p die Summe der Werthe von M, welche man erhält, wenn man m alle Werthe von $m = \mu$ bis $m = \mu'$ inclusive beilegt. Mit Berücksichtigung der Summe der zugehörigen Werthe des Factors $e^{-m\theta\sqrt{-1}}$ ergibt sich aber:

$$p = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \int_{-\pi}^{\pi} P\left[e^{-(\mu-\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}} - e^{-(\mu'-\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}\right] \frac{d\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

Endlich sei:

$$\mu\omega = c - \varepsilon, \ \mu'\omega = c + \varepsilon, \ \frac{\theta}{\omega} = \alpha,$$

so folgt:

$$p = \frac{\omega}{2\pi} \int P \frac{\sin(\varepsilon + \frac{1}{2}\omega)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\omega\alpha} e^{-c\alpha\sqrt{-1}} d\alpha,$$

und die Grenzen in Beziehung auf α sind $\pm\frac{\pi}{\omega}$. Wenn ν unendlich groß oder ω unendlich klein ist, so verwandeln sie sich in $\pm\infty$, und man kann ε für $\varepsilon + \frac{1}{2}\omega$ und 1 für $\frac{2}{\omega\alpha}\sin\frac{1}{2}\omega\alpha$ setzen, wodurch sich der Ausdruck von p in folgenden verwandelt:

$$p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P e^{-c\alpha\sqrt{-1}} \sin\varepsilon\alpha \frac{d\alpha}{\alpha}. \qquad (11)$$

Zu gleicher Zeit fallen die Größen $i\omega$ und Q_n mit X und $f_n x\, dx$ zusammen, die in P vorkommenden Summen Σ verwandeln sich in bestimmte Integrale nach x, deren Grenzen a und b sind, und man hat:

$$P = \int_a^b f_1 x e^{x\alpha\sqrt{-1}} dx . \int_a^b f_2 x e^{x\alpha\sqrt{-1}} dx \ldots$$
$$\int_a^b f_s x e^{x\alpha\sqrt{-1}} dx. \quad (12)$$

19. Die Formel (11) drückt auf die allgemeinste Weise die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Summe der s Werthe der Function X, welche sich aus einer gleichen Anzahl successiver Beobachtungen ergeben, zwischen den Grenzen $c-\varepsilon$ und $c+\varepsilon$, welche gegebene und zwischen sa_1 und sb_1 liegende Größen sind, liegen. Wenn man $X=x$ setzt, so ist p die Wahrscheinlichkeit, dass der durch das mittlere Resultat dieser s Beobachtungen ausgedrückte Werth von A zwischen den Grenzen $\frac{1}{s}(c\pm\varepsilon)$ liegt. Da das Resultat jeder Beobachtung nach der Voraussetzung zwischen den Grenzen a und b liegen muss, so muss man haben:

$$\int_a^b f_1 x\, dx = 1, \int_a^b f_2 x\, dx = 1, \ldots \int_a^b f_s x\, dx = 1. \quad (13)$$

Die Größen $f_1 x, f_2 x, \ldots$ sind übrigens beliebige Functionen von x, deren Werthe sämmtlich positiv sind und die Einheit nicht überschreiten. Wenn diese Functionen gegeben sind, so kann man den genauen Werth von p berechnen; allein meistens ist das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Werthe von A unbekannt und von einer Beobachtung zur andern veränderlich. Die s Functionen, $f_1 x, f_2 x, \ldots$ sind folglich alsdann ebensoviele unbekannte Größen, aber gleichwohl kann man bei einer beträchtlichen Anzahl von Beobachtungen aus den vorhergehenden Formeln einen Werth von p ableiten, welcher desto mehr genähert ist, je größer die Zahl s ist.

Wenn $c-\varepsilon=sa_1$ und $c+\varepsilon=sb_1$ ist, so sind die der Wahrscheinlichkeit p entsprechenden Grenzen die Grenzen a_1 und b_1 selbst, zwischen welchen nach der Voraussetzung der unbekannte Werth von X liegt. Alsdann muss folglich p der Gewissheit oder der Einheit gleich sein, was sich in der That darthun lässt. Zu dem Zwecke wollen wir in dem 1sten, 2ten, ... letzten der s Integrale, durch deren Product p ausgedrückt wird, resp. X_1 und x_1, X_2 und x_2, ... X_s und x_s für X und x setzen, und dann diese Werthe in den von p substituiren, so verwandelt sich die Gleichung (11), wenn man:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_s = \sigma$$

setzt, in:

$$p = \frac{1}{\pi}\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{(\sigma-c)\alpha\sqrt{-1}}\sin\varepsilon\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}\right)\times$$
$$f_1x_1.f_2x_2\ldots f_sx_s.dx_1\,dx_2\ldots dx_s.$$

Nun ist aber:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\sigma-c)\alpha\sqrt{-1}}\sin\varepsilon\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\varepsilon+\sigma-c)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\varepsilon-\sigma+c)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Nach den Grenzen der Integrale in Beziehung auf x_1, x_2, ... x_s kann die Summe σ weder kleiner sein als sa_1, noch größer als sb_1; in dem Falle, welchen wir betrachten, sind folglich die beiden Coefficienten $\varepsilon+\sigma-c$, $\varepsilon-\sigma+c$ positiv, mithin jedes der beiden letzten Integrale $=\pi$, und man hat folglich:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\sigma-c)\alpha\sqrt{-1}}\sin\varepsilon\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}=\pi,$$

woraus folgt:

$$p=\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b f_1x_1f_2x_2\ldots f_sx_s.dx_1.dx_2\ldots dx_s,$$

welche Größe sich vermöge der Gleichungen (13) auf die Einheit reducirt.

20. Daraus, dass das Integral $\int_a^b f_nx\,dx=1$ ist, und dass f_nx nur positive Werthe hat, folgt, dass die Integrale:

$$\int_a^b f_nx\cos\alpha X\,dx,\quad \int_a^b f_nx\sin\alpha X\,dx$$

kleiner sind, als die Einheit, so dass man setzen kann:

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f_nx\cos\alpha X\,dx&=\varrho_n\cos\varphi_n,\\ \int_a^b f_nx\sin\alpha X\,dx&=\varrho_n\sin\varphi_n,\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

wo ϱ_n und φ_n reelle Größen sind, wovon die erste als positiv betrachtet wird. Setzt man alsdann:

$$\varrho_1.\varrho_2.\varrho_3\ldots\varrho_s=R,$$
$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_s=\psi,$$

so verwandelt sich die Formel (12) in:

$$P = R e^{\psi\sqrt{-1}}.$$

Für zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von α sind auch die correspondirenden Werthe des Winkels ψ einander gleich und entgegengesetzt, während die der Größe R einander gleich und von einerlei Zeichen sind. Hiernach und vermittelst des Werthes von P verwandelt sich die Formel (11) in folgende:

$$p = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R\cos(\psi - c\alpha)\sin\varepsilon\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}. \qquad (15)$$

Für $\alpha = 0$ ist jeder der Factoren von R der Einheit gleich und für jeden andern Werth von α kleiner als 1; denn der Werth von ϱ_n^2 lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\varrho_n^2 = \int_a^b f_n x\cos\alpha X dx . \int_a^b f_n x'\cos\alpha X' dx'$$
$$+ \int_a^b f_n x\sin\alpha X dx . \int_a^b f_n x'\sin\alpha X' dx',$$

wo X' den Werth von X ausdrückt, wenn man darin x' für x setzt. Nun ist aber diese Gleichung dasselbe als:

$$\varrho_n^2 = \int_a^b\int_a^b f_n x f_n x'\cos\alpha(X - X')\,dx\,dx',$$

und der Werth von ϱ_n ist offenbar kleiner, als die Quadratwurzel aus $\int_a^b\int_a^b f_n x f_n x' dx dx'$, oder als $\int_a^b f_n x dx$, und folglich kleiner als die Einheit. Hieraus folgt, dass, wenn die Anzahl s der Factoren des Productes R sehr groß ist, dasselbe nur für sehr kleine Werthe von α merkliche Werthe hat. Man kann daher alsdann einen Näherungswerth des in den Formeln (15) enthaltenen Integrales in Beziehung auf α erhalten.

21. Wenn wir der Kürze wegen:

$$\int_a^b X f_n x dx = k_n, \int_a^b X^2 f_n x dx = k'_n, \text{ etc.}$$

setzen und die ersten Theile der Gleichungen (14) nach den Potenzen von α entwickeln, so erhalten wir:

$$\varrho_n \cos\varphi_n = 1 - \frac{\alpha^2}{2} k'_n + \frac{\alpha^4}{2.3.4} k'''_n - etc.,$$

$$\varrho_n \sin\varphi_n = \alpha k_n - \frac{\alpha^3}{2.3} k''_n + etc.$$

Die Größen k_n, k'_n, k''_n, ... wachsen nicht so schnell, als die Potenzen $(b_1 - a_1)$, $(b_1 - a_1)^2$, $(b_1 - a_1)^3$, ..., was schon hinreichend ist, damit diese Entwickelungen Reihen bilden, welche zuletzt immer convergent werden, und folglich für $\varrho_n \cos\varphi_n$ und $\varrho_n \sin\varphi_n$ angewandt werden können. Hieraus ergeben sich für ϱ_n und φ_n Reihen, wovon die eine nur gerade und die andere nur ungerade Potenzen von α enthält, nämlich:

$$\varrho_n = 1 - \alpha^2 h_n + \alpha^4 l_n - etc.$$
$$\varphi_n = \alpha k_n - \alpha^3 g_n + etc.,$$

wo der Kürze wegen:

$$\tfrac{1}{2}(k'_n - k_n^2) = h_n,$$
$$\tfrac{1}{6}(k''_n - 3 k_n k'_n + 2 k_n^3) = g_n,$$
$$etc.$$

gesetzt ist, und hieraus folgt:

$$\log\varrho_n = -\alpha^2 h_n + \alpha^4 (l_n - \tfrac{1}{2} h_n^2) + etc.,$$

$$\varrho_n = e^{-\alpha^2 h_n} [1 + \alpha^4 (l_n - \tfrac{1}{2} h_n^2) + etc.].$$

Ferner wollen wir der Kürze wegen:

$$\Sigma k_n = ks, \; \Sigma h_n = hs, \; \Sigma(l_n - \tfrac{1}{2} h_n^2) = ls, \; etc.$$

setzen, wo sich die Summen Σ von $n = 1$ bis $n = s$ erstrecken, so ergibt sich hieraus:

$$K = e^{-\alpha^2 hs} (1 + \alpha^5 ls + etc.)$$
$$\psi = \alpha ks - \alpha^3 gs + etc.,$$
$$\cos(\psi - c\alpha) = \cos(ks - c)\alpha + \alpha^3 gs \sin(ks - c)\alpha + etc.$$

Die Größen k, h, g, ... können sich mit s ändern, aber sie können nicht mit dieser Zahl ohne Ende zunehmen, und bilden immer, wie die Integrale k_n, k'_n, k''_n, ..., woraus sie abgeleitet werden, eine Reihe, welche nicht so schnell zunimmt, als die der Potenzen von $b_1 - a_1$.

Wenn wir diese Werthe in die Formel (15) substituiren, ferner:

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{s}}, \text{ also } d\alpha = \frac{d\beta}{\sqrt{s}}$$

setzen, und die Glieder dieser Formel, welche von der Kleinheits-ordnung des Bruches $\frac{1}{s}$ sind, d. h. die Glieder, welche außerhalb der Sinus und Cosinus durch s dividirt sind, vernachlässigen; so kommt:

$$\left.\begin{aligned} p = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\beta^2 h} \cos\frac{(ks-c)\beta}{\sqrt{s}} \sin\frac{\varepsilon\beta}{\sqrt{s}} \cdot \frac{d\beta}{\beta} \\ + \frac{2g}{\pi\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\beta^2 h} \sin\frac{(ks-c)\beta}{\sqrt{s}} \sin\frac{\varepsilon\beta}{\sqrt{s}} \beta^2 d\beta. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Sollen diese Integrale nicht unbestimmt sein, so muss h eine positive Größe sein, was auch in der That stattfindet; denn nach der Bedeutung von k_n und k'_n hat man:

$$2h_n = \int_a^b X^2 f_n x\, xd \int_a^b f_n x'\, dx' - \int_a^b X f_n x\, dx \int_a^b X' f_n x'\, dx',$$

welche Größe sich durch ein einziges doppeltes Integral, nämlich durch:

$$2h_n = \int_a^b\int_a^b (X^2 - XX') f_n x f_n x'\, dx\, dx',$$

oder was dasselbe ist, durch:

$$2h_n = \int_a^b\int_a^b (X'^2 - XX') f_n x f_n x'\, dx\, dx'$$

ausdrücken lässt. Addirt man nun diese beiden Gleichungen zusammen, so hat man:

$$4h_n = \int_a^b\int_a^b (X - X')^2 f_n x f_n x'\, dx\, dx',$$

und dieser Werth von $4h_n$ ist offenbar positiv und kann auch nicht Null sein, weil alle Elemente des doppelten Integrales positiv sind. Dasselbe gilt also auch von Σh_n und von h.

Hierauf erhält man durch die bekannten Regeln den genauen Werth des zweiten in der Formel (16) enthaltenen Integrales, und

as erste kann man, wenn man will, auf eine einfachere Form ringen.

22. Wenn man $c = \varepsilon$ nimmt, so ist p die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der durch s Beobachtungen gegebenen Werthe von X wischen den Grenzen 0 und 2ε liegt. Differenzirt man p in Beziehung auf ε, so erhält man:

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{2}{\pi\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\beta^2 h} \cos \frac{(2\varepsilon - ks)\beta}{\sqrt{s}} d\beta$$
$$- \frac{2g}{\pi\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\beta^2 h} \sin \frac{(2\varepsilon - ks)\beta}{\sqrt{s}} \beta^3 d\beta,$$

nd $\frac{dp}{d\varepsilon} d\varepsilon$ ist die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß die Summe er Werthe von X genau $= 2\varepsilon$ ist. Wir wollen nun:

$$2\varepsilon = ks + 2u\sqrt{hs}$$

etzen, so haben wir:

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2 h} \cos(2u\beta\sqrt{h})\, d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}} e^{-u^2},$$

woraus folgt, wenn man in Beziehung auf u differenzirt:

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2 h} \sin(2\beta u\sqrt{h})\, \beta^3 d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{4h^2}(3u - 2u^3) e^{-u^2}.$$

Wegen $\frac{dp}{du} = \frac{dp}{d\varepsilon}\sqrt{hs}$ hat man folglich:

$$\frac{dp}{du} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - \frac{g}{4h\sqrt{hs}}(3u - 2u^3) e^{-u^2}, \quad (17)$$

nd wenn X_n den durch die $n$te Beobachtung gegebenen Werth von X ezeichnet, so ist $\frac{dp}{du} du$ die Wahrscheinlichkeit, daß:

$$\Sigma X_n = ks + 2u\sqrt{hs} \qquad (18)$$

t, wo sich die Summe Σ auf alle Beobachtungen erstreckt.

Wenn wir das Differenzial $\frac{dp}{du} du$ zwischen gegebenen Grenzen $\pm\gamma$ ntegriren, so erhalten wir:

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-u^2} du \qquad (19)$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe ΣX_n zwischen den Gren= zen $ks \pm 2\gamma\sqrt{hs}$ und der mittlere Werth von X oder $\frac{1}{s}\Sigma X_n$ zwi= schen den Grenzen:

$$k \pm \frac{2\gamma\sqrt{h}}{\sqrt{s}}$$

liegt.

Dieses ergibt sich auch aus der Gleichung (16), wenn man:

$$c = ks,\ \varepsilon = 2\gamma\sqrt{hs}$$

setzt, und die Integrationen verrichtet.

Man kann γ immer so groß nehmen, dass der Werth von p be= liebig wenig von der Einheit verschieden ist. Z. B. für $\gamma = 3$ hat man:

$$\int_\gamma^\infty e^{-u^2} du = 0{,}000019577$$

nach der Tafel der Werthe dieses Integrales, welche sich am Ende de[r] Analyse des Réfractions von Kramp befindet, und da

$$\int_0^\gamma e^{-u^2} du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_\gamma^\infty e^{-u^2} du$$

ist, so folgt:

$$p = 1 - 0{,}000022091,$$

welches sehr wenig von der Gewissheit verschieden ist. Man kann e[s] also als höchst wahrscheinlich betrachten, dass sich der aus den Beob= achtungen ergebende Werth von $\frac{1}{s}\Sigma X_n$ fortwährend der Größe k nä= hert, und dass, wenn man diesen Werth für den von k nimmt, der zu befürchtende Fehler kleiner ist, als $\pm\frac{2\gamma\sqrt{h}}{\sqrt{s}}$, wo γ eine wenig be= trächtliche Zahl ist.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die durch s dividirten un[d] bei dem Uebergange von der Gleichung (15) zu der Gleichung (16) ver= nachlässigten Glieder nach den Integrationen in Beziehung auf u di[e] Exponentialgröße $e^{-\gamma^2}$ zum Factor haben würden, wodurch sie unab

hängig von der Größe der Zahl s noch sehr verkleinert werden; denn setzt man z. B. $\gamma = \frac{3}{2}$, so ist der Factor $e^{-\gamma^2} < 0{,}002$, und er nimmt für größere Werthe von γ sehr schnell ab.

23. Die Curve, deren Gleichung:

$$y = f_n x$$

ist, drückt das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Werthe von A bei der $n$ten Beobachtung aus, so dass das Flächenelement $y\,dx$ derselben die durch die entsprechende Abscisse x ausgedrückte Wahrscheinlichkeit des Werthes von A, und die ganze von der Curve eingeschlossene Fläche die Wahrscheinlichkeit ist, dass dieser Werth nicht größer ist, als x.

Die Curve, deren Gleichung:

$$y = \frac{1}{s} \Sigma f_n x$$

ist, ist in Beziehung auf die Reihe der s Beobachtungen die Curve der mittlern Wahrscheinlichkeit. Nach den Gleichungen (13) ist die ganze von $x = a$ bis $x = b$ genommene, von dieser Curve eingeschlossene Fläche der Einheit gleich, und wenn man die Abscisse ihres Schwerpunktes mit x_1 bezeichnet, so hat man:

$$\frac{1}{s} \Sigma \int_a^b x f_n x\,dx = x_1.$$

Setzt man nun in dem Ausdrucke von k_n in §. 14. $X = x$, so folgt:

$$k_n = \int_a^b x f_n x\,dx,\ k = \frac{1}{s} \Sigma \int_a^b x f_n x\,dx = x_1,$$

und diese Abscisse x_1 ist folglich in allen Fällen die Grenze, welcher sich das mittlere Resultat aus einer Reihe von Beobachtungen ohne Ende nähert. Bezeichnet man mit λ_n den besondern Werth von A, welcher durch die $n$te Beobachtung gegeben wird, so ist $\frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$ das in Rede stehende mittlere Resultat, die Formel (19) gibt die Wahrscheinlichkeit p, dass sein Werth zwischen den Grenzen:

$$x_1 \pm \frac{2\gamma \sqrt{h}}{\sqrt{s}},$$

liegt, und wenn man in dem Ausdrucke für h in §. 14. auch $X = x$ setzt, so erhält man:

$$h = \frac{1}{2s} \Sigma \left[\int_a^b x^2 f_n x\, dx - \left(\int_a^b x f_n x\, dx \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Man kann dieses Resultat auf eine andere Form bringen, wenn man in der Gleichung (19):

$$u\sqrt{h} = v, \ \gamma\sqrt{h} = \delta$$

setzt, wodurch man:

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi h}} \int_0^\delta e^{-\frac{v^2}{h}} dv \qquad (21)$$

für die Wahrscheinlichkeit erhält, dass der Werth von $\frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$ zwischen den Grenzen:

$$x_1 \pm \frac{2\delta}{\sqrt{s}}$$

liegt. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit eines zwischenliegenden Werthes $x_1 + \frac{2v}{\sqrt{s}}$ ergibt sich aus der Formel (17), wenn man $\frac{v}{\sqrt{h}}$ für v setzt, und sie mit $\frac{dv}{\sqrt{h}}$ multiplicirt.

Man sieht, dass diese Wahrscheinlichkeit für einen gegebenen Werth von δ von zwei unbekannten Größen h und g abhängen würde, während die Wahrscheinlichkeit der vorhergehenden Grenzen, deren Kenntniss genügt, nur von der einen unbekannten Größe h abhängt, deren Werth wir nun noch nach den s Beobachtungsresultaten zu berechnen haben.

24. Zu dem Zwecke sei:

$$x = x_1 + z, \ f_n x = f'_n z, \ a = x_1 + a', \ b = x_1 + b',$$

so haben wir:

$$\int_{a'}^{b'} f'_n z\, dz = 1, \int_{a'}^{b'} z f'_n z\, dz = 0,$$

wodurch sich die Gleichung (20) in:

$$h = \frac{1}{2s} \Sigma \int_{a'}^{b'} z^2 f'_n z\, dz$$

verwandelt, und wenn wir:

$$X = (x - x_1)^2 = z^2$$

setzen, so ist die Größe k in §. 21. das Doppelte dieses Werthes von h.

Nach der Formel (17) ist die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit der Gleichung (18) von der Form:

$$\frac{du}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} + u U du,$$

wo U eine Function von u ist, welche für gleiche und entgegengesetzte Werthe von u denselben Werth mit demselben Zeichen und von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{\sqrt{s}}$ hat. Wenn man die Gleichung (18) auf den vorhergehenden Werth von X anwendet, und folglich $2h$ für k setzt, so ergibt sich daraus:

$$h = \frac{1}{2s} \Sigma(\lambda_n - x_1)^2 + u\sigma,$$

wo σ eine von u unabhängige Größe ist, die ebenfalls von der Kleinheitsordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ist. Werden dieselben Formeln (17) und (18) auf den Fall von $X = x$ angewandt, so geben sie:

$$x_1 = \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n + u' \sigma',$$

und für die Wahrscheinlichkeit dieser Gleichung:

$$\frac{du'}{\sqrt{\pi}} e^{-u'^2} + u' U' du',$$

wo σ' und U' Größen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{s}$ sind, und wovon die erste von u' unabhängig, aber die zweite eine Function von u' ist, welche weder das Zeichen, noch den Werth für gleiche und entgegengesetzte Werthe von u' ändert. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese beiden letzten Gleichungen gleichzeitig stattfinden, ist das Product ihrer resp. Wahrscheinlichkeiten, wie wenn diese beiden Gleichungen zwei von einander unabhängige Ereignisse wären; denn da die Wahrscheinlichkeit jeder derselben unendlich klein ist, so kann jede dieser Gleichungen die Wahrscheinlichkeit der andern nur um eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung ändern. Wenn man nun x_1 zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, der Kürze wegen:

$$\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n = m, \quad \frac{1}{s}\Sigma(\lambda_n - m)\sigma' = \lambda, \quad \frac{1}{2s}\Sigma(\lambda_n - m)^2 = \mu$$

setzt und das Quadrat von σ' vernachlässigt, so hat man:

$$h = \mu + u\sigma - u'\lambda,$$

und die Wahrscheinlichkeit dieses Werthes von h ist eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung, nämlich:

$$\left(\frac{1}{\pi} e^{-u^2} e^{-u'^2} + uu'U' + u'uU\right) du\,du',$$

indem auch das Product UU', welches nach der Voraussetzung eine Größe von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{s}$ ist, vernachlässigt wird.

Wenn wir diesen Werth von h in die Formel (21) substituiren, nach den Potenzen der Größe $u\sigma - u'\lambda$ entwickeln und das Quadrat derselben, welches von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{s}$ wäre, vernachlässigen; so erhalten wir:

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \int_0^\delta e^{-\frac{v^2}{\mu}} dv + p'(u\sigma - u'\lambda),$$

wo p' der Werth von $\frac{dp}{du}$ für $h = \mu$ ist.

Dieser Werth von p wäre die Wahrscheinlichkeit der Grenzen $x_1 \pm \frac{2\delta}{\sqrt{s}}$ des mittlern Resultates $\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n$, wenn der substituirte Werth von h gewiss wäre; aber da die verschiedenen Werthe von h nur wahrscheinlich sind, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Grenzen, welche jedem dieser Werthe entspricht, das Product aus dem entsprechenden Werthe von p und der Wahrscheinlichkeit des Werthes von h. Die Totalwahrscheinlichkeit derselben Grenzen, oder ihre, sich auf alle Werthe von h beziehende Wahrscheinlichkeit ist das auf alle Werthe von u und u', welche den Coefficienten von $du\,du'$ nicht unmerklich klein machen, erstreckte Integral dieses Productes. Wenn man also wieder die Größen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{s}$ vernachlässigt und bemerkt, daß die mit einer ungeraden Potenz von u oder u' multiplicirten Glieder bei den Integrationen verschwinden; so erhält man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{2}{\pi\sqrt{\pi\mu}}\int_0^\delta e^{-\frac{v^2}{\mu}}dv\int\int e^{-u^2}e^{-u'^2}du\,du',$$

und da man die Integrale in Beziehung auf u und u' ohne merklichen Fehler von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken kann, so reducirt sie sich auf:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi\mu}}\int_0^\delta e^{-\frac{v^2}{\mu}}dv,$$

welche keine andere ist, als die durch die Formel (21) ausgedrückte, wenn man darin $h=\mu$ setzt.

Bei dem Grade von Annäherung, wobei wir stehen geblieben sind, d. h. wenn die Größen von der Kleinheitsordnung des Bruches $\frac{1}{s}$ vernachlässigt werden, ist die Größe μ der Werth von h, welchen man in die Formel (21), oder vielmehr in die Grenzen des mittlern Resultates $\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n$, welchem die Formel (19) entspricht, substituiren muss.

Dieser Werth von h lässt sich auf die beiden folgenden Formen bringen:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2s}\Sigma(\lambda_n-m)^2, \\ h &= \frac{1}{2s^2}\Sigma\left[s\,\Sigma\lambda_n^2-(\Sigma\lambda_n)^2\right] \end{aligned}\right\}, \qquad (22)$$

welche gleichbedeutend sind, wenn man bemerkt, dass $\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n=m$ gesetzt ist. Die numerische Berechnung des ersten Ausdruckes nach den Abweichungen der Beobachtungen zu beiden Seiten des mittlern Werthes, d. h. nach den Werthen von λ_n-m, ist immer leicht, während die Berechnung des zweiten Ausdruckes im Allgemeinen weit weniger bequem und oft ganz unausführbar ist.

Die Formel (21) und den durch Beobachtungsdata ausgedrückten Werth von h verdankt man Laplace, welcher viele interessante Anwendungen davon gemacht hat. Lagrange ist der erste, welcher die Wahrscheinlichkeit des arithmetischen Mittels aus Beobachtungsresultaten der Rechnung unterworfen hat; *) allein er hatte das Wahrscheinlich=

---

*) Tome V. des anciens Mémoires de Turin.

keitsgesetz der Werthe der Unbekannten als bekannt angenommen, und Laplace ist es, welcher zuerst die Wahrscheinlichkeit des mittlern Resultates bei einer großen Anzahl von Beobachtungen von diesem Gesetze unabhängig gemacht hat. Die vorhergehende Analyse ist, wie es uns scheint, geeignet, die Zweifel zu beseitigen, welche über die Anwendung des Werthes von h und über den Grad der Genauigkeit der Formel (21) noch stattfinden könnten. *)

25. Die Größe x_1, gegen welche das mittlere Resultat der Beobachtungen convergirt, wenn ihre Anzahl immer größer und größer wird, ist nicht nothwendig einer der Werthe von A, welche die größte Wahrscheinlichkeit haben, und durch die einzelnen Beobachtungen am häufigsten gegeben werden; es kann sogar geschehen, dass ihre Wahrscheinlichkeit völlig Null ist, so dass dieser Werth von A durch keine specielle Beobachtung gegeben werden kann. Dieses findet z. B. statt, wenn alle die Functionen $f_n x$ für denselben Werth von x verschwinden und diesseits und jenseits dieses Werthes symmetrisch sind. In dem betrachteten allgemeinen Falle, d. h. in dem Falle, wo die Wahrscheinlichkeitscurve, deren Gleichung $y = f_n x$ ist, sich von einer Beobachtung zur andern ändert, kann es auch geschehen, dass die Schwerpunkte der Flächen aller dieser Curven nicht auf derselben Ordinate liegen. Alsdann ändert sich die Abscisse x_1 mit der Anzahl s der Beobachtungen, und wenn man s in zwei Theile s' und s_1 theilt, welche noch sehr große Zahlen sind, so sind die mittlern Resultate dieser beiden einzelnen Reihen von s' und s_1 Beobachtungen nicht mehr dieselben, obgleich der in jeder Reihe zu befürchtende Fehler sehr klein ist und beide eine sehr große Wahrscheinlichkeit haben.

Die Berechnung der fernern mittlern Lebensdauer ist eine der sinnreichsten Anwendungen, welche man von den vorhergehenden Formeln gemacht hat. Gesetzt, man betrachtete eine sehr große Anzahl s, z. B. eine Million, zu derselben Zeit geborner Kinder, so ist, wenn x irgend eine Zeit und $f_n x$ die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, dass eins dieser Kinder die Zeit x überlebt, bezeichnet, und wenn man die Lebensdauer als einen eventuellen Gewinn betrachtet, die Summe aller möglichen Werthe von x, jeden mit seiner resp. Wahrscheinlichkeit multiplicirt, oder $\int x f_n x \, dx$ der Gewinn, oder die Lebenshoffnung dieses Kindes. Die mittlere Lebensdauer ist also der Quotient aus der Summe dieser sich auf alle Kinder beziehenden Integrale

*) Premier Supplément à la Théorie analytique des probabilités.

und ihrer Anzahl s, oder $= \frac{1}{s} \Sigma \int x f_n x \, dx$, indem jedes Integral von $x = 0$ bis zu einem Werthe von x erstreckt wird, welcher $f_n x$ verschwinden oder unmerklich klein macht, und welchen man als die Grenze des menschlichen Lebens betrachten kann. Diese Größe haben wir aber vorhin mit x_1 bezeichnet, und ihr Näherungswerth ist folglich $= \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$, indem für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Alter genommen werden, in welchen s andere Individuen gestorben sind, die in demselben Lande, als die betrachteten Kinder und zu einer der Geburt dieser so nahe als möglich liegenden Zeit geboren sind. Dieselben Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ dienen auch zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz $x_1 - \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$ oder der Fehler von $x_1 = \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$ zwischen gegebenen Grenzen liegt. Die unbekannte Function $f_n x$ ist für die verschiedenen, zu derselben Zeit und in demselben Lande geborenen Kinder sehr verschieden, aber die mittlere Function $\frac{1}{s} \Sigma f_n x$, und folglich die mittlere Lebensdauer $\frac{1}{s} \Sigma \int x f_n x \, dx$ ändert sich ohne Zweifel nur sehr langsam mit der Erlöschung von Krankheiten und der Verbesserung der socialen Verhältnisse. Die Erfahrung allein kann uns lehren, ob diese mittlere Lebensdauer stationär ist, oder sich in großen Zwischenzeiten merklich ändert.

Nach denselben Prinzipien berechnet man den mittlern Gewinn und seine Wahrscheinlichkeit, welche man in einer sehr großen Anzahl von Spekulationen nach den bekannten Verlusten und Gewinnen einer andern sehr großen Anzahl ähnlicher Spekulationen, d. h. deren mittlere Wahrscheinlichkeit als dieselbe betrachtet wird, erwarten kann.

26. Wenn man durch eine Reihe von Beobachtungen irgend eine Größe A bestimmen will, so setzt man dabei stillschweigend voraus, dass es unter allen Werthen, welche die Größe A, a priori haben kann, einen von solcher Beschaffenheit gibt, dass es eben so wahrscheinlich ist, denselben bei jeder Beobachtung zu klein als zu groß zu finden, und man nimmt ferner an, dass dieser unbekannte Werth für alle Beobachtungen derselbe ist, und gerade dieser Werth von A ist es, welchen man wissen will, d. h. dass alle Curven, welche sich aus der Gleichung $y = f_n x$ ergeben, zu beiden Seiten eines ihrer Punkte symmetrisch sind, und dass dieser Punkt für diese verschiedenen Curven derselben Abscisse entspricht, welche den unbekannten Werth von A darstellt. In dieser Voraussetzung liegen die Schwerpunkte der Flächen dieser Curven und

der der Fläche der mittlern Curve, deren Gleichung $y = \frac{1}{s} \Sigma f_n x$ ist, auf derselben gemeinschaftlichen Ordinate, deren Abscisse denselben Werth ausdrückt. Wenn man die Beobachtungen vervielfältigt, so ist die Größe x_1, welcher sich die erhaltenen Werthe ohne Ende nähern, constant, oder von der Anzahl s der Beobachtungen unabhängig, und man hat die durch die Formel (19) ausgedrückte Wahrscheinlichkeit, dass das mittlere Resultat $\frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$ sich von x_1, oder von dem wahren Werthe von A nicht um eine größere oder kleinere Größe, als $\frac{2\gamma\sqrt{h}}{\sqrt{s}}$ entfernt. Der Werth von h wird, wie man weiter oben gesehen hat, auch durch die Beobachtungen gegeben, und ist von dem Grade ihrer Genauigkeit abhängig, so dass, wenn es sich z. B. um die Messung eines Winkels handelt, diese Größe h für zwei mit verschiedenen Instrumenten oder von verschiedenen Beobachtern angestellten Versuchsreihen sehr verschieden sein kann. Wenn es sich um die Größe eines Phänomenes, wie z. B. um den Unterschied der Barometerhöhen zu zwei verschiedenen Zeiten des Tages, handelt, so ist h auch von zufälligen und veränderlichen Ursachen abhängig, welche auf diese Barometerhöhen einen ungleichen Einfluss haben, und welche man dem Zustande der Atmosphäre zuschreiben kann.

Wie klein aber die Grenze $\frac{2\gamma\sqrt{h}}{\sqrt{s}}$ des zu befürchtenden Fehlers auch sein mag, wenn man $\frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$ für den Werth von A nimmt, und welche Wahrscheinlichkeit sie auch haben mag, so darf man dabei doch nicht aus den Augen verlieren, dass dieser Werth der Bedingung der Symmetrie aller Functionen $f_n x$ zu beiden Seiten desselben Werthes von x subordinirt ist. Wenn durch irgend eine unbekannte Ursache, wie die Fehler der Instrumente, oder die veränderlichen Umstände, welche auf die fraglichen Erscheinungen Einfluss haben, die Fehler in dem einen oder dem andern Sinne das Uebergewicht bekommen, oder vielmehr, wenn sich die Größe von A während der Dauer der Beobachtungen ändert; so findet die in Rede stehende Voraussetzung nicht statt. Die Größe $\frac{1}{s} \Sigma \lambda_n$ ist immer der Näherungswerth der Abscisse x_1; aber x_1 drückt nicht mehr die Größe aus, welche man bestimmen wollte, und die Beobachtungen sind unbrauchbar. Es wäre also von Wichtigkeit, wenn man aus den Beobachtungen selbst erkennen könnte,

ob sie mit der Voraussetzung der Symmetrie von $f_n x$ verträglich sind, und in der That gibt es Bedingungen, welchen die Beobachtungen genügen müssen, wenn diese Hypothese auf die Wahrscheinlichkeitsgesetze der Werthe von A anwendbar ist.

27. Solche Bedingungen erhält man, wenn man für die Function X eine ungerade Potenz von $x - x_1$ nimmt, d. h. wenn man, indem i eine ungerade positive Zahl bezeichnet,

$$X = (x - x_1)^i$$

setzt. Nach den Bezeichnungen in §. 24. sind die Größen k_n, k'_n in §. 21:

$$k_n = \int_{a'}^{b'} z^i f'_n z \, dz, \; k'_n = \int_{a'}^{b'} z^{2i} f'_n z \, dz.$$

In der Voraussetzung, daß alle die Functionen $f_n x$ zu beiden Seiten desselben Werthes von x symmetrisch sind, ist dieser Werth $= x_1$, und man hat:

$$f'_n z = f'_n(-z), \; a' = b',$$

wodurch der Werth von $k_n = 0$ gemacht wird, und die Größen k, h in §. 21. sind alsdann:

$$k = 0, \; h = \frac{1}{s} \Sigma \int_0^{b'} z^{2i} f'_n z \, dz.$$

Nach §. 22 wird also durch die Formel (19) die Wahrscheinlichkeit p ausgedrückt, daß der absolute Werth von $\Sigma(\lambda_n - x_1)^i$ kleiner ist, als $2\gamma\sqrt{hs}$. Diese Wahrscheinlichkeit ist z. B. $= \frac{1}{2}$, wenn man $\gamma = 0{,}47614$ nimmt. Aber wenn die Anzahl s der Beobachtungen sehr groß ist, so ist es sehr wahrscheinlich, daß das mittlere Beobachtungsresultat $\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n$ sehr wenig von x_1 verschieden, und daß zu gleicher Zeit die Summe $\Sigma(\lambda_n - x_1)^{2i}$ sehr nahe der Werth von $\Sigma\int_{-b'}^{b'} z^{2i} f' z \, dz$ oder von $2hs$ ist. Wenn man also der Kürze wegen:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\lambda_n = m, \; \frac{\Sigma(\lambda_n - m)^i}{\sqrt{\Sigma(\lambda_n - m)^{2i}}} = r$$

setzt, so hat man eine sehr wenig von p verschiedene Wahrscheinlichkeit, daß dieses Verhältniß r kleiner, als $\gamma\sqrt{2}$ ist, und wenn man

für γ den Werth nimmt, welcher $p = \frac{1}{2}$ gibt, so kann man fast 1 gegen 1 wetten, daſſ

$$r < (0{,}47614)\sqrt{2} \text{ oder } r < 0{,}67336$$

ist, wenn die Voraussetzung $f'_n z = f'_n(-z)$ wirklich stattfindet. Wenn man also das Verhältniſſ r für einen bestimmten Exponenten berechnet, und man findet seinen Werth größer als 0,67336 oder etwas kleiner als diesen Bruch, so ist dieses schon eine genügende Anzeige, daſſ die Hypothese $f'_n z = f'_n(-z)$ nicht wahrscheinlich ist, und daſſ folglich die Beobachtungen nicht zur Bestimmung des gesuchten wahren Werthes von A geeignet sind.

28. In sehr vielen Fällen, und besonders in der Astronomie, ist die Größe, welche man durch die Beobachtungen bestimmen will, eine gegebene Function mehrerer Elemente, welche schon näherungsweise bekannt sind, und woran blos noch sehr kleine Correctionen vorgenommen werden sollen, deren Producte und höhern Potenzen, als die erste vernachlässigt werden. Die gegebene Function wird alsdann eine lineare Function dieser unbekannten Correctionen, welche man successive allen durch Beobachtung erhaltenen Resultaten gleichsetzt, wodurch man ebensoviele Bedingungsgleichungen erhält, als man Beobachtungen hat. Die Anwendung dieser linearen Gleichungen zur Bestimmung der Correctionen der Elemente nach einer großen Anzahl von Beobachtungen hat sehr viel zur Vervollkommnung der astronomischen Tafeln beigetragen. Es scheint, daſſ Euler und T. Mayer die ersten gewesen sind, welche sie angewandt haben, der erste in seiner Abhandlung über die Libration des Mondes und der andere in seiner Schrift über die Perturbationen des Jupiters und Saturns, welche 1750 von der Pariser Akademie gekrönt wurde. Da aber die Anzahl dieser linearen Gleichungen immer größer ist, als die der zu bestimmenden Unbekannten, so fand bei ihrer Auflösung immer die Unannehmlichkeit statt, daſſ man aus demselben Systeme von Gleichungen verschiedene Resultate ableiten konnte, wenn man verschiedene Rechnungsmethoden anwandte, und diese Unannehmlichkeit fand bis zu der Zeit statt, wo Legendre eine directe und einförmige Methode in Vorschlag brachte, welche allgemein unter dem ihr von ihrem Erfinder gegebenen Namen der Methode der kleinsten Quadrate angenommen wurde.*) Sie besteht bekanntlich darin, daſſ man von dem Resultate jeder Beobachtung die lineare Function abzieht, welche einen Näherungswerth liefert, der Un-

*) Es ist jetzt allgemein bekannt, daſſ Gauß diese Methode weit früher als Legendre entdeckt und angewandt hat.

terschied ist der Beobachtungsfehler, dass man die Summe der Quadrate aller dieser Unterschiede bildet und dann ihre successive in Beziehung auf die Correctionen aller Elemente genommenen Differenziale $= 0$ setzt, wodurch man ebenso viele Gleichungen erhält, als man unbekannte Größen zu bestimmen hat. Diese Methode, wenn sie auch nur den Vortheil der Gleichförmigkeit und Bestimmtheit gewährte, würde den Beobachtungswissenschaften schon einen sehr wichtigen Dienst leisten; allein sie ist auch zugleich die Methode, welche an dem Werthe jedes Elementes den kleinsten Fehler befürchten lässt, wie Laplace durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung gezeigt hat. Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass, wenn man, nachdem man die Correctionen der Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, und ihre Werthe in die linearen Ausdrücke der Beobachtungsfehler substituirt hat, die Summe der ungeraden Potenzen aller dieser Fehler bildet und sie durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer doppelten Potenzen dividirt, die Größe des Quotienten ein Kriterium an die Hand gibt, wornach man die Beobachtungsresultate verwerfen, oder beibehalten muss, wenn sie übrigens eine hinreichende Wahrscheinlichkeit haben. Denn es würde sich ergeben, dass es sehr wahrscheinlich ist, dass dieser Quotient ein wenig beträchtlicher Bruch sein muss, und durch eine ziemlich complicirte Rechnung könnte man für eine beliebige Anzahl corrigirter Elemente den genauen Werth dieses Bruches für einen bestimmten Grad von Wahrscheinlichkeit bestimmen.

Anhang IV.

Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturphilosophie.

Die Naturerscheinungen sind größtentheils von so viel fremdartigen Umständen umhüllt, und eine so große Anzahl perturbirender Ursachen mischen ihren Einfluss mit ein, dass es sehr schwer wird, jene Erscheinungen in ihrer Reinheit zu erkennen. Man kann diesen Zweck nur dadurch erreichen, dass man die Beobachtungen oder Versuche vervielfältigt, damit sich die fremdartigen Einflüsse gegenseitig aufheben und durch die mittlern Resultate diese Erscheinungen und ihre verschiedenen Elemente hervortreten. Je größer die Anzahl der Beobachtungen ist, und je weniger sie sich von einander entfernen, desto mehr nähern sich ihre Resultate der Wahrheit. Diese letzte Bedingung wird durch die Wahl der Methoden, durch die Genauigkeit der Instrumente, und durch die Sorgfalt, mit welcher man beobachtet, erfüllt. Hierauf bestimmt man durch die Theorie der Wahrscheinlichkeiten die vortheilhaftesten mittlern Resultate oder die, bei welchen der Fehler am kleinsten ist. Aber dieses genügt noch nicht, sondern man muss auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen können, dass die Fehler dieser Resultate zwischen gegebenen Grenzen liegen; denn ohne dieses würde man von dem erreichten Grade der Genauigkeit nur eine unvollständige Kenntniss erlangt haben. Die Formeln, vermittelst welcher man diesen Zweck erreichen kann, sind folglich eine wahre Vervollkommnung der Methode der Wissenschaften, und es ist daher von hoher Wichtigkeit, sie kennen zu lernen. Die zu ihrer Ableitung erforderliche Analyse ist die feinste und schwierigste der Theorie der Wahrscheinlichkeiten, und die erhaltenen Formeln haben den merkwürdigen Vortheil, dass sie von dem Wahrscheinlichkeitsgesetze der Fehler unabhängig sind und nur Größen enthalten, welche durch die Beobachtungen selbst gegeben werden, oder der Ausdruck derselben sind.

Jede Beobachtung wird durch eine Function der Elemente, welche man bestimmen will, analytisch ausgedrückt, und wenn diese Elemente

schon näherungsweise bekannt sind, so wird diese Function eine lineare Function ihrer Correctionen. Wenn man sie der Beobachtung selbst gleich setzt, so bildet man eine sogenannte Bedingungsgleichung, und wenn man eine große Anzahl solcher Gleichungen hat, so verbindet man sie so mit einander, dass man ebenso viele Endgleichungen erhält, als es Elemente gibt, deren Correctionen man alsdann durch die Auflösung dieser Gleichungen bestimmt. Aber welches ist die vortheilhafteste Verbindungsart dieser Gleichungen, um die Endgleichungen zu erhalten? Welches ist das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler, womit die daraus abgeleiteten Elemente noch behaftet sein können? Dieses lehrt die Theorie der Wahrscheinlichkeiten. Die Bildung einer Endgleichung vermittelst der Bedingungsgleichungen läuft darauf hinaus, dass man jede der letztern durch einen unbestimmten Factor multiplicirt und die Producte zusammenaddirt; aber man muss das Factorensystem wählen, bei welchem der zu befürchtende Fehler am kleinsten wird. Nun ist aber einleuchtend, dass, wenn man die positiven Fehler eines Elementes durch ihre resp. Wahrscheinlichkeiten multiplicirt, das vortheilhafteste System das ist, worin die Summe dieser sämmtlich positiv genommenen Producte ein Minimum ist. Denn ein positiver oder negativer Fehler muss als ein Verlust betrachtet werden. Bildet man also diese Summe von Producten, so wird durch die Bedingung des Minimums das System der zu wählenden Factoren bestimmt. Auf diese Weise findet man, dass dieses System das der Coefficienten der Elemente in jeder Bedingungsgleichung ist, so dass man eine erste Endgleichung bildet, wenn man jede Bedingungsgleichung resp. durch ihren Coefficienten des ersten Elementes multiplicirt, und alle so gebildeten Producte zusammenaddirt. Eine zweite Endgleichung wird gebildet, wenn man ebenso den Coefficienten des zweiten Elementes anwendet, u. s. f. Auf diese Weise entwickeln sich die Elemente und Gesetze der in einer großen Anzahl von Beobachtungen enthaltenen Erscheinungen mit der größten Evidenz, und man kann den Ausdruck des bei jedem Elemente zu befürchtenden mittlern Fehlers bestimmen. Dieser Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit der Fehler, womit das Element noch behaftet sein kann, und welche der Zahl proportional ist, deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit ist, zu einer Potenz erhoben, welche den Quotienten aus dem negativ genommenen Quadrate des Fehlers und dem Producte des Quadrates dieses doppelten Ausdruckes und dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser zum Exponenten hat. Der Coefficient des negativen Quadrates des Fehlers in diesem Exponenten kann also als ein Modulus der Wahrscheinlichkeit der Fehler betrachtet werden, weil, wenn der Fehler derselbe bleibt, die Wahrscheinlichkeit schnell abnimmt, wenn

dieser Coefficient zunimmt, so dass das erhaltene Resultat, wenn man so sagen darf, desto mehr gegen die Wahrheit **wiegt**, je größer dieser Modulus ist, welchen wir daher das **Gewicht** des Resultates nennen. Vermöge einer merkwürdigen Analogie dieser Gewichte mit denen der Körper in Vergleich zu ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte geschieht es, dass, wenn dasselbe Element durch verschiedene Systeme, jedes von einer großen Anzahl von Beobachtungen, gegeben wird, das sich aus allen ergebende vortheilhafteste mittlere Resultat durch den Quotienten aus der Summe der Producte jedes Partialresultates mit seinem Gewichte und der Summe aller Gewichte ausgedrückt wird. Ferner ist das Totalgewicht der verschiedenen Systeme die Summe ihrer Partialgewichte, so dass die Wahrscheinlichkeit des sich aus der Gesammtheit der Beobachtungen ergebenden mittlern Resultates der Zahl proportional ist, welche die Einheit zum hyperbolischen Logarithmus hat, diese Zahl zu einer Potenz erhoben, deren Exponent dem Producte aus dem negativ genommenen Quadrate des Fehlers und der Summe aller Gewichte gleich ist. Jedes Gewicht hängt zwar von dem Wahrscheinlichkeitsgesetze der Fehler in jedem Systeme ab, und dieses Gesetz ist fast immer unbekannt; allein wir haben den Factor, welcher es enthält, vermittelst der Summe der Quadrate der Abweichungen der Beobachtungen des Systemes von ihrem mittlern Resultate eliminirt. Es wäre also zur Vervollständigung unserer Kenntnisse über die durch eine große Anzahl von Beobachtungen erhaltenen Resultate zu wünschen, dass man neben jedes Resultat auch das ihm entsprechende Gewicht setzte. Zur Erleichterung der Berechnung dieses Gewichtes entwickeln wir seinen analytischen Ausdruck, wenn nur drei Elemente zu bestimmen sind; aber da dieser Ausdruck immer complicirter wird, je größer die Anzahl der Elemente wird, so geben wir ein sehr einfaches Mittel zur Bestimmung des Gewichtes eines Resultates für eine beliebige Anzahl von Elementen.

Wenn man auf diese Weise die Exponentialgröße erhalten hat, welche das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler ausdrückt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des Resultates zwischen gegebenen Grenzen liegt, wenn man von dem Producte aus dieser Exponentialgröße und dem Differenziale des Fehlers das Integral innerhalb dieser Grenzen nimmt, und mit dem Quotienten aus der Quadratwurzel des Gewichtes des Resultates und aus dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser multiplicirt. Hieraus folgt, dass bei derselben Wahrscheinlichkeit die Fehler der Resultate sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus ihren Gewichten verhalten, welches zur Vergleichung ihrer resp. Genauigkeit dienen kann.

Um diese Methode mit Erfolg anwenden zu können, müssen die Umstände der Beobachtungen oder Versuche so abgeändert werden, dass man constante Fehler vermeidet. Auch muss die Anzahl der Beobachtungen sehr groß und zwar desto größer sein, je mehr Elemente man zu bestimmen hat; denn das Gewicht des mittlern Resultates nimmt zu wie der Quotient aus der Anzahl der Beobachtungen und der Anzahl der Elemente. Ferner müssen die Elemente bei diesen Beobachtungen einen verschiedenen Gang befolgen; denn wenn zwei Elemente genau denselben Gang befolgten, so würden ihre Coefficienten in den Bedingungsgleichungen einander proportional sein, diese Elemente bildeten nur noch eine einzige unbekannte Größe und es würde unmöglich sein, sie durch diese Beobachtungen zu unterscheiden. Endlich müssen die Beobachtungen möglichst genau sein; denn durch diese erste aller Bedingungen wird das Gewicht des Resultates, dessen Ausdruck die Summe der Quadrate ihrer Abweichungen von diesem Resultate zum Divisor hat, bedeutend vergrößert. Bei Anwendung dieser Vorsichtsmaßregeln kann man von der vorhergehenden Methode Gebrauch machen und den Grad des Zutrauens bestimmen, welchen die aus einer großen Anzahl von Beobachtungen abgeleiteten Resultate verdienen. (Laplace.)

Kerseboomsche Sterblichkeitstafel.

Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer.	Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer.
0	1000	196	34,975	48	378	8	21,07
1	804	36	42,26	49	370	8	20,51
2	768	32	43,18	50	362	8	19,94
3	736	27	44,01	51	354	9	19,36
4	709	21	44,67	52	345	9	18,85
5	688	12	45,	53	336	9	18,32
6	676	12	44,78	54	327	8	17,80
7	664	11	44,57	55	319	9	17,22
8	653	7	44,31	56	310	9	16,69
9	646	7	43,77	57	301	10	16,15
10	639	6	43,24	58	291	9	15,69
11	633	6	42,65	59	283	9	15,16
12	627	6	42,05	60	272	9	14,62
13	621	5	41,43	61	264	10	14,08
14	616	5	40,77	62	254	9	13,60
15	611	5	40,10	63	245	10	13,06
16	606	5	39,42	64	235	10	12,57
17	601	5	38,74	65	225	10	12,09
18	596	6	38,06	66	215	10	11,61
19	590	6	37,41	67	205	10	11,12
20	584	7	36,80	68	195	10	10,64
21	577	6	36,23	69	185	10	10,16
22	571	6	35,60	70	175	10	9,69
23	565	6	34,97	71	165	10	9,21
24	559	7	34,34	72	155	10	8,74
25	552	8	33,76	73	145	10	8,28
26	544	9	33,24	74	135	10	7,82
27	535	10	32,77	75	125	11	7,36
28	525	9	32,38	76	114	10	6,97
29	516	9	31,93	77	104	11	6,55
30	507	8	31,49	78	93	11	6,20
31	499	9	30,97	79	82	10	5,90
32	490	8	30,53	80	72	9	5,58
33	482	7	30,02	81	63	9	5,24
34	475	7	29,45	82	54	8	4,94
35	468	7	28,87	83	46	7	4,63
36	461	7	28,29	84	39	7	4,28
37	454	8	27,71	85	32	6	4,00
38	446	7	27,18	86	26	6	3,69
39	439	7	26,61	87	20	5	3,50
40	432	6	26,02	88	15	4	3,33
41	426	6	25,37	89	11	3	3,18
42	420	7	24,73	90	8	2	3,00
43	413	7	24,13	91	6	2	2,67
44	406	6	23,53	92	4	1	2,50
45	400	7	22,86	93	3	1	2,00
46	393	7	22,25	94	2	1	1,50
47	386	8	21,65	95	1	1	1,00

Süßmilch'sche Sterblichkeitstafel.

Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer	Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer.
0	1000	250	28,99	48	316	8	18,54
1	750	89	37,22	49	308	8	17,99
2	661	43	41,21	50	300	9	17,45
3	618	25	43,	51	291	9	16,96
4	593	14	43,78	52	282	9	16,46
5	579	12	43,81	53	273	9	15,98
6	567	11	43,72	54	264	9	15,48
7	556	9	43,56	55	255	9	15,00
8	547	8	43,26	56	246	9	14,51
9	539	7	42,89	57	237	9	14,02
10	532	5	42,44	58	228	9	13,54
11	527	4	41,83	59	219	9	13,05
12	523	4	41,15	60	210	9	12,57
13	519	4	40,46	61	201	9	12,08
14	515	4	39,76	62	192	10	11,60
15	511	4	39,06	63	182	10	11,19
16	507	4	38,36	64	172	10	10,78
17	503	4	37,66	65	162	10	10,38
18	499	4	36,96	66	152	10	10,00
19	495	4	36,25	67	142	10	9,63
20	491	5	35,53	68	132	10	9,29
21	486	5	34,89	69	122	10	8,97
22	481	5	34,24	70	112	9	8,68
23	476	5	33,59	71	103	9	8,35
24	471	5	32,94	72	94	9	8,05
25	466	5	32,28	73	85	8	7,80
26	461	5	31,62	74	77	8	7,51
27	456	6	30,95	75	69	7	7,26
28	451	6	30,29	76	62	7	6,97
29	445	6	29,68	77	55	6	6,73
30	439	6	29,07	78	49	6	6,43
31	433	6	28,46	79	43	6	6,19
32	427	6	27,85	80	37	5	6,03
33	421	6	27,23	81	32	4	5,81
34	415	6	26,61	82	28	4	5,50
35	409	7	25,99	83	24	4	5,25
36	402	7	25,42	84	20	3	5,10
37	395	7	24,85	85	17	3	4,82
38	388	7	24,28	86	14	2	4,64
39	381	7	23,71	87	12	2	4,25
40	374	7	23,14	88	10	2	3,90
41	367	7	22,56	89	8	2	3,62
42	360	7	21,98	90	6	1	3,50
43	353	7	21,39	91	5	1	3,00
44	346	7	20,81	92	4	1	2,50
45	339	7	20,22	93	3	1	2,00
46	332	8	19,62	94	2	1	1,50
47	324	8	19,08	91	1	1	

Sterblichkeitstafel

nach den Erfahrungen über Frauen der preuß. allgemeinen Wittwen-Verpflegungsanstalt.

Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer	Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer
15	10809	181	40,65	58	5865	157	14,50
16	10628	171	40,33	59	5708	165	13,88
17	10457	161	39,98	60	5543	173	13,28
18	10296	152	39,60	61	5370	181	12,69
19	10144	144	39,19	62	5189	189	12,12
20	10000	137	38,75	63	5000	197	11,56
21	9863	131	38,28	64	4803	205	11,01
22	9732	125	37,78	65	4598	213	10,48
23	9607	119	37,77	66	4385	222	9,97
24	9488	114	36,73	67	4163	231	9,47
25	9374	110	36,17	68	3932	238	9,00
26	9264	106	35,60	69	3694	242	8,55
27	9158	103	35,00	70	3452	244	8,11
28	9055	101	34,39	71	3208	245	7,69
29	8954	100	33,78	72	2963	246	7,28
30	8854	100	33,15	73	2717	246	6,89
31	8754	100	32,53	74	2471	245	6,53
32	8654	100	31,90	75	2226	242	6,20
33	8554	100	31,26	76	1984	236	5,89
34	8454	99	30,63	77	1748	224	5,62
35	8355	99	29,98	78	1524	206	5,37
36	8256	98	29,33	79	1318	184	5,13
37	8158	98	28,68	80	1134	162	4,88
38	8060	98	28,02	81	972	145	4,61
39	7962	97	27,37	82	827	134	4,34
40	7865	97	26,70	83	693	126	4,08
41	7768	97	26,02	84	567	114	3,87
42	7671	98	25,35	85	453	97	3,72
43	7573	98	24,67	86	356	79	3,60
44	7475	98	23,99	87	277	62	3,49
45	7377	99	23,30	88	215	49	3,35
46	7278	100	22,61	89	166	39	3,19
47	7178	101	21,91	90	127	31	3,01
48	7077	103	21,22	91	96	24	2,82
49	6974	105	20,52	92	72	19	2,60
50	6869	107	19,83	93	53	15	2,35
51	6762	110	19,14	94	38	12	2,08
52	6652	115	18,45	95	26	9	1,81
53	6537	121	17,76	96	17	7	1,50
54	6416	127	17,09	97	10	5	1,20
55	6389	134	16,42	98	5	3	0,90
56	6155	141	15,77	99	2	2	0,50
75	6014	149	15,13				

Carlisle'sche Sterblichkeitstafel.

Alter.	Lebende.	Sterbende.	Alter	Lebende.	Sterbende.	Alter.	Lebende.	Sterbende.
0	10000	533	32 Jahr	5528	56	69 Jahr	2525	124
1 Mnt.	9467	154	33	5472	55	70	2401	124
2 =	9313	87	34	5417	55	71	2277	134
3 =	9226	256	35	5362	55	72	2143	146
6 =	8970	255	36	5307	56	73	1997	156
9 =	8715	254	37	5251	57	74	1841	166
1 Jahr	8461	682	38	5194	58	75	1675	160
2	7779	505	39	5136	61	76	1515	156
3	7274	276	40	5075	66	77	1359	146
4	6998	201	41	5009	69	78	1213	132
5	6797	121	42	4940	71	79	1081	128
6	6676	82	43	4869	71	80	953	116
7	6594	58	44	4798	71	81	837	112
8	6536	43	45	4727	70	82	725	102
9	6493	33	46	4657	69	83	623	94
10	6460	29	47	4588	67	84	529	84
11	6431	31	48	4521	63	85	445	78
12	6400	32	49	4458	61	86	367	71
13	6368	33	50	4397	59	87	296	64
14	6335	35	51	4338	62	88	232	51
15	6300	39	52	4276	65	89	181	39
16	6261	42	53	4211	68	90	142	37
17	6219	43	54	4143	70	91	105	30
18	6179	43	55	4073	73	92	75	21
19	6133	43	56	4000	76	93	54	14
20	6090	43	57	3924	82	94	40	10
21	6047	42	58	3842	93	95	30	7
22	6005	42	59	3749	106	96	23	5
23	5963	42	60	3643	122	97	18	4
24	5921	42	61	3521	126	98	14	3
25	5879	43	62	3395	127	99	11	2
26	5836	43	63	3268	125	100	9	2
27	5793	45	64	3143	125	101	7	2
28	5748	50	65	3018	124	102	5	2
29	5698	56	66	2894	123	103	3	2
30	5642	57	67	2771	123	104	1	1
31	5585	57	68	2648	123			

Alter.	Mittlere Dauer.	Alter.	Mittlere Dauer.	Alter.	Mittlere Dauer.
0	38,72	35	31,00	70	9,18
1	44,68	36	30,32	71	8,65
2	47,55	37	29,64	72	8,16
3	49,82	38	28,96	73	7,72
4	50,76	39	28,28	74	7,33
5	51,25	40	27,61	75	7,01
6	51,17	41	26,97	76	6,69
7	50,80	42	26,34	77	6,40
8	50,24	43	25,71	78	6,12
9	49,57	44	25,09	79	5,80
10	48,82	45	24,46	80	5,51
11	48,04	46	23,82	81	5,21
12	47,27	47	23,17	82	4,93
13	46,51	48	22,50	83	4,65
14	45,75	49	21,81	84	4,39
15	45,00	50	21,11	85	4,12
16	44,27	51	20,39	86	3,90
17	43,57	52	19,68	87	3,71
18	42,87	53	18,97	88	3,59
19	42,17	54	18,28	89	3,47
20	41,46	55	17,58	90	3,28
21	40,75	56	16,89	91	3,26
22	40,04	57	16,21	92	3,37
23	39,31	58	15,55	93	3,48
24	38,59	59	14,92	94	3,53
25	37,86	60	14,34	95	3,53
26	37,14	61	13,82	96	3,46
27	36,41	62	13,31	97	3,28
28	35,69	63	12,81	98	3,07
29	35,00	64	12,30	99	2,77
30	34,34	65	11,79	100	2,28
31	33,68	66	11,27	101	1,79
32	33,03	67	10,75	102	1,30
33	32,36	68	10,23	103	0,83
34	31,68	69	9,70		

Sterblichkeitstafel nach der Moser'schen Formel.

Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer.	Alter.	Lebende.	Sterbende.	Mittlere Dauer.
0	1,0000	0,2000	35,59	43	0,4404	0,0061	24,45
1	0,8000	0,0378	43,43	44	0,4343	0,0063	23,78
2	0,7622	0,0255	44,57	45	0,4280	0,0065	23,13
3	0,7367	0,0197	45,09	46	0,4215	0,0065	22,49
4	0,7170	0,0164	45,31	47	0,4150	0,0065	21,84
5	0,7006	0,0140	45,37	48	0,4085	0,0069	21,14
6	0,6866	0,0125	45,28	49	0,4016	0,0069	20,49
7	0,6741	0,0113	45,10	50	0,3947	0,0071	19,86
8	0,6628	0,0102	44,87	51	0,3876	0,0072	19,24
9	0,6526	0,0096	44,58	52	0,3804	0,0074	18,61
10	0,6430	0,0088	44,23	53	0,3730	0,0076	17,97
11	0,6342	0,0083	43,83	54	0,3654	0,0079	17,30
12	0,6259	0,0079	43,41	55	0,3575	0,0080	16,64
13	0,6180	0,0077	42,95	56	0,3495	0,0081	16,03
14	0,6103	0,0073	42,49	57	0,3414	0,0085	15,38
15	0,6030	0,0069	42,01	58	0,3329	0,0087	14,78
16	0,5961	0,0066	41,49	59	0,3242	0,0088	14,16
17	0,5895	0,0065	40,95	60	0,3154	0,0091	13,57
18	0,5830	0,0063	40,39	61	0,3063	0,0094	12,93
19	0,5767	0,0061	39,82	62	0,2969	0,0097	12,36
20	0,5705	0,0060	39,25	63	0,2872	0,0098	11,77
21	0,5645	0,0059	38,68	64	0,2774	0,0103	11,14
22	0,5586	0,0059	38,07	65	0,2671	0,0104	10,48
23	0,5527	0,0057	37,48	66	0,2567	0,0107	9,93
24	0,5470	0,0056	36,85	67	0,2460	0,0110	9,35
25	0,5414	0,0055	36,24	68	0,2350	0,0115	8,77
26	0,5359	0,0056	35,60	69	0,2235	0,0120	8,23
27	0,5303	0,0055	34,96	70	0,2115	0,0121	7,66
28	0,5248	0,0054	34,32	71	0,1994	0,0124	7,12
29	0,5194	0,0055	33,65	72	0,1870	0,0128	6,53
30	0,5139	0,0054	33,05	73	0,1742	0,0131	5,91
31	0,5085	0,0054	32,37	74	0,1611	0,0135	5,34
32	0,5030	0,0055	31,71	75	0,1472	0,0141	4,82
33	0,4975	0,0054	31,09	76	0,1335	0,0144	4,27
34	0,4921	0,0055	30,49	77	0,1191	0,0149	3,78
35	0,4866	0,0055	29,77	78	0,1042	0,0152	3,26
36	0,4811	0,0056	29,09	79	0,0890	0,0157	2,81
37	0,4755	0,0057	28,41	80	0,0733	0,0163	2,18
38	0,4698	0,0058	27,77	81	0,0570	0,0164	
39	0,4640	0,0058	27,11	82	0,0406	0,0174	
40	0,4582	0,0058	26,44	83	0,0232	0,0176	
41	0,4524	0,0059	25,78	84	0,0056	0,0056	
42	0,4465	0,0061	25,11				

Verbesserungen.

Seite 62. Zeile 23 — 25. von oben lese man: »Für $m = 1$ reducirt sich dieser Werth von ϖ_1 auf $\frac{1}{2}$, was a priori einleuchtend ist« statt: »Der Fall u. s. f.«

Seite 142. Zeile 21. v. o. lese man: »Wenn jedoch das Gesetz der Reihe unbekannt ist, so kann sie zu der Gattung von Reihen gehören« statt: »Sie gehört u. s. w.«

Seite 166. Zeile 7. v. u. setze man hinzu: »wenn sie eine ganze Zahl ist, und um weniger, wenn sie keine ist.«

Seite 215. Zeile 23. v. o. ist zu streichen: »welche zwischen α und 6 liegt.«

Seite 412. Zeile 6. v. u. l. früher st. später.

Seite 420. Zeile 15. v. u. l. 28. st. 29.

Helmstedt, gedruckt in der Leuckart'schen Buchdruckerei.

Spehr, Dr. F. W., Neue Prinzipien des Fluentencalculs, enthaltend: die Grundsätze der Differenzial- und Variationsrechnung, unabhängig von der gewöhnlichen Fluxionsmethode, von den Begriffen des unendlich kleinen oder der verschwindenden Größen, von der Methode der Gränzen und der Functionenlehre zugleich als Lehrbuch dieser Wissenschaft dargestellt, und mit Anwendungen auf die analytische Geometrie und höhere Mechanik verbunden. Mit 5 Kupfertafeln. gr. 8. 1826. 2 Thlr.

Whewell, W., Elementar-Lehrbuch der Mechanik. Zum Gebrauche für technische Lehranstalten und zugleich als ein Supplement zu den Lehrbüchern der Physik. Nach der fünften sehr verbesserten und vermehrten Originalauflage aus dem Englischen übersetzt von Dr. C. H. Schnuse. Mit 8 Figurentafeln. 19 Bogen. Lexiconf. 8. geh. 1841. 1 Thlr. 16 Ggr.


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
519.2P752L:G1841
C001
LEHRBUCH DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
3 0112 017306124